

# 공간보간 기법을 이용한 공간평활 적응 어레이 알고리즘

윤동현, 문성훈, 한동석  
경북대학교 전자전기공학부

## Spatial Smoothing Algorithm Using Spatial Interpolation Technique in Adaptive Array

Dong-Hyun Yun, Sung-Hoon Moon, Dong-Seog Han  
School of Electronic & Electrical Engineering, Kyungpook National University  
E-mail: dhy76@palgong.knu.ac.kr

### Abstract

Adaptive array systems are hard to remove all the interferences when incident signals are coherent with a desired signal. In this paper, we propose a modified Duvall beamformer, which performs spatial smoothing using spatial interpolation technique to maintain the degree of freedom. The proposed algorithm can minimize the loss on the degree of freedom due to spatial smoothing by forming subarrays with interpolated signals. Simulation results show that the proposed algorithm can remove all the interferences while conventional beamformer cannot.

### I. 서 론

기존의 적응 어레이는 표적신호와 상관도가 큰 코히어런트한 간섭신호가 입사하면 어레이 출력에서 표적신호를 상쇄시키는 문제점이 있다[1]. 표적신호 상쇄현상을 해결하기 위한 기존의 알고리즘으로 Widrow가 제안한 공간적 진동(spatial dither) 방법이 있다[2]. 이는 안테나 소자를 표적신호가 입사하는 방향에 수직으로 흔들어줌으로써 입사신호 사이의 상관도를 떨어뜨리는 방법이다. Duvall은 코히어런트 간섭을 제거시키기 위해 주 빔형성기와 종속 빔형성기를 이용하는 구조의 빔형성기를 제안했다[2]. Duvall 빔형성기는 코히어런트 간섭신호가 하나만 입사될때에는 표적신호 상쇄현상없이 최적의 가중치를 획득할 수 있지만 다수의 코히어런트 간섭신호가 입사할 경우 간섭신호 사이의 상관도로 인하여 제대로 간섭신호를 제거하지 못한다. 표적신호 상쇄현상을 해결하기 위한 대표적인 알고리즘으로 전체 어레이를 몇 개의 부어레이로 나누어 신호처리를 수행하는 공간평활 알고리즘이 있다[3]. 그러나 공간평활 알고리즘

은 주어진 어레이를 다수의 부어레이로 나누어 신호처리를 수행하므로 자유도의 손실을 초래하며 균일 선형 어레이(uniform linear array)에서만 적용 가능하다. Duvall 빔형성기의 문제점을 해결하고자 주 빔형성기로 입력되는 신호에 공간평활 알고리즘을 이용하여 간섭신호 사이의 상관도를 떨어뜨리는 수정된 구조의 Duvall 빔형성기가 제안되기도 하였다[4]. 그러나 수정된 Duvall 빔형성기도 공간평활로 인하여 자유도의 감소를 피할 수 없다.

본 논문에서는 자유도의 손실을 최소화시키기 위하여 공간보간 기법[5]을 이용한 공간평활 알고리즘을 제안한다.

본 논문은 II장에서 적응 어레이 시스템의 최적 빔형성을 위한 가중치에 대하여 설명하고 공간평활 알고리즘의 성능을 수학적으로 분석한다. III장에서는 공간보간을 이용한 공간평활 알고리즘을 제안하고 이의 수학적 분석을 수행한다. IV장에서 제안한 알고리즘의 성능분석을 위한 모의실험을 수행하고 마지막으로 V장에서는 결론을 맺는다.

### II. 적응 어레이 시스템

#### 1. 신호모델 및 최적 빔형성

$D$  개의 간섭신호가  $M$  개의 등간격으로 배치된 선형 어레이에 입사한다고 가정할 경우  $m$  번째 소자의 출력신호는

$$r_m(t) = \sum_{d=1}^D s_d(t) e^{-j(m-1)\phi_d} + n_m(t) \quad (1)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서  $s_d(t)$  는  $d$  번째 신호원에 의해 방출된 신호를 의미하며  $n_m(t)$  는 소자간에 서로 독립적인 부가잡음을 의미한다.  $\phi_d$  는 식 (2)와 같으며  $d$  번째 신호에 의해서 생기는 각 소자간의 위상지연을 나

타낸다.

$$\phi_d = \frac{2\pi\Delta}{\lambda_d} \sin\theta_d \quad (2)$$

여기서  $\Delta$ 는 이웃한 안테나 소자사이의 거리를 나타내며  $\lambda_d$ 와  $\theta_d$ 는 각각  $d$ 번째 입사신호의 파장과 입사각을 나타낸다. 어레이 소자에 입사된 신호를 벡터로 나타내면 식 (3)과 같다.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3)$$

