대한산업공학회/한국경영과학회 2000 춘계공동학술대회 논문집. 2000년4월21-22일. 경남대학교
Session PA4.1

신경망을 이용한 비평형 이동 기간구조 하에서의 면역 모델

Immunization Model with Non-parallel shift Term-Structure using Neural Networks

박우철, 최경현
한양대학교 산업공학과

Abstract

고정금리 상품의 투자에서 이자율 변동 위험을 피할 수 있는 방법으로 많이 쓰이는 것은 듀레이션을 이용한 면역 모델(Bond Portfolio Immunization Model)로, 이것은 이자율 변동에 대해 포트폴리오의 가격 민감도인 듀레이션을 이용하여 자산과 부채의 변화를 일치시키는 방법이다. 그러나 이 전략은 수익률 곡선이 평형하게 이동한다는 가정(Parallel Shift Term-Structure)을 단점으로 가지고 있어 현실에 적용될 경우 오차가 발생하게 된다. 본 연구에서는 선험적(empirical) 방법으로 평형하지 않은 움직임을 가진 기간구조의 함수(Term-Structure Function)를 정의하고 면역 모델을 부채의 현금흐름에 대해 개별적으로 적용하는 새로운 면역 전략 모델을 구성하고 실험한다

1. 서론

고정금리상품은 정해진 수익률과 만기를 가진 금융상품으로 다른 금융상품에 비해 위험이 적으므로 금융기관의 자산·부채관리(Asset-Liability Management)에서 중요한 역할을 하고 있다. 그러나 고정금리상품 역시 예측할 수 없는 위험을 가지고 있으며 이중 큰 비중을 차지하는 것이 이자율 변화에 따른 이자율 위험(interest-rate risk)이다. 이자율 위험은 크게 두 부분으로 나뉘는데 이자율 상승시 보유하고 있는 채권의 가격이 상대적으로 하락하는 가격위험(price risk)과 이자율의 하락시 만기가 돌아온 채권을 낮은 이자율의 상품에 투자하게 됨으로서 발생하는 재투자 위험(reinvestment risk)이 그것이다. 이와 같은 이자율 위험을 피하기 위한 방법으로 널리 사용되는 것으로 면역 전략(Immunization Strategy)이 있다. [1]

면역 전략은 선형계획법 문제로 수행되므로 계산량이 적고 실제 현실문제에 적용되기 쉬우며 이자율 예측과 같은 불확실성을 고려하지 않으므로 유용한 위험회피 수단이 될 수 있으나, 기간구조의 평형 이동(Non-parallel shift term-structure)가정이 단점으로 지적되고 있다. 이런 단점을 없애기 위한 방법으로 비평형 이동의 수익률 곡선의 도입이나 고차 미분의 이용(high order matching)과 같은 방법들이 연구되었다.[2][3][4][5][6]

본 연구는 비평형 이동의 수익률 곡선을 이용하는 방법을 시장 현실에 맞도록 확장하는 문제에 대익률 곡선의 비평형한 움직임을 설명하는 기간구조 함수(term-structure function)를 정의하고, 이 기간구조 함수를 이용하여 부분 듀레이션을 이용한 면역 모델을 구성하게 된다. 이 모델은 전통적인 면역 기법과 마찬가지로 실제 현실문제에 적용하기 쉽다는 점과 평형 이동 가정을 없앨 수 있다는 장점을 가지고 있으며, 채권의 가격민감도로 사용되는 듀레이션을 보다 현실에 맞도록 해 준다는 점에서 그 중요성을 찾을 수 있다.

