

추정상관값을 이용한 가변 스텝사이즈 LMS 알고리즘에 관한 연구

권 순 용, 오 신 범, 이 채 옥
대구대학교 정보통신공학과
전화 : 053-850-4403 / 핸드폰 : 017-813-0128

A Study on Variable Step Size LMS Algorithm using estimated correlation

Soon Yong Kwon, Shin Bum Oh, Chae Wook Lee
Dept. of Computer and Communication Engineering, Taegu University
E-mail : kwonsy@taegu.ac.kr

Abstract

We present a new variable step size LMS algorithm using the correlation between reference input and error signal of adaptive filter. The proposed algorithm updates each weight of filter by different step size at same sample time.

We applied this algorithm to adaptive multiple-notch filter. Simulation results are presented to compare the performance of the proposed algorithm with the usual LMS algorithm and another variable step algorithm.

I. 서론

LMS 알고리즘은 그 수식의 간단성과 적은 계산량으로 인해 널리 사용되고 있는 적응신호처리 알고리즘 중의 하나이다[1,2]. 그러나 LMS 알고리즘은 수렴속도 및 수렴 후 오차를 결정하는 적응상수 μ 의 크기에 따른 수렴속도와 misadjustment간의 tradeoff의 문제가 있고, 입력신호에 대한 사전정보가 없으면 적응상수의 값을 적절히 선택하는 것이 어렵다는 단점이 있다[3]. 이러한 문제점을 보완하기 위하여 시간에 따라 적응상수의 크기를 가변시켜 수렴 초기에는 큰 적응상수로

빠른 수렴이 가능하도록 하고 점차 적응상수의 크기를 줄여서 misadjustment도 줄이는 가변스텝사이즈 LMS (VSS LMS : Variable step size LMS) 알고리즘이 사용되고 있다. 그러나 VSS LMS 알고리즘의 경우에도 적응상수 μ 의 값은 평균자승오차(MSE: mean square error)의 값에 따라서 커지거나 작아지는 스킴라이고 필터의 계수(weight)는 일반적으로 벡터이기 때문에 각각의 스텝에서 필터의 모든 계수를 동일한 적응상수를 이용하여 update하게 된다. 따라서 각 계수의 update에 최적의 적응상수를 사용한다고 보기는 어렵다.

본 논문에서는 LMS 알고리즘에서 적응필터의 참조 입력과 에리신호사이의 상관관계가 점점 0으로 수렴해간다는 점에 착안하여 필터의 참조입력과 에리신호의 추정상관(estimated correlation)을 이용, 적응상수를 벡터로 한 상관추정 가변스텝사이즈 알고리즘을 제안하였다. 그리고 이를 여러 개의 협대역 간섭을 제거하는 필터인 adaptive multiple-notch filter에 적용하여 고정 적응상수를 갖는 LMS 알고리즘 및 VSS LMS 알고리즘보다 신호대 잡음비 및 수렴 후 안정성 면에서 우수함을 입증하였다.

II. Adaptive multiple-notch filter

2.1 Adaptive multiple-notch filter의 구조

특정한 신호에 포함된 협대역 간섭을 제거하는 필터를 노치필터라고 한다[4]. 기본적인 적응 노치 필터가 하나의 주파수 혹은 협대역 간섭만을 제거하는데 비해 이를 병렬로 접속하여 참조 입력을 복수로 하면 복수의 협대역 간섭을 제거할 수 있다[5]. 즉 필터의 참조 입력을 n개로 하면 필터의 입력은 2n개가 되고 n개의 협대역 간섭이 제거될 수 있는 구조로 된다. 이렇게 참조입력을 복수로 하여 여러 개의 협대역 간섭을 제거할 수 있도록 구성된 적응 노치필터를 adaptive multiple-notch filter 혹은 multi-reference adaptive notch filter라 한다. 그림 1은 adaptive multiple-notch filter의 구조이다.

