

이항옵션가격모형의 허점 Pitfalls of the Binomial Option Pricing Model

김진욱

창원대학교 산업시스템공학과

Abstract

금융파생상품인 옵션의 가치평가를 이해하는 데 널리 사용되는 이항분포모형은 다음과 같은 특징을 가지는 것으로 알려져 있다. 첫째, 옵션의 가치는 주가의 상승 또는 하락할 확률과는 무관하게 결정된다. 둘째, 옵션의 가치는 투자자의 위험에 대한 태도와는 관계없이 결정된다. 이 논문에서는 옵션의 기초물인 주가가 한기간 후에 상승 또는 하락하는 기본모형에서 옵션의 가치평가가 주가의 변동 확률과 투자자의 위험에 대한 태도와 무관하지 않음을 예제를 통하여 밝히게 될 것이다.

1. 서론

1979년 Cox, Ross 와 Rubinstein(4)이 미분방정식에 의지하지 않고 쉽게 옵션의 가치를 계산하는 이항분포접근법을 제시하였다. 현재 대부분의 재무학 책들에서는 주가의 변동이 한번만 발생하는 단일기간에서 콜옵션의 가격이 결정되는 과정을 설명하고, 다수기간으로 확장하여 이항분포모형을 일반화하고 있다(1,2,3). 이 모형은 다음과 같은 특징을 갖고 있다. 첫째, 옵션의 가치는 주가의 상승 또는 하락할 확률과는 무관하게 결정된다. 이것은 투자자들이 옵션의 기초자산인 주식가격의 상승과 하락확률에 대해 서로 다른 기대를 가지고 있는 경우에도 옵션의 가격은 단일한 값으로 결정될 수 있음을 의미한다. 둘째, 옵션의 가치는 투자자의 위험에 대한 태도와는 관계없이 결정된다. 옵션의 가격결정은 투자자들이 부의 극대화를 추구하며 차익거래를 통한 이익의 실현이 불가능하다는 조건만으로 충분하며 투자자들의 위험회피도 등은 옵션가격에 영향을 미치지 않는다는 것이다.

옵션의 가격 결정에서 이런 특징이 적용된다면, 옵션의 가격은 기초자산인 주식 가격의 변동 가능성이나 투자자의 위험에 대한 성향에 관계없이

객관적으로 결정될 수 있다는 것으로 매우 중요한 일이다. 그러나, 불확실한 미래에 나타날 결과에 대해 불확실한 결과의 발생 가능성이나 투자자의 위험에 대한 성향에 상관없이 현재 그와 동등한 가치를 확실히 정할 수 있을까? 이 논문은 이항분포모형의 전개 과정에서 기초자산인 주식가격의 변동 확률과 투자자의 위험에 대한 성향이 배제되어서는 옵션의 가치가 결정될 수 없음을 보일 것이다. 즉, 주가가 한번만 변하는 단일기간 모형에서 기존의 이항분포모형에 허점이 내재되어 있음을 밝힐 것이다.

2. 본론

2.1 이항분포모형의 기본개념

이항분포모형의 기본개념은 주식가격이 한기간 후에 한번만 변동하는 것을 가정한다. 우선 다음과 같은 기호를 정의한다.

- S = 기초자산인 주식의 현재가격
- u = 한기간 후의 주가 상승율
- d = 한기간 후의 주가 하락율
- r = 무위험이자율
- q = 주가가 상승할 확률

1-q = 주가가 하락할 확률
 C = 기초자산을 근거로 하는 콜옵션의 가치
 E = 행사가격

한 투자자가 주식 1주를 매입하고 콜옵션을 m 단위 발행하여 포트폴리오를 구성한다고 하자. 한 기간 후 주가가 상승하면, 옵션을 구입한 다른 투자자는 상승한 주가((1+u)S)가 행사가격(E)보다 높다면 권리행사를 할 것이므로 옵션을 발행한 투자자는 (1+u)S-E 만큼의 손실을 입게된다. 표1은 주가 상승에 따른 콜옵션의 가치변화를 표시한 것이다.

<표1> 주가 변동에 따른 콜옵션의 가치변화

현재	한기간 후	
	주가 상승	주가 하락
C	$C_u = \text{Max}[0, (1+u)S - E]$	$C_d = \text{Max}[0, (1-d)S - E]$

이 포트폴리오의 현재가치와 한기간 후의 가치는 표2과 같게 된다.

