대한산업공학회/한국경영과학회 2000 춘계공동학술대회 논문집. 2000년 4월 21-22일. 경남대학교
Session OA2.3

작업자 및 회사의 이익이 최대가 되는 생산속도 분석

Analysis of Production speed of workers with maximum profit of workers and cooperators

이상복, 이재현, 성락근, 이승호, 이형규
서경대학교 산업공학과 대학원 및 물류대학원

Abstract

이 논문에선 작업자와 회사 모두 이익이 최대가 되게 작업자의 생산속도를 정하는 문제를 연구하였다. 작업자의 이익은 생산한 량에 비례하고, 불량률에 반비례한다. 회사의 이익은 작업자의 생산량에 비례하고 작업자의 불량품만큼 감소한다. 또한 회사에서는 검사 등에 비용이 들어간다. 이 논문에서는 작업자의 이익을 나타내는 함수를 수식으로 모델링하였다. 또한 회사의 이익을 수식으로 표현하였다. 작업자와 회사 모두가 최대 이익을 갖는 경우의 생산속도를 해석적으로 여러 경우로 나누어 해를 구하였다.

Key word : 생산속도, 작업자 이익, 회사 이익

1. 서론

본 논문에서는 작업자와 회사의 이익을 최대로 하는 생산속도를 결정하는 문제에 대하여 연구하였다. 본 주제는 오랫동안 관심 있는 주제로 다양한 기본 가정에 따라 다루어져 왔다. 본 논문에서는 작업자의 이익은 생산량(즉 생산속도)에 따라 보수를 받는다고 가정하였다. 작업자의 생산속도가 높아지면 불량률도 증가한다. 불량품에 대해선 작업자의 이익은 감소하기 때문에, 작업자의 이익은 생산속도와 불량률과의 관계를 고려하여 정해야 한다. 회사의 이익은 작업자의 생산량에 비례하나, 작업자의 불량품만큼은 이익에서 제해야 한다. 또한 회사는 불량품을 검사하기 위한 검사 장비 등 관리비용이 들어간다. 이들 관리비용은 생산량이 증가하면 증가한 만큼 줄어들게 된다. 작업자와 회사가 동시에 이익이 최대가 되는 경우의 생산속도는 결정 문제가 본 논문의 주제이다.

2. 작업자 및 회사의 동시 이익되는 모델 식 구축

2.1 작업자의 이익

이 모델에선 작업자의 보수가 작업자의 양품 생산량에 따라 지급된다고 가정한다. 작업자는 더 많은 보수를 위하여 제품을 많이 생산하려고 한다. 생산속도가 빨라지면 불량률도 증가하게 된다. 불량품은 회사에 손해를 끼치게 되므로 작업자에게도 일정액의 불량 비용을 물린다. 작업자의 생산품 중에는 고의적이든 아니든 숨겨진 불량품이 있을 수 있다.

작업자는 고의적으로 태만하거나 거짓말을 시키지 않는다고 가정할 때, 작업자의 생산속도에 따른 불량비율을 식으로 정확하게 세우는 것은 쉽지 않다. 생산속도가 증가함에 따라 불량비율은 증가된다고 생각할 수 있다. 다음 식같이 생각할 수 있다.

$$p = f(x) \tag{1}$$

생산속도를 x라 할 때, 불량률 p는 정비례관계의 함수이다.

생산속도가 느릴 때 불량률은 거의 없게된다. 생산속도가 일정한 점(작업자 개인에 따라 다르다) 이상의 속도를 나타내면 불량률 발생 비율은 증가한다. 생산속도가 너무 빠르면 불량률 비율은 급격하게 증가한다.