식 (3)의 각 성분들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{r}(t) = [r_1(t), r_2(t), \dots, r_M(t)]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_D(t)]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_D] \quad (7)$$

식 (7)은  $M \times D$ 의 크기를 가지는 방향행렬(direction matrix)을 나타내며  $T$ 는 행렬의 전치(transpose)를 나타낸다.  $i$ 번째 신호원에 의한 방향벡터는

$$\mathbf{a}_i = [1, e^{-j\phi_i}, \dots, e^{-j(M-1)\phi_i}]^T \quad (8)$$

이 된다. 어레이 시스템의 출력을 구해보면

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{r}(t) \quad (9)$$

이며  $H$ 는 복소공액 전치(Hermitian transpose)를 의미한다. 가중치 벡터  $\mathbf{w}$ 는 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T \quad (10)$$

어레이 출력에서 신호 대 잡음비를 최대화할 수 있는 최적의 가중치는

$$\mathbf{w}_{opt} = \gamma \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a} \quad (11)$$

과 같이 나타낼 수 있다[6]. 여기서  $\gamma$ 는 가중치를 갱신시키는데 이용되는 상수이며  $\mathbf{a}$ 는 원하는 신호의 방향 벡터를 나타낸다.  $\mathbf{R}$ 은 입력공분산 행렬을 의미하며

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{r}(t)\mathbf{r}^H(t)] = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (12)$$

와 같다. 식 (12)에서  $\mathbf{I}$ 는 단위행렬을  $\sigma^2$ 은 부가잡음의 분산을 의미하며  $\mathbf{S}$ 는 입사신호의 공분산 행렬로 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{S} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)] \quad (13)$$

## 2. 공간평활 알고리즘

식 (11)로 나타나는 가중치는 어레이에 입사하는 간섭신호가 표적신호와 상관되어 있으면 최적의 가중치로 동작하지 못한다. 즉 표적신호까지도 어레이 출력에서 제거시키는 문제점이 있다. 이러한 표적신호 상쇄현상을 해결하기 위한 연구가 다양하게 진행되어 왔다[2-3].

일반적으로 표적신호 상쇄현상을 해결하기 위해 많이 사용되고 있는 방법은 공간평활 알고리즘이다. 코히어런트 간섭이 없을 경우 어레이의 입력공분산 행렬은 토폴리츠 행렬이다. 그러나 코히어런트 간섭신호가 입사할 경우 입력공분산 행렬은 토폴리츠 행렬이 아니다. 따라서 공간평활 알고리즘은 전체 어레이를 다수의 부어레이로 나누어 각 부어레이에 대한 공분산 행렬을 구해 평균을 취함으로써 입력공분산 행렬을 토폴리츠화시키는 알고리즘이다. 입력공분산 행렬이 점차적으로 토폴리츠화되는 과정을 살펴보기 위해  $k$ 번째 부어레이에 수신된 신호를 나타내면 식 (14)와 같다.

$$\mathbf{r}_k(t) = \mathbf{A}\Phi^{k-1}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_k(t) \quad (14)$$

식 (14)에서  $\mathbf{n}_k(t)$ 는  $k$ 번째 부어레이에서 수신한 잡음이며  $\Phi$ 는  $D \times D$  크기를 가지는 대각행렬이며 식 (15)와 같다.

$$\Phi = \text{diag}[e^{-j\phi_1}, e^{-j\phi_2}, \dots, e^{-j\phi_D}] \quad (15)$$

$k$ 번째 부어레이에서 입력공분산 행렬은

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{A}\Phi^{k-1}\mathbf{S}(\Phi^{k-1})^H \mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (16)$$

과 같다.  $K$ 번의 평활단계를 거친후 입력공분산 행렬은

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{R}_k \quad (17)$$

으로 나타낸다. 식 (16)과 (17)을 이용하여 평활된 공분산 행렬을 나타내면 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (18)$$

여기서  $\bar{\mathbf{S}}$ 는  $D \times D$ 의 크기를 가지는 평활된 신호의 공분산 행렬로 식 (19)와 같다.

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi^{k-1}\mathbf{S}(\Phi^{k-1})^H \quad (19)$$

식 (19)를 이용하여 공분산 행렬의 각 원소를 나타내면

$$\bar{S}_{ij} = S_{ij} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi_{ii}^{k-1} (\Phi_{jj}^{k-1})^* \quad (20)$$

이 된다. 식 (20)에서  $i=j$ 일 경우  $S_{ij} = S_{ii}$ 이 되며,  $i \neq j$ 일 경우 식 (20)의 우변이 식 (21)과 같이 나타내진다.