<표2> 주가 변동에 따른 포트폴리오의 가치변화

포트폴리오	현재	한기간 후	
		주가 상승	주가 하락
주식 1주	-S	(1+u)S	(1-d)S
콜옵션 m단위	mC	-mC _u	-mC _d
합계	-S+mC	(1+u)S-mC _u	(1-d)S-mC _d

이 포트폴리오가 무위험하려면 주가가 상승하든지 하락하든지 그 가치가 일정하게 유지되어야하므로 (1+u)S-mC_u = (1-d)S-mC_d가 성립해야한다. 따라서, 해지비율 m은 다음과 같이 계산된다.

$$m = \frac{S(u+d)}{C_u - C_d}$$

균형시장하에서 재정이익이 존재하지 않으려면 무위험 포트폴리오의 수익률은 무위험이자율과 같아야하므로 다음과 같은 관계식이 성립해야한다.

$$(-S+mC)(1+r) + (1+u)S - mC_u = 0.$$

또는

$$(-S+mC)(1+r) + (1-d)S - mC_d = 0.$$

윗 식을 정리하면 콜옵션의 가치를 정할 수 있다.

$$C = \frac{C_u \frac{d+r}{u+d} + C_d \frac{u-r}{u+d}}{1+r}$$

예를 들어, 어떤 주식의 현재 가격이 10,000원이다.

한기간 후에 주가는 20% 상승하거나 20% 하락할 수 있으며, 그 확률은 각각 0.5이다. 이 주식을 기초자산으로 하는 콜옵션의 같은 한기간 후 행사가격은 10,000원이다. 무위험이자율은 10%이다. 이 콜옵션의 현재가치를 앞에서 설명한 이항분포모형으로 결정하면 다음과 같은 결과를 얻게된다.

$$\begin{aligned} C_u &= 2,000 \\ C_d &= 0 \\ m &= 2 \\ C &= 1,363.64 \end{aligned}$$

표3은 이 예제에서 구성되는 포트폴리오의 가치변화를 나타내고 있다. 주식 1주를 사고 콜옵션 2단위를 판매하면 7,273원을 투자하게되고, 한기간 후 주가의 상승이나 하락에 관계없이 8,000원의 수익을 올릴 수 있다. 만약 콜옵션의 가격이 1,364원보다 높게 정해진다면, 투자자는 콜옵션을 2단위 판매하고 10%의 무위험 이자율로 돈을 꾸어 이 콜옵션의 기초자산이 되는 주식을 1주 구입함으로써 한기간 후에 차용금에 대한 이자 10%를 지급하고도 이익이 남게된다.

<표3> 옵션발행 포트폴리오의 가치변화

포트폴리오	현재	한기간 후주가	
		주가 상승	주가 하락
주식 1주 구입	-10,000	12,000	8,000
콜옵션 2단위 매도	2,727	-4,000	0
합계	-7,273	8,000	8,000

그런데, 콜옵션을 구입하는 투자가 쪽에서도 이와 같은 가치변화가 일어난다. 앞에서 발행된 콜옵션을 2단위 구입하고, 기초자산인 주식 1주를 구매도하면 표4와 같은 변화가 일어난다. 이 경우에는 지금 7,273원의 수익을 올리지만 한 기간 후에 주가의 상승이나 하락에 관계없이 8,000원을 지불해야한다. 만약 콜옵션의 가격이 1,364원보다 낮게 정해진다면, 투자자는 주식 1주를 구매도하고 콜옵션을 2단위 구입함으로써 재정이익을 보게된다.

<표4> 옵션구입 포트폴리오의 가치변화

포트폴리오	현재	한기간 후	
		주가 상승	주가하락
주식 1주 구매도	10,000	-12,000	-8,000
콜옵션 2단위 구입	-2,727	4,000	0
합계	7,273	-8,000	-8,000

어느 경우이든 균형시장 하에서는 이런 재정이익이 존재할 수 없으므로 이 콜옵션의 매도자나 매수자는 그 가치를 1,364원으로 정하게된다는 것이 이항분포모형의 결론이다. 따라서, 이 모형의 중요

한 특징은 주식가격의 변동 확률과 투자자의 위험에 대한 성향은 콜옵션의 가치 결정에 아무런 영향을 끼치지 않는다는 것이다.

