PCB 설계를 위한 Auction 알고리즘의 수학적 등가와 ε-이완법에 관한 연구

°우 경환*, 이 용희**, 임 태영***, 이 천희****
우송공업대학*, 현대반도체**, ETRI***, 청주대학교****
전화: 0431)229-8448/ 팩스: 0431) 213-6392

A Study on the Mathematical Equivalence and ε-Relaxation of Auction Algorithm for PCB Design

Woo, Kyong-Hwan*, Lee, Yong-Hui**, Lim, Tae-Yong**, Yi, Cheon-Hee***
Woosong Technical College*, Hyundai Electronics Industries**, ETRI***
Cheong Ju University****
e-mail: yicheon@chongju.ac.kr

Abstract

Minimum-cost linear network flow problems could be transformed with equal to assignment problems. Traditional method to solve the linear network flow problems are improved source-cost by transform the simple cycle flow. Auction alg orithm could be applied to same element using the initial target price and dispersion calculatio n. Also, each elements are obtained by ε-relaxa tion methods.

In this paper we proposed ; 1)minimum-cost flow problem, 2)minimum-cost flow problem by the mathematical equivalent, and 3) extraction ε-relaxation & expand transfer problem with m inimum-cost flow. It can be applicant to PCB design by above mentioned.

I. 서론

본 논문에서 언급하고자하는 할당 auction 알고리즘[1] 확장은 Bertsekas[2, 3]에서 언급하였듯이 최소비용 흐름 문제에 관한 것이다. 선형 망 흐름 문제를 해결하기 위한 전통적 알고리즘은 원시비용 개선 방법이며, 단순 싸이클 흐름을 이동시킴으로서 원시비용을 반복적으로 개선한다.

본 논문은 auction 알고리즘이 각각의 반복에서 분산계산을 하는 개체와 초기의 대상 가격을 선택하기 위하여 동일한 문제에 적용될 때, 개체는 ε-이완법의[4, 5]일반적인 형태에서 획득된다. 최소비용 흐름 문제를 auction 알고리즘의 전형적 반복에 의하여 수행되며, 또한 최소비용 흐름 문제의 특별한 경우로서 각 노드를 할당하는 수학적 등가 할당과 ε-이완법을 도출하여 적용함으로서 최소비용 흐름 문제를 해결하는 auction 알고리즘을 구현하고자한다.

II. 원시 Auction 알고리즘의 할당 문제

전통적인 대칭 할당 문제에서는 1대1방식으로 n개체와 n대상이 있어야한다. 대상 j와 개체 i를 결합하기 위한 이득 a_{ij}가 있을 때 총 이득을 최적화 하기 위해서는 개체에 대상을 할당하는 것이 필요하다. 연결될 수 있는 한 쌍의 집합(i, j)을 두며, 개체 i에 대해서, i와 결합시킬 수 있는 집합을 $A(i)$로서 표시한다.

$$A(i) = \{j \mid (i,j) \mid \in A\} \quad (1)$$

그리고 각 대상에 대해서, j를 연결시킬 수 있는 개체의 집합을 $B(j)$로서 표시한다.

$$B(j) = \{ i \mid (i,j) \mid \in A\} \quad (2)$$

Auction 알고리즘에서 각 개체를 할당하기 위해서는 반복적으로 실행하여야하며, 각 반복 시 상보성(CS)조건을 충족하여야한다. 개체 i에 대한 대상 j의 가치는 $a_{ij} - p_j$이다. 상보성 조건은 다음과 같다.

$$a_{ij} - p_{ji} = \max_{j \in A(i)} \{ a_{ij} - p_j \} \quad (3)$$

만일 모든 개체가 할당된다면, 알고리즘은 종료하고, 그렇지 않으면 할당되지 않은 개체 i의 비어있지 않은 부분집합 I가 선정되고, auction 알고리즘의 전형적인 반복이 실행된다. i를 P의 종단

노드에 들 때 전형적 반복은 그림 1과 같다.

