대한산업공학회/한국경영과학회 2000 춘계공동학술대회 논문집. 2000년4월21-22일. 경남대학교
Session PA5.1

Gate와 threshold가 있는 2단계 서비스의 $M^X/G/1$ 모형 분석
$M^X/G/1$ two-phase gated service model with threshold

김 정현, 허 선
한양대학교 산업공학과

Abstract

본 연구에서는 집단도착과 Threshold가 있는 2단계 서비스 중 첫 서비스에 Gate가 있는 모형에 대해 분석한다. 즉 도착 간격이 지수분포를 따르고 집단도착이 일어나는 모델에서 도착한 고객의 수가 정해진 threshold를 넘으면 서비스를 시작한다. 시스템의 서버는 하나이며 이 서버로부터 첫 단계에서 배치서비스를 받고, 두 번째 단계에서 개별서비스를 받는다.

첫 번째 단계 서비스 중일 때 도착한 고객은 진행중인 서비스에 합류해 같이 서비스를 받는 것이 아니라 다음 batch 서비스를 기다린 후 배치 서비스를 받아야 한다. 첫 단계 서비스 시작 시 고객수, 두 번째 단계서비스 종료 시 고객 수를 확률변수로 정의하고 이를 풀어 고객수 분포에 대한 PGF 및 평균 고객수와 대기시간분포에 대한 LST 및 평균 대기시간 등을 유도한다.

1. 서론

2단계 서비스란 하나의 서버가 2가지의 서비스를 순차적으로 행하는 것을 말한다. 이러한 모델로는 재고 모형에서 각각의 주문을 접수 및 분류하는 단계를 1단계 서비스로, 이에 대한 납기 등을 2단계로 볼 수 있다. 또 다른 예로는 생산공정에서 선공정이 있는 경우를 들 수 있겠다. 즉 생산라인에 들어온 제품을 일차로 선가공 후 각각의 제품에 대해 재가공하는 모델 등이 있을 수 있다.

이런 2단계 서비스에 대한 기존연구를 살펴보면, Krishna 와 Lee[3] 가 연구한 도착과 서비스가 지수 분포인 2단계 서비스가 있었고 이를 확장한 서비스시간이 일반적인 분포를 따르는 Doshi[2]의 논문이 있었다. 그리고 여기에 복수 휴가를 고려한 모델로는 Selvam과 Sivasankaran[5]의 논문이 있었으며, 이를 확장한 일반적인 휴가 모델과 1단계 서비스에 gate가 있는 모델을 김태성과 채경철[6]이 연구하였다. 최근에는 Threshold 와 1단계 서비스에 gate가 있는 모형을 김태성[7]이 연구하였다.

본 연구에서는 좀더 모델이 일반적인 형태를 따르도록 도착이 집단으로 발생하고, threshold와 1단계 서비스에 gate가 있는 모델을 분석한다. 2절에서는 모델에 대한 설명하고 있으며, 3절에서는 각각에 대한 확률변수 정의 및 고객수 분포, 대기시간에 대한 분포를 유도한다. 또한 이를 통한 각각의 평균을 구한다.

2. 모델 설명

배치로 도착한 고객의 수가 일정한 Threshold가 넘으면 서비스를 시작하는 모델로 첫 번째 단계 서비스는 배치서비스를, 두 번째 단계 서비스는 개별서비스를 하나의 서버가 순차적으로 한다. 시스템의 모든 고객은 배치서비스와 개별서비스를 모두 받고 나간다. 개별 서비스가 끝났을 때 시스템에 고객이 없으면 서버는 서비스를 중단하고, threshold가 넘을 때까지 기다린다. 그러나, 개별서비스가 끝났을 때 시스템에 고객이 있으면 다시 배치서비스를 수행한 후 개별서비스로 가는 사이클을 시스템에 고객이 없을 때까지 반복한다. 이때 배치서비스나 개별 서비스 중에 도착한 고객은 서비스에 합류하는 것이 아니라 다음 배치서비스를 기다려야 한다. 배치서비스 시간은 고객수와 독립적인 분포를 따르며 개별 서비스 시간도 모두 i.i.d한 확률 분포를 따른다.