불량률이 생산속도에 일정한 함수로 발생한다고 가정하면 다음과 같은 식을 생각할 수 있다. 불량율 함수 $f(x)$라 할 때, 함수를 정확히 밝힐 수 없기 때문에 테일러 함수를 이용하면,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{f^3(x_0)}{3!}x^3 + \tag{2}$$

$f(x)$는 증가함수이므로, 계수 a_i가 양수인 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \qquad (3)$$

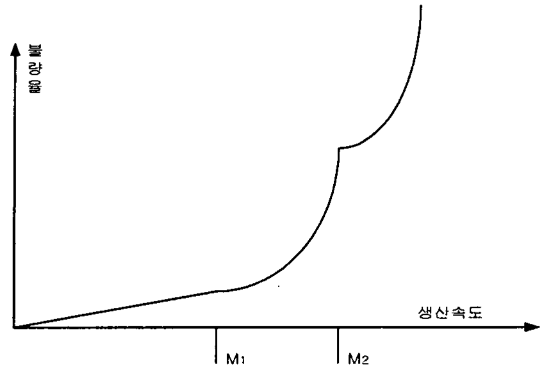
$x = 0$에서 불량율은 0이고, x의 값을 작게 잡으면 3차식 이상은 오차항으로 무시한다.
위 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 \qquad (4)$$

이상을 종합하면 다음과 같이 된다.

$$f(x) = \begin{array}{ll} a_0x & 0 < x \le M_1 \\ a_1x + a_2x^2 & M_1 < x \le M_2 \\ a_3x + a_4x^2 & M_2 < x \end{array} \qquad (5)$$

모든 상수는 양수이고, $a_0 \ll a_1 \ll a_3$, $a_2 \ll a_4$이다.
이를 그림으로 그리면, 다음과 같다.



[그림 1] 불량함수

작업자의 이익은 생산품에 대한 보상에서 불량품에 대한 벌금을 제외한 것이다. 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$Max\ c_1x - c_2f(x)x \qquad (6)$$

c_1은 작업자의 생산량에 대한 임금이고, c_2는 불량품에 대한 벌금이다.

2.2 회사의 이익

회사는 불량품이 소비자에게 넘겨졌을 때, 회사에 치명적인 이미지 손실을 입으므로 철저한 검사를 한다. 철저한 검사를 위해서 값비싼 검사기기를 설치한다.
회사의 이익은 양품 생산금액에서 불량품으로 인한 손해를 제외한다. 검사를 위한 투자비, 회사의 고정비 등은 생산품에 반비례한다.
회사의 이익을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$Max\ d_1x - d_2f(x)x - \frac{d_3}{x} \qquad (7)$$

d_1은 양품생산량에서 생기는 이익이고, d_2는 불량품으로 생기는 손해금액이고, d_3는 검사를 위한 투자비 기타 관련된 고정비 등을 통합한 것이다.

작업자와 회사의 이익되는 식은 위 두식을 묶는 것이다.

$$Max\ g(x) = (d_1 + c_1)x - (d_2 + c_2)f(x)x - \frac{d_3}{x} \qquad (8)$$

위 식의 최대값을 구하는 방식은 $f(x)$에 따라 3가지로 나누어 분석한다.

1) $x \le M_1$일 때. 즉 $f(x) = a_0x$을 만족한다.

$$g(x) = (d_1 + c_1)x - a_0(d_2 + c_2)x^2 - \frac{d_3}{x}$$ 의

최대값을 구하는 문제이다.

$$g'(x) = (d_1 + c_1) - 2a_0(d_2 + c_2)x + \frac{d_3}{x^2} \qquad (9)$$

의 해는 $x > 0$이므로,

$-2a_0(d_2 + c_2)x^3 + (d_1 + c_1)x^2 + d_3 = 0$를 풀면 된다.

식 (9)의 해는 $x > 0$이므로,

$$g'(x) = -2a_0(d_2 + c_2)x^3 + (d_1 + c_1)x^2 + d_3 = 0 \qquad (11)$$

식 (11)를 풀면 된다.

$a_0(d_2 + c_2) \neq 0$이므로, 위식은 다음식으로 바꾼다.

$$x^3 - \frac{(d_1 + c_1)}{2a_0(d_2 + c_2)}x^2 - \frac{d_3}{2a_0(d_2 + c_2)} = 0 \qquad (12)$$

위식의 계수가 복잡하므로 다음과 같이 치환한다.

$$-3A_1 = \frac{(d_1 + c_1)}{2a_0(d_2 + c_2)},$$

$$-A_2 = \frac{d_3}{2a_0(d_2 + c_2)}$$

$$x^3 + 3A_1x^2 + A_2 = 0 \qquad (13)$$

식 (13)는 3차식의 해법으로 풀기 위하여 아래 식

(14)와 같이 변환할 수 있다.