2.2 이항분포모형의 허점

2.2.1 기대이익 최대화 위배

이항분포모형은 무위험 포트폴리오를 투자자가 항상 구성할 수 있음을 전제로 하고 있다. 그러나 이것은 합리적인 투자자라면 부의 극대화를 추구한다는 원칙에 위배된다.

어떤 투자자가 표3처럼 옵션발행 포트폴리오(1주 구입, 2콜옵션 매도)를 구성하면, 7,273원을 투자하여 한기간 후에 확실히 8,000원을 회수하게된다. 그런데, 무위험 이자율이 10%이므로, 이 이자를 지급하는 곳에 7,273원을 투자해도 한기간 후에는 확실히 8,000원을 받을 수 있다. 그렇다면, 왜 이 투자자는 성과가 동일한 10%의 무위험 이자가 보장되는 상품이 있는 데도 번거롭게도 이런 포트폴리오에 투자를 하겠는가? 또, 표4처럼 옵션구입 포트폴리오(1주 구매도, 2콜옵션 매수)를 구성하면 성가신 상황이 심각하게 나타난다. 이 투자자는 지금 7,273원을 벌지만 한기간 후에 8,000원을 지불해야 한다. 따라서 이 투자자는 지금 번 돈 7,273원을 이자율이 10%인 다른 무위험 자산에 투자했다가 한기간 후에 원리금 8,000원을 받아 구매도한 주식을 청산해야 한다. 이 투자자는 수고스럽게도 많은 투자사업을 했지만 한 푼의 이익도 내지 못하였다. 이항분포모형에서는 모든 투자자가 이렇게 행동한다고 가정한 것이다.

이항분포모형으로 콜옵션의 가치를 정하는 것은 불확실한 투자자산을 무위험한 자산으로 만들어 주는 것이지 투자자가 투자를 위해 콜옵션의 가치를 평가하는 것은 아니다. 불확실한 자산에 절대로 투자하지 않으려는 극단적인 위험회피형 투자자는 이런 포트폴리오를 구성할 수도 있겠지만 그 외의 투자자들은 무위험 이자 이상의 수익을 기대할 수 없는 이 포트폴리오에 투자할 것이라고 보기는 어려운 일이다.

옵션의 가치 결정은 기대이익을 최대화하려는 투자자의 행동을 근거로 결정된다고 보아야한다. 주식의 가격 결정이 주식시장의 수요와 공급에 의해 결정되는 것처럼 옵션도 옵션시장의 수요와 공급에 의해 결정되는 것이다. 따라서 투자자의 위험에 대한 성향과 주가의 변동 가능성에 대한 투자자들의 예측은 옵션의 가격 결정에 영향을 주지 않고, 오직 주가의 변동폭에 따라서 결정된다는 이항분포모형은 허점을 지니고 있는 것이다.

2.2.2 콜옵션만의 가치결정 위배

이항분포모형은 콜옵션만의 가치를 결정하는

것이 아니라 포트폴리오에 포함된 다른 자산의 기대손실을 부담하고 있다.

앞의 예와 같은 포트폴리오를 위험중립형 투자자의 관점에서 살펴보자. 이 투자자는 구입할 주식의 한 기간 후 가치를 기대치인 10,000원으로 볼 것이다. 따라서, 지금 10,000원에 이 주식을 구입하지 않을 것이지만 지금 909원 또는 한기간 후에 1,000원의 보상이 있다면 두 시점의 주식은 무차별해진다고 볼 것이다. 이 투자자가 발행할 콜옵션 두 단위에 대해서는 한 기간 후에 기대치인 -2,000원으로 평가할 것이다. 그러므로, 지금 이 콜옵션 두 단위의 가격이 1,818원은 되어야한다고 판단한다. 그런데 이항분포모형에 의한 콜옵션의 두 단위의 가격은 2,727원이다. 이 콜옵션의 가격에는 위험중립형 투자자가 평가하는 콜옵션만의 가치 1,818원 외에도 1주의 보상 금액인 909원이 더 포함되어 있다. 따라서, 이항분포모형에 의한 콜옵션의 가치는 콜옵션 자신의 가치 외에도 무위험 포트폴리오를 구성하기 위해 구입할 주식의 기대 손실까지도 부담하고 있는 것이다. 즉, 이항분포모형에 의한 콜옵션의 가치 결정은 콜옵션만의 가치를 나타내는 것이 아니다.