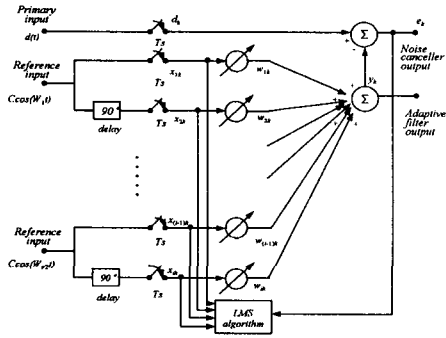


그림 1. Adaptive multiple-notch filter의 구조

그림 1에서 제거할 협대역 간섭에 대한 참조입력과 LMS 알고리즘에 의해 가변되는 필터의 계수들은 각각 다음과 같다.

$$X_k = [x_{0k} \ x_{1k} \ \dots \ x_{Lk}]^T \quad (1)$$

$$W_k = [w_{1k} \ w_{2k} \ \dots \ w_{ik}]^T \quad (2)$$

적용필터의 출력 y_k 는

$$y_k = X_k^T W_k = W_k^T X_k \quad (3)$$

가 되어 LMS 알고리즘의 적응과정에서 원시입력에 포함된 노이즈 성분과 같아지게 되고 결국 잡음제거기의 출력 e_k 는 원신호 성분만 남게 된다.

$$\begin{aligned} e_k &= d_k - y_k \\ &= d_k - X_k^T W_k \\ &= d_k - W_k^T X_k \end{aligned} \quad (4)$$

필터계수의 update과정은

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu e_k X_k \quad (5)$$

이고 여기서 μ 는 수렴속도 및 수렴 후 오차를 결정

하는 적응상수이다. 계수가 최적으로 수렴하기 위한 μ 의 범위는 아래와 같다.

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad (6)$$

여기서 λ_{\max} 는 입력상관행렬 R 의 최대 고유치(eigen value)이고 R 은 다음과 같이 정의된다.

$$R = E[X_k X_k^T] \quad (7)$$

위의 (6)식에서 볼 수 있듯이 LMS 알고리즘은 적응도중에 항상 고정된 적응상수 μ 값을 사용한다. 따라서 μ 값이 클 때는 적응속도는 빠르나 적응 후의 안정성이 떨어져 misadjustment가 크고 반대로 μ 값이 작으면 적응 후의 misadjustment가 작아서 안정성은 좋으나 적응속도가 느리게 되는 tradeoff의 문제가 발생하게 된다. 그러므로 시스템에 따라 적응속도와 수렴 후 안정성을 적절히 안배한 적응상수 값을 사용하지만 이 또한 입력신호에 대한 사전정보가 없으면 적응상수의 값을 적절히 선택하는 것이 어렵다는 문제점이 있다.

2.2 VSS LMS 알고리즘

가변 스텝사이즈 LMS(VSS LMS : Variable Step Size LMS) 알고리즘은 위에서 서술한 LMS 알고리즘의 문제점을 보완하기 위한 알고리즘이다[6]. VSS LMS 알고리즘에서는 시간에 따라 적응상수의 크기를 가변시켜 수렴 초기에는 큰 적응상수로 빠른 수렴이 가능하도록 하고 점차 적응상수의 크기를 줄여서 misadjustment도 줄이는 방법으로 성능의 향상을 꾀한다. VSS LMS 알고리즘은 아래의 식으로 요약할 수 있다.

$$\mu_{k+1} = a \mu_k + \gamma e_k^2, \text{ where } \begin{matrix} 0 < a < 1 \\ \gamma > 0 \end{matrix} \quad (8)$$

$$\mu_{k+1} = \begin{cases} \mu_{\max} & \text{if } \mu_{k+1} > \mu_{\max} \\ \mu_{\min} & \text{if } \mu_{k+1} < \mu_{\min} \\ \mu & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

적용상수 μ 의 초기값은 μ_{\max} 값을 사용하며 μ_{\max} 는 다음의 식으로 정의된다.