2. 듀레이션과 면역 전략 (Duration and Bond Portfolio Immunization Strategy)

다양한 현금흐름과 이자율을 가진 채권들의 합리적인 만기를 구하기 위해 Maculay는 듀레이션(Duration)이라는 개념을 처음으로 제시하였다. 듀레이션은 채권의 현금흐름을 시간에 대해 가중 평균하여 채권의 가격으로 나눈 값으로, 채권의 현금흐름의 인덱스를 $I=\{1,2,...,m\}$, 현금흐름의 만기시점 집합을 $T=\{t_1,t_2,...t_m\}$라 하면, $i\in I$ 번째 현금흐름 C_i와 그 이자율 r_i에 대한 채권의 가격(P)과, 듀레이션(D)은

$$P=\sum_{i\in I}C_i(1+r_i)^{-t_i} \tag{1}$$

$$D=\frac{\sum_{i\in I}t_iC_i(1+r_i)^{-t_i}}{\sum_{i\in I}C_i(1+r_i)^{-t_i}}=\frac{\sum_{i\in I}t_iC_i(1+r_i)^{-t_i}}{P} \tag{2}$$

으로 정의된다. 정의에 의해 듀레이션은 채권의 현

금흐름을 고려한 상대적인 만기를 나타내게 된다. 듀레이션은 채권의 상대적 만기를 나타내기도 하며 이자율에 대한 채권의 가격변화와도 관계를 가지고 있다. 즉 수정듀레이션(D')을

$$D' = -\frac{D}{1+r} = -\frac{dP}{dr}\frac{1}{P} \tag{3}$$

이라고 정의하면 수정듀레이션은 이자율에 대한 채권의 가격변화량이 된다. 따라서 자산과 부채의 수정듀레이션이 같아지도록 자산 포트폴리오를 구성할 경우 이자율 위험을 피할 수 있게 된다. 이와 같이 적절한 자산의 구성비율을 결정하여 이자율 위험을 피할 수 있도록 것이 바로 면역 전략이다. [1][7] 면역 전략은 채무 포트폴리오를 면역하는 자산의 구성비율을 구하는 최적화 문제로 구성되며 모델에서 사용되는 상수와 변수를

$I=\{1,2,\ldots,m\}$: 투자 가능 자산의 인덱스
D_i : 각 투자자산 $i\in I$ 에 대한 듀레이션
D_L : 부채 포트폴리오의 듀레이션
r_i : 각 투자자산 $i\in I$의 이자율
P_L : 부채 포트폴리오의 현재가치
P_i : 각 투자자산 $i\in I$ 의 현재가치
x_i : 각 투자자산 $i\in I$ 에 대한 투자비율

으로 정의한다. (여기서 정의된 모든 듀레이션은 수정 듀레이션이며, 이후 사용되는 듀레이션은 모두 수정듀레이션을 의미한다.)

전통적인 면역 전략의 수리모델은 몇 가지 가정을 가지고 있는데, 부채는 전액 재투자되어 자산 포트폴리오를 구성한다는 가정과 모든 고정금리 상품의 이자율은 만기에 상관없이 같은 크기로 변화한다는 기간구조의 평형 이동 가정이다. 전통적 면역 전략의 수리 모델(Immunization Model)은 다음과 같이 정의된다. [7][8]

[IM]

$$\text{Maximize } \sum_{i\in I} D_i r_i x_i \tag{4}$$

subject to

$$\sum_{i\in I} P_i x_i = P_L \tag{5}$$

$$\sum_{i\in I} D_i x_i = D_L \tag{6}$$

$$x_i \geq 0 \quad , \text{ for } all\ i \in I \tag{7}$$

두 제약식은 각각 첫 번째 가정과 자산 부채의 가치변화 일치를 의미하고 있으며 목적식은 자산 포트폴리오의 수익률을 최대화하도록 구성한다. 이론적으로 면역모델은 이자율 위험을 완전히 제거할 수 있으나 평형 이동 가정 때문에 면역 모델을 실제 현실에 적용할 경우 오차가 발생한다.