이런 상황은 다음과 같은 극단적인 예에서 뚜렷하게 드러난다. 현재 주가가 10,000원이지만 다음 기간에 주가가 12,000원으로 상승하든지, 아주 적게 하락하여 10,000⁻이 될 수도 있다고 가정하자. 이항분포모형에 의하면 다음과 같은 결과를 얻게된다.

$$\begin{aligned} C_u &= 2,000 \\ C_d &\equiv 0 \\ m &\equiv 1 \\ C &\equiv 909 \end{aligned}$$

<표5> 옵션발행 포트폴리오의 가치변화

포트폴리오	현재	한기간 후주가	
		주가 상승	주가 하락
주식 1주 구입	-10,000	12,000	10,000 ⁻
콜옵션 1단위 매도	909	-2,000	0
합계	-9,091	10,000	10,000 ⁻

표5는 이 포트폴리오의 가치변화를 표시한 것이다. 합리적인 투자자라면 주식을 구입함으로써 2,000원의 수익을 기대할 수 있지만, 콜옵션을 매도하는 포트폴리오를 구성함으로써 오히려 이익을 포기하는 투자를 해야한다. 따라서, 합리적인 투자자라면 이런 포트폴리오를 구성하지는 않을 것이므로 콜옵션을 발행하지 않을 것이다.

3. 결론

불확실한 미래의 자산에 대한 정확한 가치를 아무도 알 수 없는 일이다. 옵션도 물론 불확실한 자산이다. 따라서, 옵션의 가격도 오직 신만이 알 수 있을 것이다. 미래의 불확실한 상황을 정확히 알 수 없으므로 이항분포모형의 허점을 수리적으로 증명하기는 어려운 일이다. 이 논문에서도 투자자들이 합리적인 투자를 한다면 이항분포모형에 의한 옵션의 가격결정은 많은 오류가 있음을 확인하였다.

이항분포모형으로 콜옵션의 가치를 정하는 것은 불확실한 투자자산인 주식과 옵션으로 무위험한 자산을 구성할 때 옵션이 가져야하는 가치를 반영하는 것이다. 따라서, 모든 투자자들이 무위험 자산에만 투자하고 무위험 이자 수익만으로도 만족한다면 이항분포모형으로 결정된 옵션의 가격에 동의할 것이다. 그러나 금융시장에서는 무위험 이자율 이상의 수익을 기대하고 투자활동을 하는 투자자들이 더 많을 것이다. 또한 이항분포모형에 의한 콜옵션의 가치는 콜옵션 자신의 가치 외에도 무위험 포트폴리오를 구성하기 위해 구입하는 주식의 기대 손실까지도 부담하고 있다. 즉, 이항분포모형에 의한 콜옵션의 가치 결정은 콜옵션만의 가치를 나타내는 것이 아니다.

주식을 기초자산으로 하여 파생되는 옵션도 주식처럼 불확실한 자산이므로 투자자들은 이 자산의 다음 기간 실현될 결과를 정확히 파악할 수 없을 것이다. 따라서 투자자들마다 미래의 결과치에 대한 예측을 다르게 함으로 투자자들은 그 가격도 다르게 판단하게 된다. 결국 금융시장에서 거래될 가격은 수요와 공급에 의한 시장 기능으로 결정될 것이다. 즉, 투자자의 위험에 대한 성향, 기초자산인 주가의 변동폭과 변동 확률에 대한 투자자들의 예측이 옵션의 가격 결정에 결정적인 영향을 주게 되는 것이다.

참고문헌

- [1] 강철준, 「금융선물·옵션거래」, 경문사, 1997.
- [2] 이필상, 정은호, 조한용, 「선물·옵션」, 법문사, 1999.
- [3] 최원근, 고종문, 소영일, 「금융옵션」, 박영사, 1999.
- [4] Cox J., S. A. Ross and M. Rubinstein, "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, Vol. 7. (Oct. 1979), pp.229~264.