대한산업공학회/한국경영과학회 2000 춘계공동학술대회 논문집. 2000 년 4 월 21-22 일. 경남대학교
Session PA6.4

# 생산 용량 제약하에서 생산-영업 부문을 동시에 고려한 생산량 및 판촉계획

# Promotion and Production Coordination Decisions with Production Capacity Constraints

성제훈, 김기현, 김승한, 함주호
서울대학교 산업공학과

## Abstract

기업의 생산 비용을 최소화하는 방안에 관한 많은 연구가 수행되어 왔으며, 또한 기업의 판촉효과에 따라 수요에 미치는 영향 또한 많은 연구가 이루어 졌으며, 생산 비용 최소화 및 판매 이익 극대화 방안에 관한 연구가 이루어졌다. 이러한 두가지 요소를 동시에 고려하여 기업의 영업 부문에서 생산 부문을 고려한 판촉 계획 및 생산 계획에 관한 대표적 연구가 Sogomonian & Tang([8])에 의해 이루어 졌으며, 이외에도 생산과 영업(마케팅)을 동시에 고려한 생산계획을 통해 영업과 생산 부문의 조화를 유도하는 연구가 많이 이루어 지고 있다.

하지만 대부분의 연구들에서 생산용량의 제약을 고려 하지 않고 영업 부문의 의사결정에 중점을 두고 있어 생산 부문의 의사 결정은 비교적 단순하게 다루어 졌다. 따라서 본 연구에서는 Sogomonian & Tang 의 연구를 기반으로 하여, 생산용량 제약을 첨가하여 보다 현실적이며 생산 부문의 의사결정에 중점을 둔 모형을 제시하고, 아울러 본 모형에 대한 해법을 제시하고자 한다.

## 1. 서론

영업과 생산을 동시에 고려하여 마케팅활동과 생산활동을 동시에 최적화하려는 연구 중에서 Sogomonian & Tang([8])에 의한 연구는 영업부문과 생산부문이 독립적으로 의사결정을 하는 경우와 영업-생산을 동시에 고려하여 의사결정을 하는 경우를 비교하여 각각의 해법을 제시, 비교하였다. Sogomonian & Tang 은 전자를 Basic model(Decentralized system), 후자를 Integrated model(Centralized system)이라고 하였고, 중첩 네트워크를 이용해 풀이를 시도하였다. 이 연구는 단일제품의 생산, 판매와 관련하여 큰 제약조건이 없는 가정하에 풀이를 하였다. 본 연구에서는 Sogomonian & Tang 의 연구를 확장하여 보다 현실적인 모형을 만들기 위해 생산용량에 제약을 첨가하여 이러한 상황하에서 두 모형의 해법을 구하기 위한 방법을 제시하였으며 아울러 실험을 통해 모형의 비교 방안에 대해 연구하였다. 또한 Sogomonian & Tang 의 중첩 네트워크를 사용한 해법 대신 본 연구에서는 동적계획법을 활용하여 풀이를 시도하였다.

## 2. Decentralized System

Decentralized System 에서는 먼저 영업부서가 기업의 총순익(수익-판촉활동비용)을 최대화하는 판촉활동 계획을 수립하면, 그 계획에 따른 제품의 수요가 결정되게 된다. 생산부서는 판촉활동 계획에 의하여 결정되어진 제품의 수요를 가지고 총비용(가동준비 비용, 생산비용, 재고유지 비용)을 최소화 시키는 생산활동 계획을 수립하게 된다.

### 2.1 Promotion Problem

Sogomonian & Tang 의 연구에서 Decentralized System 의 경우에 promotion problem 의 기본가정은 다음과 같으며, 사용된 변수들은 다음과 같이 정의된다.

(1) 고려되는 제품은 단일 제품이며, 가격 요소는 주어진다.
(2) 수요함수는 가장 최근의 판촉활동 후 현재까지 경과한 시간과 가장 최근의 판촉활동 수준의 두 가지 요소에 의해서만 영향을 받는다.
(3) 판촉활동은 이미 정해진 몇 개의 수준 내에서 집행되며, 매 기마다 판촉활동의 여부를 결정한다.
(4) 수요함수는 경쟁요인에 의해 변하지 않는다.