$$(x+k)^3+3A_3(x+k)+A_4=0 \qquad (14)$$

$$x^3+3kx^2+3k^2x+k^3+3A_3x+3A_3k+A_4=0$$

$$x^3+3kx^2+3(k^2+A_3)x+3A_3k+k^3+A_4=0$$

식 (13)와 식 (14)는 같은 식이므로, 각 계수는 같다.

$$k=A_1,\ A_3=-k^2=-A_1^2\ ,\quad A_4=2k^3=2A_1^3$$

식 (14)의 $x+k=X$로 치환하면 식 (15)이 된다.

$$X^3+3A_3X+A_4=0 \qquad (16)$$

$\alpha+\beta=-A_3,\quad \alpha\cdot\beta=-A_4^3$로 치환할 때,

$t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\cdot\beta=0$ 의 해 $t=\alpha,\ \beta$이므로,

$$t=\frac{(\alpha+\beta)\pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\cdot\beta}}{2}=\frac{-A_3\pm\sqrt{A_3^2+4A_4^3}}{2}$$

α,β의 값은 $\dfrac{-A_3\pm\sqrt{A_3^2+4A_4^3}}{2}$ 이 된다.

식 (15)의 계수를 α,β로 대입하면 식 (16)이 된다.

$$X^3-3\sqrt[3]{\alpha^3}\sqrt{\beta}X-(\alpha+\beta)=0 \qquad (15)$$

$A_5=\sqrt[3]{\alpha},\quad A_6=\sqrt[3]{\beta}$ 라 하면 식 (15)

$$X^3-3A_5A_6X-(A_5^3+A_6^3)=0 \qquad (16)$$

$$X^3-3A_5A_6X-(A_5+A_6)(A_5^2-A_5A_6+A_6^2)=0$$

$$[X-(A_5+A_6)][X^2+(A_5+A_6)X+(A_5^2-A_5A_6+A_6^2)]=0$$

$$X=A_5+A_6,-\frac{(A_5+A_6)\pm\sqrt{-3(A_5+A_6)^2}}{2}$$

식 (14)의 해는 $x=X-k$로 구한다. 근 3개중 제일 큰 수를 x^*라 하자.

식 (11)의 3차식의 계수가 음수이고, $x=0$근처에서는 양수이므로 0부터 근 3개중 제일 큰해 까지는 증가함수이다. 근 3개중 제일 큰 수를 x^*라 하면, $x^*<M_1$에서는 최대값은 x^*가되고, $x^*\geq M_1$에서 최대값은 $x=M_1$이 된다. (i) $x^*<M_1$이라면, 최대값은 $x=x^*$인 $g(x^*)$이 된다.

(ii) $x^*>M_1$이라면, 최대값은 $x=M_1$인 $g(M_1)$이 된다.

2) $M_1<x\leq M_2$일 때, $f(x)=a_1x+a_2x^2$을 만족한다.

$$g(x)=(d_1+c_1)x-(a_1x+a_2x^2)(d_2+c_2)x-\frac{d_3}{x}$$
$$=(d_1+c_1)x-(d_2+c_2)a_1x^2-(d_2+c_2)a_2x^3-\frac{d_3}{x}$$

$$g(x)=(d_1+c_1)x-(a_1x+a_2x^2)(d_2+c_2)x-\frac{d_3}{x}$$
$$=(d_1+c_1)x-(d_2+c_2)a_1x^2-(d_2+c_2)a_2x^3-\frac{d_3}{x}$$

$g(x)$는 4차식으로 일반적인 해법이 없기 때문에 $g_1(x)$, $g_2(x)$식으로 분해하여 해법을 찾는다.

$$g_1(x)=(d_1+c_1)x-(d_2+c_2)a_1x^2-(d_2+c_2)a_2x^3 \quad ,$$

$g_2(x)=\dfrac{d_3}{x}$ 로 놓는다.

$$g(x)=g_1(x)-g_2(x)$$

$g_1(x)=-x(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면, 해 α, β는 $\beta<0<\alpha$ 부등식을 만족하고 다음과 같다.

$$\alpha=\frac{-(d_2+c_2)a_1+\sqrt{(d_2+c_2)^2a_1^2+4(d_1+c_1)(d_2+c_2)a_2}}{2(d_2+c_2)a_2}$$

$$\beta=\frac{-(d_2+c_2)a_1-\sqrt{(d_2+c_2)^2a_1^2+4(d_1+c_1)(d_2+c_2)a_2}}{2(d_2+c_2)a_2}$$

i) $\alpha\leq M_1$일 때 : $g(x)$가 최대가 되는 때는 $x=M_1$이다.