$$\mu_{\max} = \frac{2}{3tr(R)} \quad (10)$$

원하는 수준의 성능을 얻기 위하여 a , γ , μ_{\min} 의 값은 시스템에 따라 적절하게 정하게 된다. 식에서 볼 수 있듯이 VSS LMS 알고리즘은 오차 신호의 제곱에 따라서 적응상수 μ 의 값이 변화된다. VSS LMS 알고리즘의 경우 LMS 알고리즘의 문제점을 상당부분 보완했지만 결정할 파라미터가 3개(a , γ , μ_{\min})로 너

무 많다든 단점이 있다. 그리고 대부분의 경우 적응필터의 계수가 벡터인데 반해서 적응상수는 여전히 스칼라이기 때문에 모든 계수를 각각의 시간에서 동일한 적응상수를 이용하여 update 하게된다. 그러므로 계수를 update 하는데 있어서 최적의 적응상수를 사용한다고 보기는 어렵다.

III. 제안 알고리즘

본 논문에서는 LMS와 VSS LMS 알고리즘의 문제점을 보완하기 위하여 입력신호 x_k 와 오차신호 e_k 의 추정된 상관(estimated correlation)을 이용하여 적응상수의 값을 변화시키는 상관추정 LMS 알고리즘을 제안한다. 상관추정 가변스텝사이즈 알고리즘은 벡터인 계수를 수정하는데 있어서 마찬가지로 벡터인 적응상수를 사용하기 때문에 계수 update에 사용되는 적응상수가 각 계수에 따라 적당한 값으로 조정되므로 LMS 알고리즘 및 VSS LMS 알고리즘 보다 뛰어난 성능을 나타낸다. 여기서 추정된 상관이라고 명칭한 이유는 X, Y를 서로 다른 두 개의 신호라고 할 때, 원래 상관이라 함은 $E[XY]$ 를 의미하지만 본 논문에서는 신호 전체가 아닌 각각의 샘플링타임까지의 상관값을 사용하는 순시치(instantaneous)의 의미가 있기 때문이다.

적용 노치필터에서 필터에 입력되는 참조신호는 원시 입력에 포함된 잡음신호와 상관관계이다. 그러므로 adaptive process의 초기상태에서 x_k 와 e_k 는 큰 상관을 가진다. 그러나 적응 과정이 진행됨에 따라서 e_k 에서 잡음성분은 점점 제거된다. 따라서 x_k 와 e_k 의 상관은 점점 0으로 수렴하게 된다. 즉 정상상태(steady state)에서 x_k 와 e_k 의 상관을 τ 라고 하면 다음과 같다.

$$\tau = E[x_{i,\infty} e_{\infty}] = 0, \text{ where } i = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

여기서 i 는 필터의 차수이다. 이러한 성질을 이용하여 식 (12), (13)으로 정의되는 상관 추정 LMS 알고리즘을 제안한다.

$$\Psi_{i,k} = \Psi_{i,k-1} + x_{i,k} e_k \quad (12)$$

where $\Psi_{i,0} = 0 \quad i, k = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{cases} \mu_{i,k} = \frac{\alpha}{k} \Psi_{i,k} \\ \mu_{i,k} = \mu_{\min}, \text{ if } \mu_{i,k} < \mu_{\min} \end{cases} \quad (13)$$

k 는 샘플링 타임이고 α 는 적응 상수의 값이 0과 1사이의 값을 갖도록 하는 scaling factor이다. 제안한 알고리즘을 이용해서 계수를 update하는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w_{1,k+1} &= w_{1,k} + 2\mu_{1,k} e_k x_{1,k} \\ w_{2,k+1} &= w_{2,k} + 2\mu_{2,k} e_k x_{2,k} \\ &\vdots \\ w_{i,k+1} &= w_{i,k} + 2\mu_{i,k} e_k x_{i,k} \end{aligned} \quad (15)$$

식에서 알 수 있듯이 상관 추정 LMS 알고리즘은 상관도가 변함에 따라서 적응상수의 값을 가변시키고 또한 각각의 참조신호와 오차신호 사이의 상관값을 사용하기 때문에 적응상수가 벡터의 형태가 된다. 따라서 각 계수들을 update하는데 있어서 계수마다 적절한 적응상수를 이용하게 되어 시스템의 성능을 향상시킬 수 있다. 그리고 VSS LMS 알고리즘에 비해서 정해줘야 하는 파라미터의 수가 α 와 μ_{\min} 의 두 개이므로 적당한 적응 상수의 값을 찾기가 훨씬 수월해진다.