Promotion 기본모형에 관한 변수

$P \subseteq \{1,...,T\}$ : 판촉활동이 이루어진 시기
$k(u) \in \{1,...K\}$ : $u$ 기에 이루어진 판촉활동의 수준
$A(u,k(u))$ : $u$ 기에 k(u) 수준의 판촉활동을 하는데 소요되는 비용
$L(t)$ : $t$ 기 이전 가장 마지막에 이루어진 판촉활동의 시기
$D(t-L(t),k(L(t)))$ : $t$ 기의 수요함수

$r_t$ : $t$ 기의 제품가격

Sogomonian & Tang 이 제시한 기본모형은 각 기간의 초기에 영업부서에서 판촉활동의 유무와 수준에 대하여 결정하게 된다. 다음과 같은 기업의 총순익(총수익-판촉활동 비용)을 최대화 하는 모형을 세울 수 있다. 최적 생산활동은 다음 모형의 최적해로 주어진다

$$\underset{P\subseteq\{1,\ldots,T\}}{Max}\ [\sum_t r_t D(t-L(t),k(L(t))) - \sum_{u\in P} A(u,k(u))$$
$$s.t.\quad L(t) = Max\{u : u\in P,\ u\le t\}$$
$$k(u)\in\{1,\ldots,K\} \tag{1}$$

식(1)의 첫번째 제약식은 L(t)가 t 기 이전 가장 마지막에 이루어진 판촉활동 시기라는 것을 보장해주며, 두번째 제약식은 판촉활동이 정해진 K 개의 수준으로 이루어진다는 것을 의미한다. 여기서 수요함수 D 는 Sogomonian & Tang 의 연구에서 예시로 제시한 함수를 사용하여 모형의 해법에 적용하기로 한다.

$$D(t-L(t),k(L(t))) = \begin{cases} 10^{1.5} * \exp(-(t-L(t)))\ \ if\ k(L(t))=1 \\ 10^{2} * \exp(-(t-L(t)))\ \ if\ k(L(t))=2 \end{cases} \tag{2}$$

Sogomonian & Tang 은 본 문제를 풀기위해 중첩 네트워크를 사용하여 해법절차를 전개하였지만, 본 연구에서는 Integrated model 의 전개를 위해 동적계획법을 사용하여 해법 절차를 전개하고자 한다. 실제적으로 Sogomonian & Tang 의 연구를 동적계획법에 의해 풀이해도 중첩 네트워크를 사용하였을 때와 같은 결과를 얻을 수 있다. Decentralized system 의 경우, (4)의 각각의 수요함수에 대해 (1)식을 최대로 하는 판촉수준을 결정할 수 있다.

**2.2 Production Problem**

생산의 경우 2.1 에서 도출된 수요치를 기본 입력자료로 해서 각 기간별 생산량을 도출하게 된다. 생산계획의 경우 생산용량 제약이 있으며, 기본가정은 다음과 같고, 생산문제를 위한 변수들은 다음과 같다.

(1) 하나의 제품에 대해서만 고려하기로 한다.
(2) 기간별 수요는 서로 다르다.
(3) 기간별로 가동준비비, 생산비, 재고유지비도 다를 수 있고, 생산용량에 제약이 있다.
(4) 재고고갈을 허용하지 않는다.
(5) 초기재고와 마지막기의 재고는 0 이다.
(6) 어느 기를 기준으로 그 다음 기들의 총 재고부족량 보다 그 전단계 기들의 총 잉여량(생산용량 제약과 수요의 차)이 커야 한다.

<u>Production 기본모형에 관한 변수</u>

t : 기간( period ; 1,2,3,... , t,... ,T )
$s_t$ : 가동준비비( setup cost of t-period )
$p_t$ : 생산비( production cost of t-period )
$h_t$ : 재고유지비( inventory holding cost of period t )
$x_t$ : 생산량( production quantity of period t )
$I_t$ : 재고량( inventory quantity of period t )
$cap_t$ : 생산용량 ( capacity of period t )
b : 생산제약 사용율( capacity usage )
$y_i$ : 가동준비비( setup ) 유/무(생산시 1, 다른 경우 0)

$$Min \sum_{t=1}(s_t y_t + p_t x_t + h_t I_t)$$
$$st.\ I_t = I_{t-1} + x_t - d_t$$
$$bx_t \le cap_t$$
$$I_0 = 0 \tag{3}$$
$$x_t, I_t \ge 0$$
$$y_t = 0(x_t = 0)\ or\ 1(x_t \ne 0)$$

Sogomonian & Tang 의 연구에서는 생산계획을 수립하기 위해 Wagner-Whitin 방법의 적용을 통해 간단히 전개하였으나, 본 연구에서는 생산요량의 제약이 존재하므로 문제가 NP-hard 가 되어 풀이가 어렵게 된다. (3)에 나타난 문제를 해결하기 위해서 본 연구에서는 Lagransian relaxation 을 이용하여 생산용량 제약식을 완화시킨 후, 분지한계법을 통해 최적해를 구하고자 한다.