3. 모델 분석

3.1 확률변수 정의

P : 배치서비스 시작시점에서 안정상태 고객수

P_2 : 개별서비스 종료시점에서 안정상태 고객수

$P_{20} = \Pr(P_2 = 0)$ (개별서비스 종료시 고객이 없을 확률)

g_k : 도착집단 고객수(G)가 k 명일 확률

$X(z) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i z^i, (g_0 = 0)$

N : Threshold

B: 배치서비스 시간, $B^*(\theta)$: LST of B

S: 개별서비스 시간, $S^*(\theta)$: LST of S

α_N : 유휴기간 종료시 시스템 고객수($\alpha_N \geq N$)

이에 따라 P, P_2 는 다음과 같은 관계가 있다.

P_2 =배치서비스 시작시점의 고객을 모두 개별서비스하는 동안 도착한 고객수 + 배치서비스 동안 도착한 고객수

$$P = \begin{cases} P_2 & \text{if } P_2 > 0 \\ \alpha_N & \text{if } P_2 = 0 \end{cases}$$

3.2 각 시점 고객수 PGF

P와 P_2의 PGF는 정의에 의해 다음과 같다.

$$P_2(z)=P[S^*(\lambda-\lambda X(z))]B^*(\lambda-\lambda X(z)) \quad (1)$$

$$P(z)=P_2(z)-P_{20}+P_{20}a_N(z) \quad (2)$$

또한 $\Pr(a_N=k)=g_k+\sum_{j=1}^{N-1} g_j \Pr(a_{N-j}=k-j)$이므로

$a_N(z)=\sum_{j=1}^{N-1} g_j z^j(a_{N-j}(z)-1)+X(z)$이 된다.

(1),(2) 식을 정리하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$P(z)=P(S^*(\lambda-\lambda X(z)))B^*(\lambda-\lambda X(z)) - P_{20}(1-a_N(z)) \quad (3)$$

여기서 P_{20}을 구하기 위해 다음과 같이 변환한다.

$$s^{(0)}=z,\ s^{(1)}(z)=S^*(\lambda-\lambda X(z)), \quad (4)$$
$$s^{(2)}(z)=S^*[\lambda-\lambda X[S^*(\lambda-\lambda X(z))]],....$$
$$b^{(0)}=z,\ b^{(1)}=B^*(\lambda-\lambda X(z)), \quad (5)$$
$$b^{(2)}=B^*[\lambda-\lambda X[B^*(\lambda-\lambda X(z))]],....$$
$$L(z)=1-a_N(z),\ L(s(z))=1-a_N(s(z)),... \quad (6)$$

(1),(2),(3),(4),(5),(6) 식의 관계를 이용하여 $P(z)$를 정리하면 다음과 같다.

$$P(z)=\Pi_{j=0}^{\infty} b(s^{(j)}(z))-P_{20}\sum_{k=0}^{\infty} L(s^{(k)}(z))\Pi_{j=0}^{k-1} b(s^{(j)}(z)) \quad (7)$$

(7)식에 z=0을 대입하고, 식(3),(7) 관계로부터 P_{20}를 구할 수 있다. P_{20}에 대해 다시 정리하면 다음과 같다.

$$P_{20}=\frac{\Pi_{j=0}^{\infty} b(s^{(j)}(0))}{1+\sum_{k=0}^{\infty} L(s^{(k+1)}(0))\Pi_{j=0}^{k} b(s^{(j)}(0))} \quad (8)$$

3.3 이탈 시점 고객수 PGF

이탈 시점 고객수는 gate가 없는 모델과는 달리 배치서비스 종료시점이 아닌 배치서비스 시작시점의 고객수에 조건을 취하여 구할 수 있다.[4]

M: 이탈 시점 고객수,
P^t : 시험고객이 속한 집단의 크기
K : 집단내에서 시험고객의 위치
그러면 이탈시점의 고객수 M의 PGF $M(z)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M(z) &= E(z^M)=E(E(z^M\mid P^t)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E(z^M\mid P^t=n)\Pr(P^t=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} E(z^M\mid P^t=n,K=k) \\ &\quad \cdot \Pr(P^t=n)\Pr(K=k\mid P^t=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} b(z)z^{n-k}s(z)^k \frac{n\Pr(P=n)}{nE(P)} \\ &= \frac{s(z)b(z)[P(z)-P(s(z))]}{E(P)(z-s(z))}, \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 식 (1), (2)에서부터 구한 기대값을 풀면

$E(P)=\dfrac{\gamma+P_{20}E(a_N)}{1-\rho}$이고,

$\gamma=\lambda E(B)E(X)$, $\rho=\lambda E(S)E(X)$를 나타낸다.