3. 비평형 이동 기간구조 함수 (Non-Parallel Shift Term-Structure Function)

본 연구에서는 평형 이동 가정을 완화시키기 위해 수익률 곡선이 비평형 이동 할 때 이를 나타낼 수 있는 함수가 존재한다고 가정하고 이를 기간구조 함수(Term-Structure Function)라 정의한다. 기간구조 함수 $f(r,t)$는 기준이자율(reference interest rate) r과 채권의 만기(maturity) t를 독립변수로 가지며, 특정 만기의 이자율이 r일 때 만기가 t인 중도상환이 없는 채권(zero-coupon bond)의 이자율을 나타낸다. 기하학적으로 이 함수는 기준금리와, 만기를 두 축으로 하고 두 독립변수에 따른 이자율을 나머지 한 축으로 하는 3차 공간의 곡면으로 나타나게 된다. 이 함수를 결정하기 위해선 실제 시장에서의 이자율 데이터를 이용하며, 기간 구조 함수를 통계적 방법으로 구하는 대신 신경망(Neural networks)을 이용한 함수근사(function approximation)를 이용하게 된다. 신경망은 여기서 다루고자 하는 비 선형의 특성을 가지는 데이터들의 일반적 형태를 나타내는데 뛰어난 성능을 가지고 있으며,[9][10] 만기에 대한 이산적(discrete) 이자율대신 연속적 형태의 이자율을 제시할 수 있는 장점이 있다. 그림.1, 그림.2 은 원래의 이자율 데이터와 신경망을 이용하여 추정된 이자율 구조를 그래프로 나타낸 것이다.

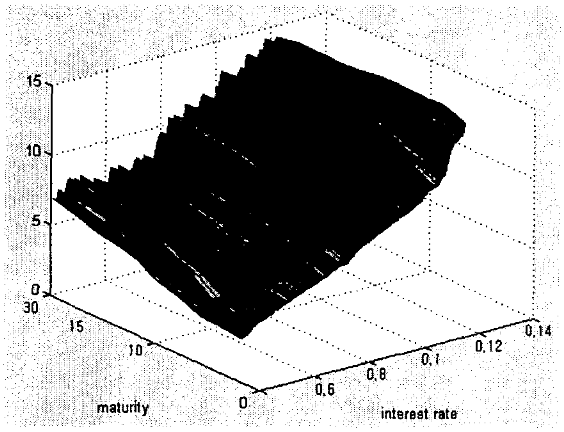

그림.1 실제 이자율 구조

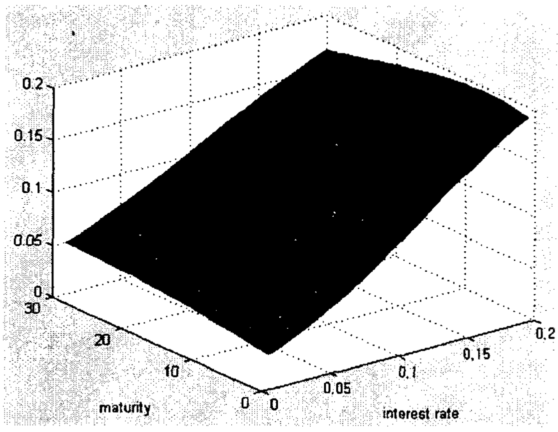

그림.2 신경망으로 만들어진 이자율 구조

4. 부분 듀레이션 (Partial Duration)

앞서 정의한 이자율 함수를 이용하여 면역 전략을 구현하기 위해, 만기에 따라 서로 다른 움직임을 가지는 이자율을 고려할 수 있는 새로운 면역 전략을 구현해야 한다. 듀레이션은 앞에서 살펴본 것과 같이 그 정의에 의해서 가법성(additive)을 가지게 된다. 이는 채권을 구성하는 각 현금흐름에 대해 각각의 듀레이션을 계산할 수 있고 이를 가중평균한 것이 전체 듀레이션 값이 됨을 의미하며, m개의 시점에서 현금흐름을 발생시키는 포트폴리오의 가격 변화량은 현금흐름의 인덱스 $I=\{1,2,..,m\}$에 대한 부분 듀레이션과 이자율 벡터 $\boldsymbol{D}=(D_1, D_2, .., D_m)$, $\boldsymbol{r}=(r_1, r_2, ..., r_m)^t$를 이용하여

$$\Delta P = \boldsymbol{D}\Delta \boldsymbol{r} = D_1\Delta r_1 + D_2\Delta r_2 + \ldots D_m\Delta r_m \quad (8)$$