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi_{ii}^{k-1} (\Phi_{jj}^{k-1})^* = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{j(k-1)2\pi(\phi_{ii} - \phi_{jj})/2} \quad (21)$$

식 (21)은  $K$ 가 커짐에 점차적으로 0으로 수렴한다. 식 (21)에서 볼 수 있듯이 공간평활의 성능을 좌우하는 것은 부어레이의 수, 표적신호와 간섭신호사이의 각분리 정도이다. 그러나 입사신호의 각도는 우리가 조절할 수 있는 값이 아니다. 따라서 되도록 부어레이의 수를 많이 하여 상관성을 떨어뜨려야 한다. 그러나 주어진 어레이 소자로부터 부어레이의 수를 늘리면 각 부어레이의 소자수가 적어지는 문제점이 있다. 이것은 어레이의 자유도를 감소시켜 제거시킬 수 있는 간섭신호의 개수를 줄인다. 따라서 부어레이의 수와 각 부어레이를 이루는 소자수 사이에는 절충안이 필요하다.

## III. 공간보간을 이용한 공간평활 알고리즘

그림 1은 Duvall 빔형성기를 이용하여 공간평활을 수행하는 수정된 구조의 Duvall 빔형성기이다[4].

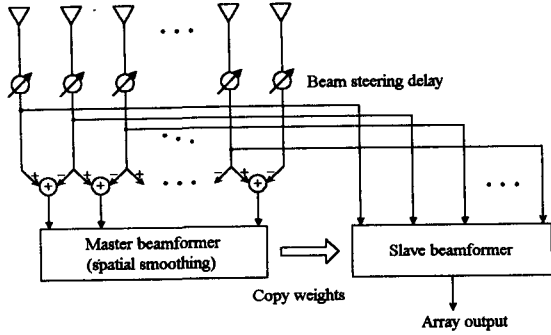


그림 1. 수정된 Duvall 빔형성기

수정된 Duvall 빔형성기는 주 빔형성기로 입력되는 신호사이의 상관성을 없애주기 위하여 공간평활을 수행한다. 따라서 다수의 코허런트 간섭신호가 입사하더라도 주 빔형성기에서 공간평활을 실행함으로써 각 간섭신호의 입사방향으로 널 패턴을 형성시킬 수 있는 가중치를 획득할 수 있다. 그러나 공간평활 알고리즘은 부어레이를 나누어 신호처리하므로 자유도의 손실을 가져와 자유도보다 많은 수의 간섭신호가 입사할 경우에는 모든 간섭신호를 제대로 제거하지 못한다.

따라서 본 논문에서는 되도록 원래의 자유도를 유지하면서 공간평활 알고리즘을 이용하기 위한 공간보간을 이용하는 공간평활 알고리즘을 제안한다. 제안한 알고리즘은 공간보간을 이용해 이웃한 안테나 소자사이의 데이터를 보간시켜 부어레이를 생성하는데 이용함으로써 자유도의 손실을 최소화하면서 공간평활을 이용할 수 있다. 어레이 안테나에서는 안테나 사이에서 신호의 변화가 심하지 않기 때문에 인접한 두 안테나의 신호를 이용하여 안테나 사이의 신호를 생성시킬 수 있다. 그림 2는 보간된 신호를 이용하여 부어레이를 만드는 과정이다.

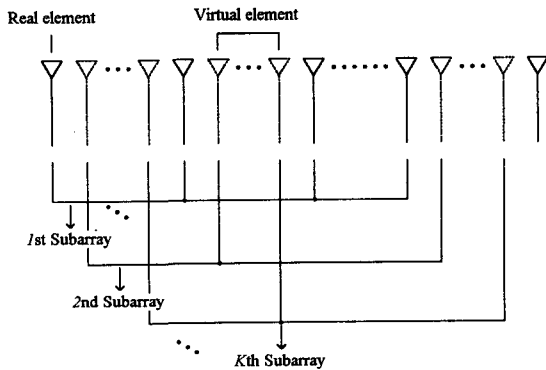


그림 2. 보간된 어레이 소자의 부어레이 형성

그림 2에서처럼 부어레이를 형성하여 주 빔형성기에서 공간평활을 시행함에 따라 점차적으로 표적신호와 간섭신호 사이의 상관성이 떨어짐으로써 어레이 출력에서

표적신호 상쇄현상이 간섭신호를 제거시킬 수 있다.