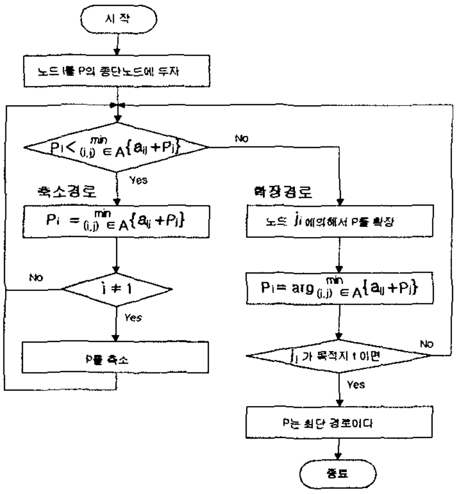

그림 1 : Auction 알고리즘의 전형적 반복

III. Auction 알고리즘의 최소비용 흐름 문제

선형 최소비용 흐름 문제에 대한 auction 알고리즘을 논의하고자 한다.[6, 7] 노드 N과 원호 A에 제시된 그래프를 제공하며, 각 원호(i,j)에 대해서 최적화 변수 x_{ij}를 원호의 흐름(i,j)이라 부른다. 최소비용 흐름(Minimum Cost Flow; MCF)문제는 다음을 고려하여야 한다.

$$\text{minimize} \sum_{(i,j)\in A} a_{ij}x_{ij} \qquad \text{(MCF)}$$

최소비용 흐름 문제에 의해서

$$\sum_{\{j\mid(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j\mid(j,i)\in A\}} x_{ji} = s_i, \quad \forall i \in N \quad (4)$$

$$b_{ij} \le x_{ij} \le c_{ij}, \quad \forall (i,j)\in A \quad (5)$$

여기에서 a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, s_i는 정수로 주어지며, a_{ij}는 비용계수이고, x_{ij}는 각 원호(i, j)에 대한 최적화 변수이고, b_{ij}는 흐름 경계이다. c_{ij}는 각 원호(i, j)의 실행 가능한 흐름 범위이다. 문제는 제약조건(식; 4)과 (식; 5)를 충족시키는 흐름 벡타가 존재한다면 실행 가능하고, 그렇지 않으면 실행 불가능하다.

문제는 다음식 $\sum_{j\in A(i)} x_{ij} = \alpha_i,\ \forall_i = 1,\ldots,m$

$$\sum_{i\in B(j)} x_{ij} = \beta_j,\ \forall_j = 1,\ldots,n,$$

$0 \le x_{ij}$. $\forall(i,j)\in A$. (여기에서 α_i와 β_j는 양의 정수이다.)에 의하여 그려진 그림 2와 같이 등가 수송문제를 바꿀 수 있다. 원호(i,j)에 대응 sink의 가격을 λ_{ij}로 표시하고, 노드 i에서 원시 대응 이익을 p_i로 표시하자. sink 가격이 증가함으로 원시 대응 이익 π_i 식 ($\pi_i = \max_{j\in A(i)}\{a_{ij}-p_j\}$)에 의해 다음과 같은 식이 된다.

$$p_i+\lambda_{ij} \ge 0,\quad p_j+\lambda_{ij} \ge -a_{ij}, \text{ for all } (i,j)\in A \quad (6)$$

최초 λ_{ij}에서 λ_{ij} = min{$-p_i$, $-p_j$ - a_{ij}} 선택되고, ε-CS 조건이 유지되는 동안 실행이 가능하고, ε-CS 조건의 감소에 의한 식($\pi_i+p_j \le a_{ij}+\varepsilon,\ \forall(i,j)\in A$ with $c_{ij}>0$)에 의해 다음과 같은 식이 나온다.