로 나타낼 수 있다.[3] 이자율 변화량의 결정은 기간구조 함수를 이용하게 되며, 만기시점 집합 $T=\{t_1, t_2, \ldots t_m\}$에 대해 이자율의 변화는

$$\Delta r_i = \Delta f(r, t_i) \quad , i\in I \quad (9)$$

로 표현된다. 따라서, 이자율 변화량 Δr_i을 기간구조 함수의 편 미분 값으로 바꾸면 포트폴리오의 가치 변화량은 기준이자율 r_0에 대해

$$\frac{\partial P}{\partial r} \approx D_1\frac{\partial f(r,t_1)}{\partial r} + D_2\frac{\partial f(r,t_2)}{\partial r} + \ldots + D_k\frac{\partial f(r,t_m)}{\partial r} \mid r=r_0 \quad (10)$$

으로 나타낼 수 있으며, 듀레이션보다 현실에 맞는 가격민감도가 된다.

5. 부분 면역 모델 (Partial Immunization Model)

이번 절에서는 기간구조 함수와 부분듀레이션을 이용하여 면역 모델을 확장하는 방법을 제시한다. 부분 면역 전략의 수리모델은 앞에서 설명한 전통적인 듀레이션 모델과 동일하나 면역 전략이 개별 부채에 대해 수행된다는 점과 듀레이션 외에도 이자율의 변화량이 고려된다는 점에서 차이를 가지게 된다. 부분 면역 모델에서 사용하는 상수와 변수는

$I=\{1,2,\ldots,m\}$: 투자 가능 자산의 인덱스
$J=\{1,2,\ldots,n\}$: 부채의 현금흐름 인덱스
x_{ij} : 부채 현금흐름 $j\in J$를 면역하기 위해 $i\in I$ 자산에 투자된 금액 비율
L_j : 부채 현금흐름 $j\in J$의 현재가치 환산비율
$S=\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$: 자산의 만기 집합
$T=\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$: 부채 현금흐름의 만기 집합
D_i, D_j : 자산과 부채의 듀레이션, $i\in I$, $j\in J$
r_0 : 기준 이자율

으로 정의되며, 부분 면역 모델은 다음과 같이 정의된다.

[PIM]

Maximize $\quad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} D_i x_{ij} r_i \quad (11)$

subject to

$\sum_{i\in I} x_{ij} = L_j \quad$, for *all* $j\in J \quad (12)$

$\sum_{i\in I} x_{ij}\, D_i\frac{\partial f(r,t_i)}{\partial r} = L_j D_j\frac{\partial f(r,t_j)}{\partial r} \mid r=r_0 \quad$, for *all* $j\in J \quad (13)$

$x_{ij}\geq 0 \quad$, for *all* $i\in I$, $j\in J$

부분 면역 모델은 두 제약식이 부채 전체에 대해서가 아닌 부채의 현금흐름에 대해 적용된다는 점에서 전통적 면역모델과 차이를 가진다.

6. 모델의 적용 및 결과

본 실험의 목적은 과거 이자율 기록을 이용하여 전통적 면역 모델과 부분 듀레이션 모델을 수행하고 결과를 비교하여 부분 듀레이션 모델이 이자율 위험을 더 줄일 수 있음을 보여주는 것이다. 이를 위해, 다음과 같은 데이터와 실험방법을 제시한다.