IV. 시뮬레이션 및 고찰

실험은 제안하는 상관 추정 LMS 알고리즘을 adaptive multiple-notch filter에 적용하고 신호대 잡음비 및 MSE를 다른 알고리즘과 비교하는 방식으로 진행하였다. 샘플수는 10,000개를 사용하였고 adaptive multiple-notch filter는 그림 2와 같이 2개의 현대역 간섭을 제거할 수 있도록 필터의 차수가 4차인 구조를 사용하였다.

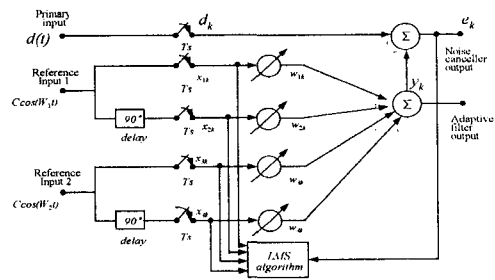


그림 2. 4차 adaptive multiple-notch filter의 구조

표 1,2,3은 각각의 알고리즘에서 주어진 파라미터를 변화시켜가며 비교해본 필터의 성능이다. 표에서 음영 처리된 부분은 해당 알고리즘에서 최고의 신호대잡음비를 보일 때를 나타낸 것이다. 그리고 그림 3,4,5는 최고의 신호대잡음비일 때의 MSE 수렴곡선이다.

적용상수 μ	0.001	0.0015	0.0025	0.0026	0.0027	0.004	0.005
출력 SNR(dB)	7.1089	8.3073	9.0918	9.0993	9.0979	8.5305	7.7734
excess MSE	0.9616	0.673	0.5705	0.5762	0.5839	0.8143	1.1065
최소 MSE	6.7563						
Misadjustment	0.1423	0.0996	0.0844	0.0853	0.0864	0.1205	0.1638
수렴구간	5000/ -13dB	3500/ -10dB	1800/ -6dB	1500/ -6dB	1500/ -6dB	1000/ -2dB	800/ 0dB

표 1. LMS 알고리즘에서의 성능

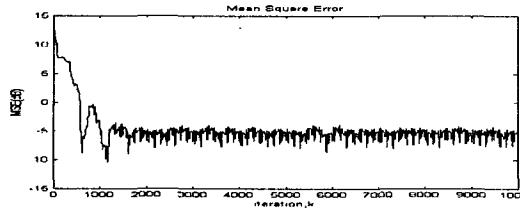


그림 3. LMS 알고리즘에서 MSE곡선

a의 값	0.75	0.8	0.88	0.9	0.95	0.99
출력 SNR(dB)	8.9811	9.2295	9.605	9.8167	9.5943	8.4373
excess MSE	0.6352	0.6103	0.6206	0.6353	0.6578	1.0385
최소 MSE	6.7563					
Misadjustment	0.094	0.0903	0.0919	0.094	0.0974	0.1537
수렴구간	3000/ -14dB	2000/ -13dB	1200/ -8dB	1000/ -5dB	1000/ -7dB	600/ -3dB

표 2. VSS LMS 알고리즘에서의 성능

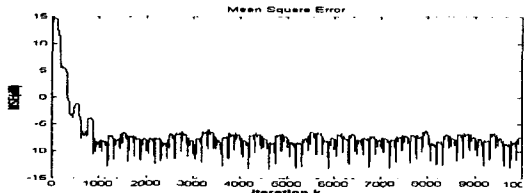


그림 4. VSS LMS 알고리즘에서 MSE곡선

a의 값	0.0005	0.001	0.0017	0.0018	0.0019	0.0025	0.003
출력 SNR(dB)	8.8163	10.554	11.1193	11.1267	11.1199	10.9813	10.9378
excess MSE	0.5544	0.2945	0.2551	0.2589	0.2631	0.3025	0.3258
최소 MSE	6.7563						
Misadjustment	0.0821	0.0436	0.0378	0.0382	0.0389	0.0448	0.0482
수렴구간	7000/ -17dB	6000/ -17dB	4500/ -17dB	4500/ -17dB	4500/ -17dB	4500/ -17dB	4000/ -17dB