분지한계법을 전개할 때, Subgradient method 를 통한 한계조건을 설정해 분지가 빠르게 일어날 수 있도록 하였다. 생산용량 제약이 존재하는 경우의 동적 생산량 결정에 관한 해법절차는 '한계조건을 첨가한 분지한계법'을 적용하며, 이를 부분마다 살펴 보면 다음과 같다.

생산용량의 제약이 있는 경우의 동적생산량 결정에서는 생산용량 제약이 완화된 문제로 식을 변형하기 위해서는 다음과 같은 형태로 제약식을 완화시켜 준다.( 한계조건으로서의 Lagrangian relaxation) 기존의 분지한계법에서는 원문제( $P$ )에서 분지를 해나가면서, 분지된 문제를 검토해 생산가능이고 부분생산비용이 현 최적비용보다 작은 부분문제에 대해서는 문제목록( active list set )에 등록을 하고( $P_\sigma$ ), 또 분지를 해나간다. 이러한 경우 분지는 마지막 생산기부터 이루어지며, 이러한 생산가능한 문제목록( active list set )에서 하나의 문제( $P_\sigma$ )를 선택해 다시 분지를 하게 된다. 이러한 경우, 분지를 한 후 생산소요비용 계산시에, 생산제약으로 인해 전단계로 미뤄야할 수요량과 현생산단계( $P_\sigma$ 의 $\sigma$ )에서의 생산소요비용은 동적( dynamic )으로 결정된다. 본 연구에서는 한번 분지할 때마다, 만약 현재 분지된 노드( node )가 생산가능일 경우, 1 기부터의 총 생산계획을 Lagrangian relaxation 에 의해 구해 상한으로 활용하고자 한다. 그러면 현최적값( $Z^*$ )이 기존의 분지한계법보다 빨리 실수의

값을 가지게 되므로 다른 가지로의 분지를 미연에 방지할 수가 있게된다.

## 3. Integrated model

판촉활동과 생산을 동시에 고려하는 경우, (5)와 같은 식으로 표현될 수 있으며, Sogomonian & Tang의 경우 중첩 네트워크를 이용하여 이를 풀이하였다. 본 연구에서는 앞서 기술하였듯이, 동적계획법을 통해 풀이를 전개하며, 현재의 기간(t)를 중심으로 판촉활동을 할 것인가 아니면 판톡활동을 하지 않고 이전 판촉활동의 영향을 받을 것이가를 일차적으로 결정해야 한다. 이에 따라서 각각의 경우에 생산생산용량제약이 있는 경우의 생산계획을 수립하여 (5)의 첫번째에 나타난 순이익 함수를 최대화 시키는 판촉활동 수준을 결정하도록 한다. 이를 계속 반복하여 최종적인 순이익과 판촉계획, 생산계획을 수립할 수 있다.

$$\max_{P\subseteq\{1,\dots,T\}}\left[\sum_t r_t D(t-L(t),k(L(t)))-\sum_{u\in P}A(u,k(u))-\sum_t(s_t y_t+p_t x_t+h_t I_t)\right]$$

*subject to*

$$\begin{aligned}
&L(t)=Max\{u:u\in P,u\le t\}\ \textit{for each } t\\
&k(u)\in\{1,\dots\dots,K\}\\
&I_t=I_{t-1}+x_t-D(t-L(t),k(L(t)))\\
&bx_t\le cap_t\\
&I_0=0\\
&x_t,I_t\ge 0\\
&y_t=0\ (x_t=0)\ or\ 1\ (x_t\ne 0)
\end{aligned}\qquad(5)$$

본 연구의 Integrated model 의 해법절차는 다음과 같이 [1]-[2.3]의 순서로 이루어진다.

---

**[1] 판촉-생산 통합 계산**

( 단계 1 ) t=T이면 계산 끝, $\pi_T$가 최대 순이익임.

( 단계 2 ) w=마지막 판촉시기, 이에 따른 t기간의 수요도출

→ $D_w(t-L(t),k(L(t)))=10^{1.5}\cdot\exp(-(w-L(w)))\ \ if\ k(L(w))=1$

→ $D_w(t-L(t),k(L(t)))=10^{2}\cdot\exp(-(w-L(w)))\ \ if\ k(L(w))=2$

( 단계 3 ) (단계 2)에서 도출된 t기간의 수요를 이용, '[2-1] 분지한계법 알고리즘'으로 각 기간별 생산량, 생산비용 도출

( 단계 4 ) t기간에 판촉을 하는 경우, 이에 따라 판촉활동 수준에 따른 t기간의 수요도출

→ $D_1(t-L(t),k(L(t)))=10^{1.5}\cdot\exp(-(t-L(t)))\ \ if\ k(L(t))=1$ : t기간의 판촉수준을 1로 하는 경우