6.1 데이터

실험에 사용된 데이터는 미국 연방준비제도이사회(FRB)에서 제공하는 재무부 채권의 이자율(Treasury Constant Maturity Rate)이다. 이 데이터는 3개월에서 30년 사이의 만기를 가지는 중도 상환이 없는 채권의 이자율이며, 82년 1월에서 99년 9월까지의 월간 데이터로 각각 3개월, 6개월, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20, 30년의 만기를 가진다. 본 논문에서는 보다 많은 만기를 가진 자산과 부채를 가지고 실험하기 위해 기존 10가지 만기의 데이터 이외에 1.5, 2.5, 4, 6, 8, 9, 15, 25년의 만기를 가지는 이자율을 기존 데이터의 선형조합을 이용하여 만들었다. 새로 만들어진 데이터는 실제의 데이터와 일치하지 않지만 생성된 데이터가 실제 데이터와 동일하다는 가정 하에서 실험하므로 자료변형은 실험의 결과에 영향을 주지는 않는다.

6.2 실험의 구성 및 과정

실험은 하나의 부채 포트폴리오에 대해 전통적 면역 모델과 부분 듀레이션모델 두 가지를 수행하여 그 결과를 비교하는 것이다. 신경망의 구성과 훈련은 MATLAB을 사용하였으며 면역 모델과 부분 면역 모델의 최적해를 구하는 것은 CPLEX를 이용하여 수행하였다.

기간구조를 나타내기 위한 신경망은 두 개의 은닉층(hidden layer)을 가진 다층 퍼셉트론(Multilayer perceptron : MLP)으로 모든 뉴론은 (0,1)사이의 값을 출력하는 단톡 연속 활동함수(unipolar continuous activation function)이다. 두 은닉층의 뉴론수는 반복 실험을 통해 각각 10개 8개로 결정하였으며, 신경망 훈련의 결과는 신경망의 출력과 기대값(desired output)의 차이와 계층 사이의 연결강도의 움직임에 대해 최소자승오차(least squared error)를 이용하여 검증하였다.

다양한 기간과 부채 형태를 대상으로 실험하기

위해 신경망의 훈련기간을 4가지로 나누었으며, 면역의 대상이 되는 부채 포트폴리오는 4년에서 25년 사이의 만기를 가지며, 현금흐름의 크기가 일정(Flat) , 점차 증가(Increase), 점차 감소(Decrease)하는 세 가지로 구성하였다. 주어진 세 가지 부채를 면역하는 자산은 앞서 설명한 3개월에서 30년에 이르는 18가지 만기를 가지는 중도상환이 없는 채권(no coupon bond)이다.

6.3 실험 결과

신경망의 훈련기간은 3~5년 사이가 가장 효율적으로 그 이상의 기간을 적용할 경우 데이터의 분산이 커 신경망의 수렴이 잘 이루어지지 않거나 지역최적(Local optimal)에 빠지는 경우가 발생한다. 표.1 과 표.2는 신경망의 훈련이 끝난 뒤 두 수리모델에 의해 구해진 최적해에 따라 1년, 5년, 10년의 세 가지 기간동안 투자한 결과 중 두 기간을 표로 나타낸 것이다. 표의 수치는 부채의 가치변화와 자산과 부채와의 차이를 나타내고 있으며, 마지막 두 열의 수치가 클수록 많은 투자이익을 얻음을 나타낸다. 그러나, 실험결과의 분석에 있어 중요한 것은 두 모델의 목표가 모두 "수익률이 얼마나 높은가 ?"에 대한 문제가 아니라 "얼마나 손해를 줄일 수 있느냐 ?"의 문제라는 것이다. 따라서, 하나의 모델이 보다 높은 수익률을 제시한다 하더라도, 다른 모델의 결과치가 영에 가깝다면 대상 부채가 잘 면역되고 있음을 나타낸다고 볼 수 있다.