$$p_i+\lambda_{ij} \le \varepsilon \text{ for all } (i,j)\in A \text{ with } x_{ij} < c_{ij} \quad (7a)$$

$$p_j+\lambda_{ij} \le -a_{ij}+\varepsilon \text{ for all } (i,j)\in A \text{ with } b_{ij} < x_{ij} \quad (7b)$$

(식 6)과 (식 7a)에서 $p_j+a_{ij} \ge -\lambda_{ij} \ge p_i-\varepsilon$ if $x_{ij} < c_{ij}$를 얻으며, 다음과 같다.

$$p_i-p_j \le a_{ij}+\varepsilon \text{ for all } (i,j)\in A \text{ with } x_{ij} < c_{ij} \quad (8a)$$

(식 6)과 (식 7b)로부터 $p_i \ge -\lambda_{ij} \ge a_{ij}+p_j-\varepsilon$ if $b_{ij} < x_{ij}$ 를 얻으며, 다음 식을 구할 수 있다.

$$p_i-p_j \ge a_{ij}-\varepsilon \text{ for all } (i,j)\in A \text{ with } b_{ij} < x_{ij} \quad (8b)$$

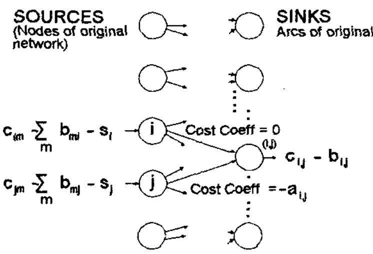

그림 2 : 수송 문제에서 최소 비용 흐름 문제의 변형

만약 x가 원호 흐름 범위(식; 5)와 (식; 8a)와 (식; 8b)를 충족한다면 흐름-가격 쌍(x,p)는 ε-상보성(ε-CS)를 충족하며, 다음과 같은 명제로 나타낼 수 있다.

명제 : 만일 x가 실행 가능하다면 가격 벡타 p에 대하여 쌍(x,p)는 ε<1/N과 함께 ε-CS를 충족시킨다(N은 노드의 수이다).

정의 1 ; 원호(i,j)는 $p_i = p_j+a_{ij}+\varepsilon$, $x_{ij} < c_{ij}$일 때 $\varepsilon^+ - unblock$라고 말할 수 있다.

원호(j,i)는 $p_i = p_j - a_{ji}+\varepsilon$, $b_{ji} < x_{ji}$일 때 $\varepsilon^- - unblock$라고 말할 수 있다.

pi로 표시한 노드 i의 push list는 $\varepsilon^- - unblock$한 원호(j,i)이고 $\varepsilon^+ - unblock$한 원호(i,j)이다.

정의 2 ; 노드 i의 push list p_i의 원호(i,j)에 있어서 0<δ ≤c_{ij}-x_{ij}과 같은 스칼라 δ를 두자. 변하지 않는 가격 벡타는 물론 모든 다른 흐름을 남겨두는 한편, 원호(i,j)에 대한 노드 i에서의 δ

-push는 δ에 의한 흐름을 x_{ij}를 증가로 이루어져 있다.

정의 3 : 비어 있지않은 가격상승, 즉 node I ($I \neq 0$, $I \neq N$)의 정밀한 부분집합 흐름 벡타 x와 I에 속하지 않는 노드의 변하지 않는 가격으로 구성되어 있다.

IV. 수학적 등가에 의한 최소비용 흐름 문제

상위 경계와 하위 경계 원호 흐름과 함께 최소 비용 흐름을 고려하므로, 노드 N과 원호 A의 집합에 의해 유향 그래프를 생성할 수 있다. 각각 원호(i, j)는 흐름 x_{ij}를 이동시킨다. x에 의해서 흐름 벡타$\{x_{ij} | (i, j) \in A\}$를 기술한다. a_{ij}, c_{ij}와 s_i에 정수가 주어졌을 최소비용 흐름 문제를 고려해야 하며, 최소비용 흐름 식에 의하여 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{\{j|(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in A\}} x_{ji} = s_i, \quad \forall\, i \in N \qquad (9)$$

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij}, \qquad \forall (i, j) \in A \qquad (10)$$

아래와 같은 두개 장치 수단에 의해서 비슷한 개체들을 가지고 있는 수송 문제를 할당 문제로 변환하는 것은 가능하며, 그림 3와 같이 나타낼 수 있다.