→ $D_2(t-L(t),k(L(t)))=10^{2}\cdot\exp(-(t-L(t)))\ \ if\ k(L(t))=2$ : t기간의 판촉수준을 2로 하는 경우

( 단계 5 ) (단계 4)에서 도출된 t기간의 수요를 이용, '[2-1] 분지한계법 알고리즘'으로 각 기간별 생산량, 생산비용 도출

( 단계 6 ) $D_1(t-L(t),k(L(t)))$, $D_2(t-L(t),k(L(t)))$에 따른 각각의 순이익 도출, 비교

→ 순이익 함수 "$\pi_t=\left[\sum_t r_t D(t-L(t),k(L(t)))-\sum_{u\in P}A(u,k(u))-\sum_t(s_t y_t+p_t x_t+h_t I_t)\right]$" 사용

→ $D_1(t-L(t),k(L(t)))$일 경우 순이익함수($\pi_t$)가 최대이면 : t기간의 판촉수준=1

→ $D_2(t-L(t),k(L(t)))$일 경우 순이익함수($\pi_t$)가 최대이면 : t기간의 판촉수준=2

→ $D_w(t-L(t),k(L(t)))$일 경우 순이익함수($\pi_t$)가 최대이면 : t기간에는 판촉활동을 하지 않음, 마지막 판촉시기=w

→ (단계 1)로

**[2-1] 분지한계법 알고리즘**

( 단계 0 ) 원문제를 '[2-2] Subgradient 알고리즘'으로 풀이 시도

→ 최적생산계획이 나오면 분지끝

→ 아니면 분지 시작

( 단계 1 ) 문제 $P_\sigma$를 현 문제목록( active list )이라 하고, 초기조건을 준다. $\sigma=\phi$, $\sigma_1=N+1$, $d_\sigma=0$, $Z(P_\sigma)=0$, $Z^*=\infty$

( 단계 2 ) 문제목록( active list )이 비면, 최적해를 찾은 것이다.분지끝

아니면, $P_\sigma$를 문제목록( active list )에서 제거, 가장 최근에 문제목록( active list )에 첨가된 부문제 하나 선택( 새로운 $P_\sigma$ )

( 단계 3 ) $i=\sigma_1-1$ 이라 놓고, 시작

[ 단계 3.1 ] $d_{i\sigma}>\sum_{j=1}^{i-1}(cap_j-d_j)$ 이면, 비가해( infeasible ) → ( 단계 2 )로

[ 단계 3.2 ] $Z(P_\sigma),d_{i\sigma}$ 계산, $i$=1 이면 ( 단계 4 )로

[ 단계 3.3 ] $Z(P_\sigma)>Z^*$ 이면, 최적( optimal ) 아님 → $i$=$i$-1, [ 단계 3.1 ]로

[ 단계 3.4 ] $\sigma_1=\sigma_1'$ 인 두 부분해 $\sigma,\sigma'$에 대해서, $Z(P_\sigma)>Z(P_{\sigma'})$이고, $d_\sigma>d_{\sigma'}$ 이면, → $i$=$i$-1, [ 단계 3.1 ]로

[ 단계 3.5 ] $P_\sigma$가 삭제되지 않았으면,

< 단계 3.5.1 > '[2-2] Subgradient 알고리즘' 시행 1기부터 $\sigma_1-1$기까지의 생산계획을 세운다.

< 단계 3.5.2 > 만약 가능한 생산계획이 나오는 경우

Lagrangian relaxation의 최적해( [illegible] )를 비교한다.

→ [illegible] ( holding cost ) [illegible] 이면, [illegible] ( holding cost ) [illegible]

이고 이 때의 가능한 생산기를 현최적 생산기로

< 단계 3.5.3 > 만약 $Z_{LRu^k}{}^* = Z_D(u^k)$이면, 이 방향의 가지로 분지끝
→ ( 단계 2 )로
아니면, $P_\sigma$를 문제목록( active list )에 첨가하고, $i$=$i$-1, [ 단계 3.1 ]로

( 단계 4 ) $Z(P_{1\sigma})<Z^*$ 이면, $Z^*=Z(P_{1\sigma})$ 이고 $1\sigma$를 현최적 생산기로 저장 →( 단계 2 )로

**[2-2] Subgradient 알고리즘**

( 단계 1 ) 초기화 : $u^0, s^0$, 일반적으로 $u^0=0, s^0=2$를 사용

( 단계 2 ) 탐색방향의 결정 : $d^k$

$$LRu^k = Min\{\sum_{i=1}^{N}[(p_i+u_i b)x_i + s_i y_i + h_i I_i] - \sum_{i=1}^{N}[u_i \cdot cap_i]\}$$ 를 푼다.