표.1. 훈련기간 82.1 ~ 86.12

부채 종류	투자기간(년)	부채의 가치	부채와의 차이	
			PIM	IM
Flat	1	1.0688	-0.0004	-0.0059
	5	1.3968	0.0063	0.0181
	10	1.9423	-0.0273	-0.1003
Increasing	1	1.0701	-0.0024	-0.0058
	5	1.4038	0.0024	0.0114
	10	1.9580	-0.0077	-0.0951
Decreasing	1	1.0679	-0.0008	-0.0060
	5	1.3920	0.0097	0.0227
	10	1.9316	-0.0480	-0.1039

표.2. 훈련기간 84.1 ~ 88.12

부채 종류	투자기간(년)	부채의 가치	부채와의 차이	
			PIM	IM
Flat	1	1.0912	0	0
	5	1.5387	0	0.0017
	10	2.2007	-0.0408	0.0299
Increasing	1	1.0910	0	0.0001
	5	1.5434	-0.0002	0.00274
	10	2.2812	-0.0760	-0.0461
Decreasing	1	1.0914	0	0.0001
	5	1.5357	-0.0005	-0.0105
	10	2.1490	-0.0140	0.0193

4개의 훈련기간과 세 가지 부채종류에 대한 실험의 결과, 84~88년의 데이터로 훈련한 두개 항목을 제외한 모든 항목에서 부분 듀레이션이 더 나은 결과를 보여주고 있다. 따라서 부분 듀레이션 모델이 전통적 듀레이션 모델보다 부채를 더욱 잘 면역한다는 결론을 내릴 수 있었다.

7. 결론 및 추후연구

본 논문은 다음과 같은 장점을 가짐으로서 이전의 연구와 차별된다. 면역 모델의 단점인 평행 이동 가정을 없앨 수 있는 방법으로 기간구조 함수를 제안하였으며, 기간구조 함수는 이전까지 제안된 확장된 모델과 비교하여 보다 현실에 맞도록 정의되었다. 이와 같은 전략을 수행하는데 있어 함수를 정의하고 매개변수를 구하는 복잡한 과정을 거치는 대신 신경망을 이용하여 이를 손쉽게 구현하는 방법을 제시하였다. 또한 앞서 제시된 전략을 개별적인 부채의 현금흐름에 대해 분해하여 수행함으로서 보다 정확한 결과를 얻을 수 있도록 하는 효과를 가져오게 되었다.

그러나, 부분 듀레이션 모델은 전통적 모델과 마찬가지로 채권의 가치 변화의 볼록성(convexity)을 고려하지 못하고 있으며, 신경망의 구성과 훈련에 따라 결과에 차이를 보이므로 고차 미분의 도입과 같은 채권가치의 볼록성을 감안한 전략의 추가와 신경망에 대한 추가적 연구가 필요하다.

8. 참고문헌

1. McEnally, R. W , "Duration as a practical tool for bond management", *The Journal of Portfolio Management*, Summer, pp53-57, 1977
2. Hiller, R. S. and Schaack, C "A classification of structured bond portfolio modeling techniques", *Journal of Portfolio Management*, Fall, pp37-48, 1990
3. Reitano, R. R., "Non-Parallel Yield Curve shifts and Durational leverage", *The Journal of Portfolio Management*, Summer, pp62-67, 1990
4. Reitano, R. R., Non-Parallel Yield Curve shifts and Immunization, *The Journal of Portfolio Management*, Spring, pp36-43, 1992
5. Barber, J. R. and Copper, M. L., Immunization using principal component analysys, *The Journal of Portfolio Management*, Fall, pp99-105, 1996
6. Bierwag, G. O., Kaufman, G. G. and Latta, C. M., "Duration models : A taxonomy", *The Journal of Portfolio Management*, Spring, pp50-54, 1988
7. Dahl, H.,Meeraus, A. and Zenios, S. A., "Some financial optimization model. : I Risk Management", in Zenios (Eds), S. A. *Financial Optimization*. Cambridge Univ. Press, pp3-36, 1993
8. Bierwag,G., G. Kaufman, and A. Toevs ,"Immunization strategies for funding multiple liability", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.18, No.1 ,pp113-123, 1983
9. Stinchcombe, M. B., "Neural network approximation of continuous functionals and continuous functions on compactifications", *Neural Networks*, Vol.12, pp467-477, 1999
10. Zurada, J. M. Introduction to Artificial Neural Systems, PWS Publishing Company, 1995