$m$  번째 안테나에 입사하는 신호인  $r_m(t)$ 와  $m+1$  번째 안테나에 입사하는 신호인  $r_{m+1}(t)$ 를 이용하여 가상의 안테나 소자에 대한 신호를 보간시킨다면 공간보간을 통해 생성된  $k$  번째 부어레이의 신호는

$$\tilde{r}_k(t) = \tilde{\mathbf{A}}_k \mathbf{s}(t) + \tilde{\mathbf{n}}_k(t) \quad (22)$$

로 나타낼 수 있다.  $\tilde{\mathbf{A}}_k$ 는 보간에 의해 만들어진  $k$  번째 부어레이에서의 방향행렬로서

$$\tilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{A} \tilde{\Phi}_k \quad (23)$$

으로 표현되며  $\tilde{\mathbf{n}}_k(t)$ 는 보간에 의해 생성된 잡음이다. 식 (23)에서  $\tilde{\Phi}_k$ 는  $k$  번째 부어레이의 상대적 위치에 따른 위상의 변화를 가리키며

$$\tilde{\Phi}_k = \text{diag}[e^{j\Delta_k \sin \theta_1}, \dots, e^{j\Delta_k \sin \theta_D}] \quad (24)$$

와 같다. 식 (24)에서  $\Delta_k$ 는  $k$  번째 부어레이의 실제 어레이 소자에 대한 변위를 의미한다. 보간된 신호를 이용하여 공간평활 알고리즘을 실행할 경우  $\mathbf{R}_k$ 의 랭크  $P$  ( $P \leq D$ )에 관계없이 공분산 행렬이 특이해를 갖지 않을 조건을 알아보기 위해 평활된 입력공분산 행렬을 보면 식 (25)와 같다.

$$\bar{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \tilde{\Phi}_i \mathbf{R}_i \tilde{\Phi}_i^H \quad (25)$$

$\mathbf{R}_i$ 의 고유치와 고유벡터를 각각  $\{\beta_1, \dots, \beta_D\}$ 와  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_D\}$ 라고 하면 식 (25)는

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_k &= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \tilde{\Phi}_i \left( \sum_{d=1}^D \beta_d \mathbf{u}_d \mathbf{u}_d^H \right) \tilde{\Phi}_i^H \\ &= \frac{1}{K} \sum_{d=1}^D \beta_d \sum_{i=1}^K \tilde{\Phi}_i \mathbf{u}_d \mathbf{u}_d^H \tilde{\Phi}_i^H \end{aligned} \quad (26)$$

과 같이 나타내진다. 여기서  $\tilde{\Phi}_i$ 의 주대각선에 있는 원소들로 이루어진 열벡터를  $\phi_i$ 라고 할 경우에 주대각선의 원소가  $\sqrt{\beta_d} \mathbf{u}_d$ 인 대각행렬  $\mathbf{U}_d$ 를 이용하여 식 (26)을 다시 정리하면

$$\bar{\mathbf{R}}_k = \frac{1}{K} \sum_{d=1}^D \mathbf{U}_d \left( \sum_{i=1}^K \phi_i \phi_i^H \right) \mathbf{U}_d^H = \frac{1}{K} \sum_{d=1}^D \mathbf{U}_d \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{U}_d^H = \mathbf{C} \mathbf{C}^H \quad (27)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서  $\mathbf{W}$ 와  $\mathbf{C}$ 는 각각 식 (28)과 (29)로 정해진다.

$$\mathbf{W} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_K] \quad (28)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{U}_1 \mathbf{W}, \mathbf{U}_2 \mathbf{W}, \dots, \mathbf{U}_D \mathbf{W}] \quad (29)$$

식 (27)에서  $\bar{\mathbf{R}}_k$ 의 랭크는  $D \times KP$ 의 크기를 가지는  $\mathbf{C}$ 행렬의 랭크와 같다. 따라서  $\mathbf{W}$ 가 전랭크이고 보간에 의해 생성된 부어레이의 수  $K$ 가  $D$ 보다 크며  $P \geq 1$ 이면  $\mathbf{C}$ 의 랭크는  $D$ 와 같다.  $\mathbf{W}$ 의  $(d, k)$ 번째 원소를 구해보면

$$\mathbf{W}_{dk} = e^{j\Delta_k \sin \theta_d} \quad (30)$$

과 같다. 여기서  $\mathbf{W}$ 행렬의 행은 어레이 소자가  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_K\}$ 에 위치해 있는 새로운 어레이에 대한 지향벡터로 생각할 수 있다. 따라서 지향벡터는 위치를 적절하게 정해줌으로써 선형독립이 되고  $\mathbf{W}$ 는 Vandermonde 행렬이 될 수 있고 각 행의 원소가 유일하다면 Vandermonde 행렬의 특성에 따라

$rank(\mathbf{W}) = \min(D, K) = D$  인 성질을 만족한다. 결과적으로  $\mathbf{W}$  가 전랭크의 행렬이 되면 가정된 조건에서  $\mathbf{R}_s$  의 랭크가  $D$  가 될 수 있으므로 보간된 신호를 이용해 공간평활된 공분산 행렬은 랭크를 회복할 수 있다.

