대한산업공학회/한국경영과학회 2000 춘계공동학술대회 논문집. 2000년 4월 21-22일. 경남대학교
Session OB6.2

자동창고시스템의 성능평가를 위한 M/G/1 대기모형
M/G/1 Queueing Model for the Performance Estimation of AS/RS

이문환, 임시영, 허선, 이영해
한양대학교 산업공학과

Abstract

In general, Automated Storage/Retrieval Systems (AS/RS) have racks of equal sized cells to utilize the concept of unit-load. Most of the techniques for the performance estimation of a unit-load AS/RS are a static model or computer simulation. Especially, their models were developed under assumption that the Storage/Retrieval (S/R) machine performs only single command (SC) or dual command (DC). In reality, depending on the operating policy and the status of the system at a particular time, the S/R machine performs a SC or a DC, or becomes a idle. In order to resolve these weak points, we propose a stochastic model for the performance estimation of unit-load AS/RS by using a single-server queueing model. Expected numbers of waiting storage and retrieval commands are found

1. 서론

자동창고 시스템의 구성요소로는 하물을 저장하는 셀들로 구성되는 저장 랙 (Storage Rack)과 S/R (Storage and Retrieval) mackine인 스태커 크레인(Stacker Crane; S/C), 입출고 지점 (I/O point)으로 구성되며, 그 외의 설비로는 컨베이어, 지게차 등 입출하 장비와 기타 제어장치 및 컴퓨터 시스템 등으로 구성되어 있다. 자동창고는 처리하는 물품의 종류 및 크기와 요구되는 물동량에 따라 다양하게 구축하여 운영하고 있다. [1][2].

본 연구에서는 저장/불출 요구가 독립적으로 랜덤하게 발생하는 경우에, 저장/불출 요구가 대기하는 시간을 추정하기 위한 해석적인 방법을 연구한다. 이러한 해석적 방법을 이용하여 계획 단계에 있는 자동 창고 시스템이 생산율을 만족하는 경우에 얼마나 오래 대기해야함을 분석적으로 파악함으로써, 계획된 시스템이 실제적으로 사용 가능한지를 파악할 수 있다.

저장/불출 명령의 대기시간에 관한 추계론적(stochastic) 분석 방법에 대한 기존 연구로는 Lee 1997[3], Malmborg and Altassan 1997[4]등이 있다.

S/R 기계가 저장 혹은 불출 작업을 수행한 후, 또 다른 요구가 없을 경우에 S/R기계는 작업을 종료한 시점에서 다른 요구가 발생할 때까지 대기한다고 가정한다. 다시 말해 저장 단일 명령을 수행한 후 또 다른 요구가 (저장 혹은 불출) 없을 경우에 S/R 기계는 저장점 (storage point)에서 다른 요구가 발생할 때까지 대기한다. 한편 복수명령을 수행한 후 저장 혹은 불출요구가 없다면 S/R기계는 입고점에서 다른 요구가 발생할 때까지 대기한다.

이러한 S/R 기계의 거주점 정책(dwel point strategy)은 Bozer와 White(1984)[5]와 Egbelu와 Wu(1993)[6]에서 언급되었다. 한편 Bozer와 Cho(1998)[7]는 이러한 거주점 정책이 합리적이며, S/R기계가 항상 입고점에서 유휴상태가 되는 거주 정책에 비하여 나쁘지 않음을 컴퓨터 모의 실험을 통하여 입증하였다.

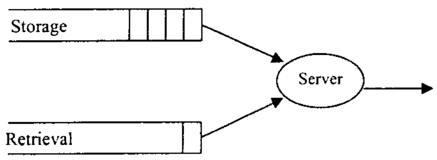
2. Model

2.1 가정 및 모델 설명

본 연구에서 제시하는 모형은 다음 <그림 1>과 같다. 각각 독립적으로 포아송 과정을 따르며 도착하는 storage 와 retrieval 명령은 각기 다른 대기공간에 대기하게 된다. 하나의 서비스 종료 후 하나의 대기공간에만 고객이 있으면 서버는 그 고객만을 서비스하게 된다. 그러나 서비스 종료 후 두 대기공간 모두에 고객이 있으면 다음 서비스는 두 대기 공간의 고객을 동시에 서비스하게 된다.

이와 같은 서비스 형태에서 하나의 명령을 서비스하게 되는 것을 single command, 두 가지를 동시에 서비스하게 되는 경우를 dual command라고 한다.