→ '[2-3] Wagner-Whitin방법 '사용 → $Z_D(u^k)$ 구함

$x^k$를 현최적으로 하고, $d^k = b - Ax^k$ 로 놓는다.

( 단계 3 ) 스텝 크기( step size : $t^k$ ) 결정 → $t^k = \dfrac{s^k(Z_{LRu^k}{}^* - Z_D(u^k))}{\|Ax^k - b\|^2}$

( 단계 4 ) 수정 : $u^{k+1} = Max[0, u^k + t_k d^k]$

→ $Z_D(u^{k+1}) < Z_D(u^k)$ 인 경우 $s^{k+1} = s^k/2$

반대의 경우 $s^{k+1} = s^k$

$x^k$가 완화된 제약식( $Ax \le b$ )를 만족시킬 경우

$Z_{LRu^k}{}^* = Min[cx^k, Z_{LRu^k}{}^*]$

$Z_{LRu^k}{}^* = Z_D(u^k)$인 경우 생산시기를 기록

( 단계 5 ) 끝( stopping ) : 아래의 경우에는 계산을 중단하고, $Z_{LRu^k}{}^*$와 이 때의 생산 시기를 '[2-1] 분지한계법 알고리즘 '으로

→ $k>N$ 일 경우 : 지정된 횟수만큼 순환 또는

→ $|Z_{LRu^k}{}^* - Z_D(u)| < E$ : 지정오차(error) 한계 내에 들어왔을 경우

기타의 경우는 ( 단계 1 )로

**[2-3] Wagner-Whitin 방법**

( 단계 1 ) 초기해 $F(1) = s_1 + p_1 x_1$, $F(0) = 0$

( 단계 2 )

$$F(i) = Min\left[\begin{array}{c} \underset{1\le j\le i}{Min}\left(s_i + p_i x_i + \sum_{h=j}^{i-1}\sum_{k=h+1}^{i} i_h d_k + F(j-1)\right) \\ s_i + F(i-1) \end{array}\right]$$

이 식을 이용하여, 현재기간( $i$기 )까지의 최적해 구함, $F(i)$가 가장 적은 $x_i$ 결정 → 현최적( $i$기까지 최적 )

( 단계 3 ) $i=N$이면 현최적이 최적값 → $Z_D(u^k) = F(N)$, 이 때의 $x_i$가 최적 생산시기

→ '[2-2] Subgradient' 알고리즘 으로

아니면 $i = i$+1로 하고 ( 단계 2)로

## 4. 참고 문헌

[1] 성재훈, " 생산용량 제약하에서 동적생산량 결정에 관한 연구 ", *석사논문, 서울대학교 산업공학과*, 1996년, 2월

[2] Baker, K. R., Dixon, P., Magazine, M. j., Silver, E. A., " An algorithm for the dynamic lot-size problem with time-varying production capacity constraints ", *Management Science*, vol 24, no 16, 1978, 1710-1720

[3] Dixon, P., Silver E. A., " A heuristic solution procedure for the multi item, single level, limited capacity lot sizing problem ", *Journal of Operations Management*, vol 2, no 1, 1981, 23-39

[4] Eliashberg J, R. Steinberg, " Marketing-Production Decisions in Industrial Channel of Distribution ", *Management Science*, vol.33, no. 98, 1987, 1-1000.

[5] Fisher, M. L., " An applications-Oriented guide to Lagrangian relaxation ", *Interfaces*, vol 15, no 2, 1985, 10-21

[6] Fisher, M. L., " The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems ", *Management Science*, vol 27, no 1, 1981, 1-17

[7] Freeland J.R, " Coordination Strategies For Production and Marketing in a Functionally Decentralized Firm ", *AIIE Transactions*, vol. 12, 1980, 126-132.

[8] Sogomonian A, G, C.S. Tang, " A Modeling Framework For Coordinating Promotion and Production Decisions within a Firm ", *Management Science*, vol. 39, no. 2, 1993, 191-203.

[9] Trigeiro, W. W., Thomas, L. J., McClain, J. O., " Capacitated lot sizing with setup ", *working paper, Georgetown university school of business*, 1985

[10] Wagner, H. M., Whitin, T. M., " Dynamic version of the economic lot size model ", *Management Science*, vol 5, no 1,1958, 89-96