#### IV. 모의실험을 통한 성능분석

제안한 알고리즘의 성능분석을 위하여 기존의 수정된 Duvall 빔형성기와 제안한 알고리즘을 사용하는 빔형성기를 비교하였다.

실험에 사용된 안테나는 5개이고 탭 길이는 8이다. 수정된 Duvall 빔형성기는 3개의 부어레이를 사용하며 제안한 빔형성기는 선형보간 방법으로 신호를 보간했으며 보간율은 5이다. 입사신호의 조건은 표 1과 같다.

표 1. 입사신호의 조건

	주파수	입사각	신호 대 잡음비
표적신호	0.25	0°	10dB
간섭신호1	0.25	-50°	40dB
간섭신호2	0.25	20°	40dB

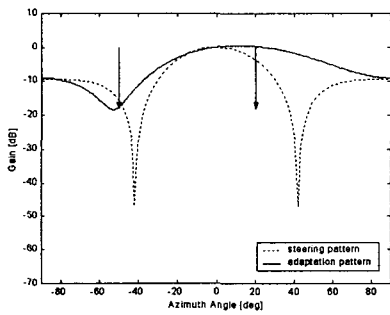


그림 3. 기존의 빔형성기의 지향 및 적응패턴

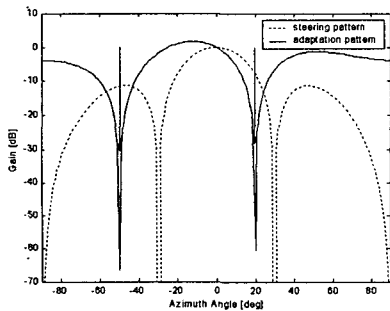


그림 4. 제안한 빔형성기의 지향 및 적응패턴

그림 3과 그림 4에서 점선과 실선은 각각 지향패턴과 적응패턴을 나타낸다. 화살표는 간섭신호의 입사방향을 나타낸다. 그림 3에서 기존의 빔형성기는 각 간섭신호의 입사방향으로 널 패턴이 형성되지 않았으나 그림 4

의 제안한 빔형성기는 널 패턴을 형성했다. 이로써 기존의 빔형성기는 공간평활로 인한 자유도의 감소로 입사하는 간섭신호를 제대로 제거하지 못했으나 제안한 빔형성기는 자유도의 감소를 최소화하여 입사하는 간섭신호를 제거시킴을 알 수 있다.

#### V. 결 론

본 논문에서는 적응 어레이 시스템에서 표적신호 상쇄현상을 해결하기 위한 기존의 공간평활 알고리즘의 문제점인 자유도의 감소를 해결하기 위하여 공간보간 기법을 이용한 공간평활 알고리즘을 제안하였다. 제안한 빔형성기를 기존의 빔형성기와 비교한 결과 기존의 빔형성기는 자유도의 감소로 간섭신호를 제대로 제거시키지 못했으나 제안한 빔형성기는 수십회의 가중치 갱신 후 간섭신호를 제거함을 확인할 수 있었다.

#### 참고문헌

- [1] B. Widrow and S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- [2] B. Widrow, et al., "Signal Cancellation Phenomena in Adaptive Antennas: Causes and Cures," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-30, no. 3, pp. 469-478, May 1982.
- [3] T. J. Shan and T. Kailath, "Adaptive Beamforming for Coherent Signals and Interference," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 33, no. 3, pp. 527-536, Jun. 1985.
- [4] S. C. Pei, et al., "Modified Spatial Smoothing for Coherent Jammer Suppression without Signal Cancellation," *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 36, no. 3, pp. 412-414, Mar. 1988.
- [5] B. Friedlander and A. J. Weiss, "Direction Finding Using Spatial Smoothing with Interpolated Array," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-28, no. 2, pp. 574-587, Apr. 1992.
- [6] R. T. Compton, *Adaptive Antennas, Concepts and Performance*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.