예를 들면 (storage queue, retrieval queue) = $(i+1,0)$이면 서버는 storage command를 서비스한다. 서비스 종료 후 도착 고객이 없다면 상태는 $(i,0)$이 된다. 반면에 서비스 중 j개의 retrieval command가 오면 서비스 종료 후 상태는 (i,j)가 된다. 이 후 다음 서비스는 storage와 retrieval command를 동시에 수행하기 때문에 서비스 중 도착 고객이 없다면 서비스 종료 후 시스템의 상태는 $(i-1,j-1)$이 된다.

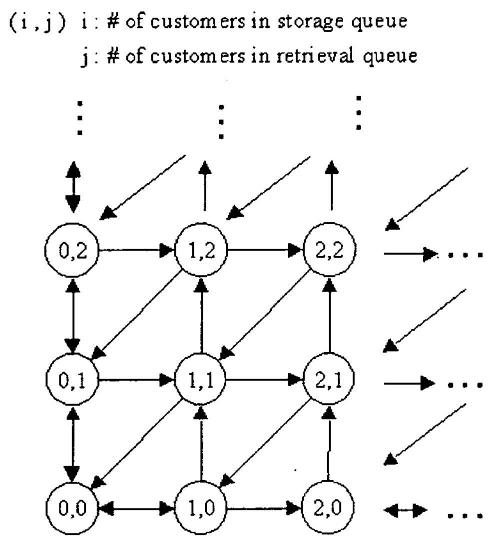


< 그림 1 > 시스템

본 시스템은 다음의 가정을 따른다.

(1) 두 가지 형태의 고객 도착 과정은 서로 독립이고 포아송과정을 따른다.
(2) 서비스는 서로 독립이고 동일한 분포를 따른다.
(3) dual command와 single command의 서비스는 동일한 분포를 따른다.
(4) 먼저 도착한 고객이 먼저 서비스를 받는 FCFS (First Come First Service)를 따른다.
(5) 서비스 종료 후 storage queue와 retrieval queue에 고객이 있으면 동시에 두 고객을 서비스한다.
(6) Storage와 retrieval 명령에 대해 각각의 대기공간을 두고 각 대기 공간의 용량은 무한하다.

위의 가정을 이용하여 시스템의 상태를 다이어그램으로 표시하면 다음 < 그림 2 >와 같다.



< 그림 2 > 시스템의 상태 다이어그램

< 그림 2 >에서와 같이 시스템의 상태는 2차원으로 되어 있으며 대각선을 중심으로 대칭적으로 되어 있다. 본 연구에서는 그 평균 대기 고객 수를 구하고자 한다.

2.2. 기호 설명

본 연구에서 사용하는 기호의 정의는 다음과 같다.

λ_1 : Storage Command의 도착률
λ_2 : Retrieval Command의 도착률
μ : 서비스율
$s(x)$: 서비스시간의 pdf
$S^*(\theta)$: 서비스시간의 L-T
$N_S(t)$: 시점 t 에서 Storage queue의 고객 수
$N_R(t)$: 시점 t 에서 Retrieval queue의 고객 수
$S_+(t)$: 시점 t 에서 잔여서비스시간의 확률변수
$Q_0(t) = \Pr(N_S(t)=0, N_R(t)=0, Server\ idle)$
$P_{i,j}(x,t)dx$

$$= \Pr(N_S(t)=i, N_R(t)=j, Server\ busy,\ x < S_+(t) \le x+dx), \quad i,j=0,1,2,\cdots$$

$$P_{i,j}(x)dx = \lim_{t\to\infty} P_{i,j}(x,t)dx$$

$$P^*_{i,j}(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta x} P_{i,j}(x)dx$$

2.3. 시스템 분석

위의 기호를 사용하여 시스템 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$0 = -(\lambda_1+\lambda_2)Q_0 + P_{0,0}(0) \tag{1}$$

$$-\frac{d}{dx}P_{0,0}(x) = -(\lambda_1+\lambda_2)P_{0,0}(x) + (\lambda_1+\lambda_2)Q_0 s(x) + (P_{2,0}(0)+P_{0,2}(0)+P_{1,1}(0))s(x) \tag{2}$$

$$-\frac{d}{dx}P_{i,0}(x) = -(\lambda_1+\lambda_2)P_{i,0}(x) + \lambda_1 P_{i-1,0}(x) + (P_{i+1,0}(0)+P_{i+1,1}(0))s(x) \qquad i\ge 1 \tag{3}$$

$$-\frac{d}{dx}P_{0,j}(x) = -(\lambda_1+\lambda_2)P_{0,j}(x) + \lambda_2 P_{0,j-1}(x) + (P_{0,j+1}(0)+P_{1,j+1}(0))s(x) \qquad j\ge 1 \tag{4}$$

$$-\frac{d}{dx}P_{i,j}(x) = -(\lambda_1+\lambda_2)P_{i,j}(x) + \lambda_1 P_{i-1,j}(x) + \lambda_2 P_{i,j-1}(x) + P_{i+1,j+1}(0)s(x) \qquad i,j\ge 1 \tag{5}$$