3.4 임의 시점 고객수 PGF

본 모델에서는 도착이 집단으로 발생하므로 임의시점고객수와 이탈 시점 고객수가 같지 않아서 Burke의 정리를 사용할 수 없다. 그러나 입력시점의 고객수를 변환하면 Burke의 정리가 성립하게 할 수 있다. 즉 집단으로 도착한 고객들을 하나씩 입력시킨다고 보고 이때 시간은 정지한다고 보면 Burke의 정리가 성립하고 고객수 분포의 관계는 다음과 같다.[9]

$\overline{\Pi}^{(X)}$: 도착 집단내 고객이 보는 시스템 고객수
$\overline{\Pi}$: 임의의 고객이 입력시 보는 고객수
Π : 이탈시점의 고객수
$P(z)$:임의시점 고객수

$X(z)^- = \dfrac{1-X(z)}{E(X)(1-z)}$ 라고 두면 이는 도착집단내 임의고객의 위치를 나타내는 PGF이다. 따라서 $\overline{\Pi}(z)=\overline{\Pi}^{(X)}\cdot X(z)^-$, $\overline{\Pi}(z)=\Pi(z)$이므로 임의 시점 고객수 PGF는 다음과 같다.

$$R(z)=\frac{s(z)b(z)[P(z)-P(s(z))]}{E(P)(z-s(z))}\frac{E(X)(1-z)}{1-X(z)} \quad (10)$$

식(10)을 미분하여 z에 1을 대입하면 평균 고객수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E(R)= & \frac{\lambda^2E(B^2)E(X)^2}{2[\gamma+P_{20}E(a_N)]}+\rho+\frac{\lambda^2E(S^2)E(X)^2}{2[\gamma+P_{20}E(a_N)]}+\frac{\gamma}{(1-\rho)} \\ & \frac{P_{20}E[a_N(a_N-1)]}{2[\gamma+P_{20}E(a_N)]}+\frac{E[X(X-1)]\lambda E(S)}{2(1-\rho)} \\ & -\frac{P_{20}E(a_N)E[X(X-1)]}{2E(X)[\gamma+P_{20}E(a_N)]} \end{aligned} \quad (11)$$

3.5 대기시간 LST

대기시간은 개별서비스 전까지 기다리는 시간을 말하며, Threshold 때문에 대기시간LST와 고객수 분포 PGF와 관계를 이용하여 구할 수 없다. 따라서 시험고객을 포함한 집단고객 도착시점을 3부분으로 나누어 구해야 한다. 배치서비스, 유휴기간, 개별서비스 기간에 고객이 도착할 확률은 $\dfrac{\gamma(1-\rho)}{\gamma+P_{20}E(a_N)}$, $\dfrac{P_{20}E(a_N)(1-\rho)}{\gamma+P_{20}E(a_N)}$, ρ 인데 각각의 확률값은 찌체 사이클, 재생과정[7]이론에 의해 구할 수 있지만, 다음과 같이 생각할 수도 있다. 서버는 개별서비스와 배치서비스를 수행하지만, 실제적인 서비스는 개별서비스라고 가정하면, 시스템은 일량보존성에 의해 고객이 개별서비스때 도착할 확률은 ρ이고 그 외 상태에 도착할 확률은 1-ρ임을 알 수 있다. 개별서비스 이외 시점에 도착한다는 조건하에 유휴기간, 배치서비스기간이 차지하는 확률은 각각 $\dfrac{P_{20}E(a_N)}{\gamma+P_{20}E(a_N)}$, $\dfrac{\gamma}{\gamma+P_{20}E(a_N)}$ 이므로 1-ρ를 곱하여 유휴기간, 배치서비스 기간에 도착할 확률을 구할 수 있다. 위에서 구한 확률 값들과 시험고객이 도착하는 시점에 따른 대기시간을 조사하여 대기시간 분포를 구할 수 있다.