표 3. 상관추정 LMS 알고리즘에서의 성능

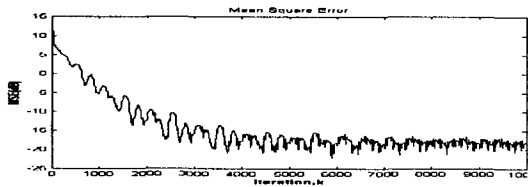


그림 5. 상관추정 LMS 알고리즘에서 MSE곡선

그림 6,7의 그래프는 각 알고리즘에서 신호대잡음비 기준으로 최고의 성능을 보일 때를 비교한 것이다.

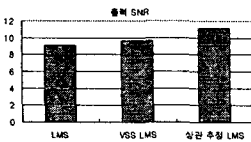


그림 6. 출력 SNR 비교

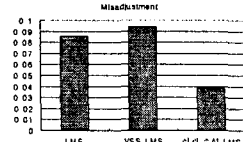


그림 7. Misadjustment

실험결과 알고리즘에 따라 신호대 잡음비에서 약 1.5~2[dB], misadjustment는 약 0.05에서 0.9의 성능개선효과를 볼 수 있었다.

V. 결론

본 논문에서는 LMS 알고리즘의 단점을 보완하기 위해 필터의 각 참조입력과 오차신호의 상관관계를 이용하여 적응 상수의 크기를 변화시키는 상관 추정 LMS 알고리즘을 제안하였고, 제안한 알고리즘의 성능을 검증하기 위하여 복수의 협대역 간섭을 제거하는 adaptive multiple-notch filter에 적용해 보았다. 또한 LMS 알고리즘을 보완한 알고리즘인 VSS LMS 알고리즘과도 비교해 보았다.

실험결과 신호대 잡음비 및 misadjustment에서 다른 두 알고리즘 보다 뛰어난 성능을 얻을 수 있었다. 본 논문에서 제안한 상관 추정 LMS 알고리즘이 차후 적응 잡음제거(adaptive noise canceling)에 기본적인 알고리즘의 하나로 적용되고, 적응신호처리의 다양한 분야에 응용될 수 있을 것으로 기대한다.

향후 노치 필터 뿐만 아니라 다른 여러 종류의 적응 필터에 적용하여 성능을 비교, 분석하고 필터의 차수가 매우 큰 경우 계산량을 줄일 수 있는 효율적인 알고리즘에 관한 연구가 있어야 하겠다.

참고문헌

- [1] Bernard Widrow and Samuel D. Stearns, Adaptive Signal Processing, Prentice Hall, 1985.
- [2] Simon Haykin, Adaptive Filter Theory 3rd Edition, Prentice-Hall, 1996.
- [3] 오신범, 이채욱, "가변 스텝 사이즈를 적용한 Walsh-Hadamard 적응필터", 한국산업정보학회 논문지, 제5권, 제2호, 2000.
- [4] Victor DeBrunner and Sebastian Torres, "Multiple Fully Adaptive Notch Filter Design Based on Allpass Sections". IEEE Transactions on Signal Processing, VOL. 48 NO. 2, Feb. 2000.
- [5] Yegui Xiao, Yoshiaki Tadokoro, "LMS-based notch filter for the estimation of sinusoidal signals in noise", Signal Processing, VOL. 46 NO. 2, Oct. 1995.
- [6] Raymond H. Kwong. and Edward W Johnson, "A Variable Step Size LMS Algorithm," IEEE Transactions on Signal Processing, VOL. 40 NO. 7, July 1992.