위 식 (1)~(5)의 상태방정식에 L-T를 취하면 아래와 같다.

$$0 = -(\lambda_1+\lambda_2)Q_0 + P_{0,0}(0) \tag{6}$$

$$\theta P^*_{0,0}(\theta) - P_{0,0}(0) = (\lambda_1+\lambda_2)P^*_{0,0}(\theta) - (\lambda_1+\lambda_2)Q_0 S^*(\theta) - (P_{1,0}(0)+P_{0,1}(0)+P_{11}(0))S^*(\theta) \tag{7}$$

$$\theta P^*_{i,0}(\theta) - P_{i,0}(0) = (\lambda_1+\lambda_2)P^*_{i,0}(\theta) - \lambda_1 P^*_{i-1,0}(\theta) - (P_{i+1,0}(0)+P_{i+1,1}(0))S^*(\theta), \quad i\ge 1 \tag{8}$$

$$\theta P^*_{0,j}(\theta) - P_{0,j}(0) = (\lambda_1+\lambda_2)P^*_{0,j}(\theta) - \lambda_2 P^*_{0,j-1}(\theta) - (P_{0,j+1}(0)+P_{1,j+1}(0))S^*(\theta), \quad j\geq 1 \tag{9}$$

$$\theta P^*_{i,j}(\theta) - P_{i,j}(0) = (\lambda_1+\lambda_2)P^*_{i,j}(\theta) - \lambda_1 P^*_{i-1,j}(\theta) - \lambda_2 P^*_{i,j-1}(\theta) - P_{i+1,j+1}(0)S^*(\theta) \quad i,j\geq 1 \tag{10}$$

다음과 같이 기호를 정의하자.

$$\overline{P^*}(z,w,\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} P^*_{i,j}(\theta)z^i w^j$$

$$\overline{P}(z,w,0) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{i,j}(0)z^i w^j$$

$$P^*(i,w,\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} P^*_{i,j}(\theta)w^j$$

$$P(i,w,0) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}(0)w^j, \qquad j\geq 0$$

$$P(z,j,0) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}(0)z^i, \qquad i\geq 0$$

위의 식 (6)~(10)의 L-T를 정리하면 아래와 같은 식이 된다.

$$(\lambda_1+\lambda_2 - \lambda_1 z - \lambda_2 w - \theta)\overline{P^*}(z,w,\theta) = \left(\frac{S^*(\theta)}{zw} - 1\right)\overline{P}(z,w,0) - \frac{S^*(\theta)}{zw}[(1-z)P(0,w,0) + (1-w)P(z,0,0) - (1-z)(1-w)P_{0,0}(0)] \tag{11}$$

위 식 (11)에 $\theta=\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1 z-\lambda_2 w$를 대입하면 아래의 식을 얻는다.

$$\overline{P}(z,w,0) = -\frac{S^*(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1 z-\lambda_2 w)}{zw - S^*(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1 z-\lambda_2 w)}[(1-z)P(0,w,0) + (1-w)P(z,0,0) - (1-z)(1-w)P_{0,0}(0)] \tag{12}$$

위 식 (12)를 식(11)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.
편의상 $\theta'=\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1 z-\lambda_2 w$라고 하자.

$$\overline{P^*}(z,w,\theta) = \frac{S^*(\theta') - S^*(\theta)}{(\theta'-\theta)(zw - S^*(\theta'))}[(1-z)P(0,w,0) + (1-w)P(z,0,0) - (1-z)(1-w)P_{0,0}(0)] \tag{13}$$

위 식 (13)은 storage queue 와 retrieval queue의 고객수와 잔여 서비스 시간의 결합 변환이다.
정의에 의해 위 식 (13)에 $\theta=0$을 대입하면 storage queue와 retrieval queue의 고객수에 대한 결합 분포를, $w=1, \theta=0$과 $z=1, \theta=0$을 대입하면 각각 storage queue의 고객수 분포와 retrieval queue의 고객수 분포를 구할 수 있다.
storage queue와 retrieval queue의 고객수에 대한 결합 분포의 pgf는 다음과 같다.

$$\overline{P^*}(z,w,0) = [S^*(\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-w)) - 1] / [(\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-w))(zw - S^*(\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-w)))] \cdot [(1-z)P(0,w,0) + (1-w)P(z,0,0) - (1-z)(1-w)P_{0,0}(0)] \tag{14}$$