1) idle할 때 도착한 고객의 대기시간은 다음 ①~④의 시간들의 합으로 구성된다

① 도착해서 j 명이 있다면 j 명의 개별 서비스

시간 (j≤N-1)
② 배치서비스 시간
③ 시험고객을 포함한 도착 집단내에서 시험고객 앞에 있는 고객의 개별 서비스 시간
④ j 명에서 N 명이 넘을 때까지의 잔여 유휴시간

우선, idle할 때 도착한 집단이 j 명을 볼 확률은 다음과 같다 [1],[8].

$$\Pr(A_N=j)=\frac{\pi_j}{\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n},\quad \pi_j=\sum_{k=1}^{j}g_k\pi_{j-k}$$

여기서 π_j 는 idle한 기간동안 j 상태를 방문할 확률이다. 이제 T_N 을 threshold가 N일 때 유휴기간이라고 하고 $T_N^*(\theta)$ 를 T_N 의 LST라고 하면

$T_N^*(\theta)=\frac{\lambda}{\lambda+\theta}[1+\sum_{k=1}^{N-1}g_k(T_{N-k}^*(\theta)-1)]$ 이 된다.

여기서 $W_j^*(\theta)$를 유휴기간 때 도착해서 j명이 있을 때 대기시간 LST라 하면

$$W_j^*(\theta)=$$
$$[S^*(\theta)]^j\left[\sum_{r=1}^{N-j-1}\sum_{i=1}^{r}\frac{rg_r[S^*(\theta)]^{i-1}[T_{N-j-r}^*(\theta)]}{E(X)r}+\sum_{r=N-j}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\frac{rg_r[S^*(\theta)]^{i-1}}{E(X)r}\right] \quad (12)$$

이다.
유휴할 때 도착한 고객의 대기시간 LST는 식(12)를 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$W^*(\theta\mid idle)=\sum_{j=0}^{N-1}\Pr(A_N=j)\;W_j^*(\theta)\;B^*(\theta)=$$
$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1}\pi_n}\sum_{j=0}^{N-1}\pi_j[S^*(\theta)]^jB^*(\theta)\left[\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)(1-S^*(\theta))}+\sum_{r=1}^{N-j-1}\frac{g_r[1-S^*(\theta))^r][T_{N-j-r}^*(\theta)-1]}{E(X)[1-S^*(\theta)]}\right] \quad (13)$$

2) 배치서비스 때 도착고객의 대기시간은 다음 ①~⑤ 시간의 합으로 구성된다.

① 잔여 배치서비스시간
② 경과 배치서비스 시간동안 도착한 고객의 개별 서비스 시간,
③ 배치서비스 시작 시 고객의 개별서비스 시간
④ 다음 배치서비스 시간
⑤ 시험고객을 포함한 도착 집단내에서 시험고객 앞에 있는 고객의 개별 서비스 시간

①+②는 서로 독립이 아니므로 재생과정에 경과시간과 잔여시간의 결합 LST를 이용하여 구한다[9]. ③~⑤는 서로 독립이므로 LST의 성질에 의해 서로 곱으로 표현된다. 배치서비스 때 도착한 고객의 대기시간 LST는 다음과 같다.

$$W^*(\theta\mid batch\ service)=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]-B^*(\theta)}{[\theta-\lambda+\lambda X(S^*(\theta))]E(B)}B^*(\theta)\cdot\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)(1-S^*(\theta))}S^*(\theta)^n\Pr(P=n)$$

$$=\frac{B^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]-B^*(\theta)}{[\theta-\lambda+\lambda X(S^*(\theta))]E(B)}B^*(\theta)\cdot\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)[1-S^*(\theta)]}P(S^*(\theta)) \quad (14)$$

3) 개별서비스 때 도착고객의 대기시간은 다음 ①~⑤ 시간들의 합으로 구성된다.

먼저 Q를 배치서비스 시작시점의 고객을 모두 개별서비스 하는데 걸리는 시간(총개별 서비스시간)이라 하면,

$Q^*(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}[S^*(\theta)]^n\Pr(P=n)\;=P(S^*(\theta))$이 된다.

① 도착시점에서의 Q의 잔여시간
② 도착시점에서 Q의 경과시간 동안 도착한 고객의 개별서비스 시간
③ 배치서비스 동안 도착한 고객의 다음 개별 서비스 시간,
④ 다음 배치 서비스 시간
⑤ 시험고객을 포함한 도착 집단내에서 시험고객 앞에 있는 고객의 개별서비스 시간

①+②는 역시 서로 독립이 아니므로 2)에서와 같이 경과시간과 잔여시간의 결합 LST를 이용하여 구하며, ③~⑤도 2)에서와 같이 구할 수 있다. 개별서비스 때 도착한 고객의 대기시간 LST는 다음과 같다.

$$W^*(\theta\mid individual\ service)=$$
$$\frac{Q^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]-Q^*(\theta)}{[\theta-\lambda+\lambda X(S^*(\theta))]E(Q)}B^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]\cdot B^*(\theta)\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)[1-S^*(\theta)]} \quad (15)$$

여기서 $E(Q)=-E(P)E(S)$ 이다.