(a) 각 노드/수송의 원시 i대신에 비슷한 개체 $s_i + \sum_{\{j|(j,i)\in A\}} c_{ji}$을 생성한다.

(b) 수송 문제의 각 원호/sink(i, j) 대하여 이중 대상 c_{ij}을 생성한다. 원호(i, j)와 일치하는 이중 대상 중에서 어떤 것에 노드 i와 일치하는 유사계급 속에 있는 개체들을 할당하기 위한 이득은 영이며, 그리고 원호(j, i)와 일치하는 이중 대상의 어떤 것들에 노드 i와 일치하는 유사계급에 있는 개체들을 할당하기 위한 이득은 a_{ji}이다.

노드 i에 일치하는 모든 개체들의 이득은 동일하며, j의 유사계급에 있는 개체들과 같이 쌍을

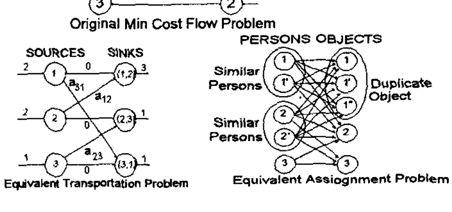

그림 3 : 최소비용 흐름 문제의 예와 그것의 동일한 수송문제와 할당문제의 일치

이룬 대상들은 가격 $a_{ij} - \pi_j$를 가진다. ε-CS 조건을 이용하여 다음 식을 얻는다.

$$\pi_j - \pi_i \ge a_{ij} - \varepsilon \quad \text{if } y_{i(i,j)} > 0 \qquad (11)$$

$$\pi_i + a_{ij} - \pi_j \ge -\varepsilon \quad \text{if } z_{j(i,j)} > 0 \qquad (12)$$

ε-coupled quadruplet에 대한 식(11)와 (12)는 다음과 같이 표기된다.

$$p_i \ge a_{ij} + p_j - \varepsilon \text{ for all } (i, j) \in A \text{ with } x_{ij} > 0 \quad (13)$$

$$p_i \le a_{ij} + p_j + \varepsilon \text{ for all } (i, j) \in A \text{ with } x_{ij} < 0 \quad (14)$$

위 식들은 ε-이완법과 관련하여 최소 비용 흐름 문제에 대한 ε-CS 조건들이다.[2, 3]

V. 최소비용 흐름 문제를 위한 ε-이완법의 도출

일반적 알고리즘의 가격 상승작용은 여러 개의 노드를 포함할 수 있다. 오직 하나의 노드가 가격 상승을 요구하는 것은 Bertsekas[3, 8]에서 처음 제안하였다.

ε의 고정된 양의 값을 이용하며, ε-CS를 충족시키는 쌍(x,p)로 시작한다. 더욱이 원호 흐름의 시작은 정수이다. 전형적인 반복의 시작에서 ε-CS를 충족시키는 흐름-가격 벡타 쌍(x,p)를 가진고, $g_i > 0$과 노드 i를 선택한다. 만약 어떠한 노드도 발견되지 않는다면 알고리즘은 종료한다. 반복하는 동안 노드 i에 속하는 여러번의 δ-push와 가격 상승을 실행한다.

ε-이완법에 의한 전형적 반복은 다음과 같다. $g_i > 0$과 함께 노드 i를 선택하자. 만약 어떠한 노드도 존재하지 않는다면 알고리즘은 종료한다; 그렇지 않으면 단계 1로 가라.