마찬가지로 storage queue의 고객수 분포의 pgf는 다음과 같다.

$$\overline{P^*}(z,1,0) = \frac{S^*(\lambda_1(1-z)) - 1}{\lambda_1(z - S^*(\lambda_1(1-z)))}P(0,1,0) \tag{15}$$

마찬가지로 retrieval queue의 고객수 분포의 pgf는 다음과 같다.

$$\overline{P^*}(1,w,0) = \frac{S^*(\lambda_2(1-w)) - 1}{\lambda_2(w - S^*(\lambda_2(1-w)))}P(1,0,0) \tag{16}$$

위 식 (15), (16)에서 $P(1,0,0)$과 $P(0,1,0)$의 값은 정의에 의해 각각 $\sum_{i=0}^{\infty} P_{i,0}(0)$, $\sum_{j=0}^{\infty} P_{0,j}(0)$이다. 곧 위 $P(1,0,0)$와 $P(0,1,0)$의 값은 상수가 된다. 위 식 (15), (16)의 $\overline{P^*}(z,1,0)$과 $\overline{P^*}(1,w,0)$은 정의에 의해 각각 $z=1, w=1$을 넣었을 때의 값이 1 이 되어야 하므로 이로부터 우리는 상수인 $P(1,0,0)$, $P(0,1,0)$의 값을 계산할 수 있다.
곧 $P(1,0,0) = \frac{1}{E(S)} - \lambda_2$, $P(0,1,0) = \frac{1}{E(S)} - \lambda_1$이 된다.
위의 값들을 식 (15), (16)에 대입하면 storage queue와 retrieval queue의 고객수 분포를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\overline{P^*}(z,1,0) = \frac{S^*(\lambda_1(1-z)) - 1}{\lambda_1(z - S^*(\lambda_1(1-z)))}\left[\frac{1}{E(S)} - \lambda_1\right] \tag{17}$$

$$\overline{P^*}(1,w,0) = \frac{S^*(\lambda_2(1-w)) - 1}{\lambda_2(w - S^*(\lambda_2(1-w)))}\left[\frac{1}{E(S)} - \lambda_2\right] \tag{18}$$

위 식 (17), (18)은 각각 pgf이므로 이로부터 우리

는 각각의 평균값을 구할 수 있으며 그 값은 다음과 같다.

$$E(N_S) = \frac{\lambda_1^2 E(S^2)}{2\lambda_1 E(S)(1-\lambda_1 E(S))} \qquad (19)$$

$$E(N_R) = \frac{\lambda_2^2 E(S^2)}{2\lambda_2 E(S)(1-\lambda_2 E(S))} \qquad (20)$$

3. 고찰

본 연구에서는 저장·불출에 대한 요구의 도착이 각각 독립적인 포아송과정을 따르며 single command와 dual command에 대한 서비스율이 동일하다는 가정 하에 대기모형을 이용하여 AS/RS에서 storage queue와 retrieval queue의 대기 고객 수에 대한 확률 분포와 평균을 유도하였다. 기존 연구에서 시스템의 동적인 요소를 반영치 못한 단점을 보완함으로써 본 연구에서 제시한 모형은 AS/RS의 설계 대안 및 기존 시스템의 성능 평가시 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

4. 참고문헌

[1] Tompkins, J.A White, Y.A Bozer,E.H Frazelle,J.MA. Tanchoco, and J.Trevino, *Facilities Planning*, 2nd Edition, John Wiley and Sons, 1996.

[2] Mulcahy,D.E., *Warhouse Distribution and Operations Handbook*, McGraw-Hill,1994

[3] Lee, H.F., Performance analysis for automated storage and retrieval systems, *IIE Transactions, 29 (1),15-28*, 1997.

[4] Malmborg, C.J., and AlTassan, K.M., Approximating work cycle times in warehousing systems, *International Journal of Industrial Engineering, 4 (1) 12-23*, 1997.

[5] Bozer, Y.A., and J.A. White, Travel-Time Models for Automated Storage/Retrieval Systems, *IIE Transactions, 16 (4)*, 329-338, 1984.

[6] Egbelu, P.J., and C.-T. Wu, A comparison of dwell point rules in an autoamted strage/retrieval systems, *International Journal of Production Research, 31 (11)*, 2515-2530, 1993

[7] Bozer, Y.A., Cho, M.S., Centralized WIP storage and the stochastic analysis of automated storage/retrieval system, *INFORMS Meeting, Montreal, Canada, Apr. 26-29,* 1998