각각 세 부분을 고려한 대기시간 LST는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}W_q^*(\theta)=&(1-\rho)\frac{P_{20}E(\alpha_N)}{\gamma+P_{20}E(\alpha_N)}\\&\cdot\frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1}\pi_n}\sum_{j=0}^{N-1}\pi_j[S^*(\theta)]^jB^*(\theta)\left[\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)(1-S^*(\theta))}+\sum_{r=1}^{N-j-1}\frac{g_r[1-S^*(\theta))^r][T_{N-j-r}^*(\theta)-1]}{E(X)[1-S^*(\theta)]}\right]\\&+\frac{\gamma(1-\rho)}{\gamma+P_{20}E(\alpha_N)}\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)(1-S^*(\theta))}P(S^*(\theta))\\&\cdot\frac{B^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]-B^*(\theta)}{[\theta-\lambda+\lambda X(S^*(\theta))]E(B)}B^*(\theta)\\&+\rho\frac{Q^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]-Q^*(\theta)}{[\theta-\lambda+\lambda X(S^*(\theta))]E(Q)}\cdot\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)(1-S^*(\theta))}\\&\cdot B^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]B^*(\theta)\end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)을 θ에 대해 미분하고 0을 대입하면 평균대기시간을 구할 수 있다.

$$E(W_q)= \frac{\lambda E(B^2)E(X)}{2[\gamma+P_{20}E(\alpha_N)]}+\frac{\lambda E(S^2)E(X)}{2[\gamma+P_{20}E(\alpha_N)]}+\frac{E(B)}{(1-\rho)} + \frac{E[X(X-1)]E(S)}{2(1-\rho)E(X)}+\frac{P_{20}E[\alpha_N(\alpha_N-1)]}{2\lambda E(X)[\gamma+P_{20}E(\alpha_N)]} - \frac{P_{20}E(\alpha_N)E[X(X-1)]}{2\lambda E(X)^2[\gamma+P_{20}E(\alpha_N)]} \quad (17)$$

4. 결 론

본 연구에서는 도착이 집단으로 일어나고 gate와 threshold가 있는 모형에 대해 분석했다. 본 연구에서 유도한 평균 대기 시간 및 평균 고객수에 배치사이즈를 1로 두고 그 값을 구해 보면 threshold와 gate가 있는 M/G/1 모델과 같음을 알 수 있다. 또한 식(11)의 평균 대기 고객수에 Little의 법칙을 사용하면 식 (16)을 이용하여 구한 평균 대기 시간과 같음을 알 수 있다.

5. 참고 문헌

[1] Lee, H. W. , Lee, S. S. and Chae, K. C. , "Operation characteristics of $M^X/G/1$ queue with N-policy " *Queueing Systems*, Vol 15, pp387-399, 1994
[2] Doshi, B. T. , " Analysis of a Two Phase Queueing System with General Service Times" ,*OR Letters*, Vol 10, pp265-272, 1991
[3] Krishna, C. M. and Lee, Y. H., " A Study of Two-phase Service", *OR Letters*, Vol 9, pp91-97, 1990
[4] Cooper, R. B., *Introduction to Queueing Theory*, CeePress Books, 1990
[5] Selvam, D. D. and Sivasankaran. V., "A Two- phase Queueing Systems with Server Vacations", *OR Letters*, Vol 15, pp163-168, 1994
[6] 김태성, 채경철, "2단계 서비스와 일반휴가 대기행렬", *산업공학회지*, 제22권, 제1호, pp95-104, 1996
[7] 김태성, "Cycle analysis of a two-phase queueing model with threshold", *Manuscript*
[8] 이순석, " Threshold와 휴가가 있는 집단 대기행렬의 운영특성", 성균관대 박사학위 논문, 1993
[9] 이호우, *대기행렬이론*, 시그마프레스 ,1998