$x\geq M_1$에서 $g_1(x)$함수는 감소폭이 큰 감소함수이고, $g_2(x)$함수는 감소폭이 작은 감소함수이므로, x의 범위에서 가장 작은 $x=M_1$일 때가 최대이다.

ii) $M_1\leq\alpha<M_2$일 때 : $g(x)$가 최대가 되는 때는 $x=\alpha$이다.

$$\begin{aligned}\Delta g(x)&=g(x)-g(x+\Delta x)\\&=-a\Delta x+b\Delta x\cdot x+b\Delta x^2+3c\Delta x\cdot x^2+3c\Delta x^2\cdot x+c\Delta x^3-\frac{d\Delta x}{x(x+\Delta x)}\\&=[b\Delta x\cdot x+b\Delta x^2+3c\Delta x\cdot x^2+3c\Delta x^2\cdot x+c\Delta x^3]-[a\Delta x+\frac{d\Delta x}{x(x+\Delta x)}]\\&=\Delta x\{[bx+b\Delta x+3cx^2+3c\Delta x\cdot x+c\Delta x^2]-[a+\frac{d}{x(x+\Delta x)}]\}\end{aligned}$$

$x\gg\Delta x$일 때는 전반부(+부분)이 후반부(-부분)보다 크기 때문에 $\Delta g(x)$는 양수이다.

즉 $x=\alpha$일 때 $g(x)$가 최대값을 갖는다.

iii) $M_2\leq\alpha$일 때 : $g(x)$가 최대가 되는 때는

$x = M_2$이다.

$0 \le x \le \alpha$에서 $g_1(x)$함수는 증가함수이고, $g_2(x)$함수는 감소폭이 큰 감소함수이므로, x의 범위에서 $x = M_2$일 때가 최대이다.

3) $M_2 < x$일 때, $f(x) = a_3 x + a_4 x^2$을 만족한다.

$$g(x) = (d_1 + c_1)x - (a_3 x + a_4 x^2)(d_2 + c_2)x - \frac{d_3}{x}$$

$$= (d_1 + c_1)x - (d_2 + c_2)a_3 x^2 - (d_2 + c_2)a_4 x^3 - \frac{d_3}{x}$$

(위의 2 해법과 같은 방법으로)

$\alpha = \frac{-(d_2 + c_2)a_3 + \sqrt{(d_2 + c_2)^2 a_3^2 + 4(d_1 + c_1)(d_2 + c_2)a_4}}{2(d_2 + c_2)a_4}$라 놓으면

i) $\alpha \le M_2$일 때, 최대값은 $x^* = M_2$가 된다.

ii) $M_2 < \alpha$일 때, 최대값은 $x^* = \alpha$이다.

3. 결론

본 논문에서 우리는 작업자와 회사의 이익을 최대로 하는 생산속도를 결정하는 문제에 대하여 연구하였다. 작업자의 이익과 회사의 이익을 수식으로 표현하여 작업자와 회사가 동시에 이익이 최대가 되는 경우를 수식으로 모델링하였으며, 계수값에 따라 변하는 달라지는 경우에 대하여 각각 문제를 풀었다.

현장의 실제 계수값을 구하여 제시된 해법을 현장에 적용시키는 것이 앞으로 남은 문제점이다.

참고문헌

[1] 김창현, 홍유신, "품질 불량을 고려한 최적 검사계획 및 생산시간 결정", 대한산업공학회지, 23, 2, 1997, pp261-273

[2] 이상복 "JIT를 적용하는 대기업에 납품하는 중소기업의 재고 및 검사비용 분석", 서경대학교 산업기술연구소, 4권 1999

[3] 황학, 작업관리, 영지문화사, 서울. 1998