단계 1 : 노드 i의 push list가 비어있다면, 단계 3으로 가라; 그렇지 않으면 i의 push list에서 원호를 선택하고, 단계 2로 가라

단계 2 : j를 원호 a의 종단-노드라고 가정하자, 그리고 그것이 i와 반대라고 하자.

$$\delta = \begin{Bmatrix} \min\ \{g_i, c_{ij} - c_{ij}\} & \text{if } a = (i, j), \\ \min\ \{g_i, x_{ji} - b_{ji}\} & \text{if } a = (j, i). \end{Bmatrix} \qquad (15)$$

원호 a에서 i의 push list를 실행한다. 만약 이것을 적용한 결과로 g_i=0이 된다면 단계 3으로 가라; 그렇지 않으면 단계 1로 가라

단계 3 : 노드 i의 가격 상승을 실행하라. 만약 g_i=0이라면 종료하라; 그렇지 않으면 단계 1로 가라

Auction 알고리즘의 최소 비용 흐름 문제는 두개의 이득과 가격들을 적용하여, ε-coupled quadruplet$(\pi, p, S, \overline{S})$와 함께 시작하며, 그것을 유지한다. 수학적 등가에 기초를 둔, 최소 비용 흐름 알고리즘은 ε-CS 식(13)와 (14)을 만족시키는 흐름-가격 쌍(x, p)과 함께 시작하고 이를 유지한다.

Auction 알고리즘 에서, 각(M-auction)반복은 양수이며, 나머지 g_i과 함께 노드 i에 일치하는

유사계급 M에 의한 분산계산을 포함한다는 것을 알 수 있다. Auction 알고리즘의 법칙에 의하여, 노드 i는 아래와 같아야 한다.

(a) 노드 i의 가치는 부대 적인 원호에 일치하는 대상의 등급을 메겨라.

(b) 노드 i의 나머지를 만족시키는 충분한 수를 선택하라

(c) 노드 i의 최고 대상 ε을 뺀 이득까지 이득 π_i을 동일하게 감소시키는 대상을 위하여 적절한 가격 상승을 시킨다.

(d) 노드 i가 정확하게 하나의 대상마다 하나의 쌍을 포함하기 위해서 집합 $\overline{S}$를 조정하여야 한다.

최소 비용 흐름 문제에서, 반복하는 노드 i는 일치하는 대상 값에 의하여 나가는 원호(i, j)와 들어오는 원호(j, i)의 순서를 정해야만 한다. 또한, 수학적 등가 할당 문제에 적용된 전형적인 M-Auction 반복은 다음과 같다.

단계 1: (부수적인 원호의 주사) ε^+-unblocked된 원호의 a(i, j)원호 을 선택하고, 단계 2로 가고, 또는 ε^--unblocked된 원호(j, i)을 선택하고, 단계 3으로 간다. 만약 이러한 원호가 발견될 수가 없다면, 단계 4로 간다.

단계 2: (이전의 원호(i, j)에 따른 흐름의 확장) $\delta = \min\{g_i, c_{ij} - x_{ij}\}$ 만큼 x_{ij}를 증가시킨다. 만약 지금 $g_i = 0$과 $x_{ij} < c_{ij}$라면 멈추고: 그렇지 않으면 단계 1로 가라.

단계 3: (이후의 원호(j, i)에 따른 흐름의 확장) $\delta = \min\{g_i, x_{ji}\}$ 만큼 x_{ji}를 줄이시오. 만약 $g_i = 0$과 $b_{ji} < x_{ji}$ 이라면 멈추고: 그렇지 않다면 단계 1로 가라.

단계 4: (노드 i의 가격 증가)

$\min\{\{p_j + a_{ij} + \varepsilon \mid (i, j) \in A \text{ and } x_{ij} < c_{ij}\},$ $\{p_j - a_{ij} + \varepsilon \mid (j, i) \in A \text{ and } b_{ji} < x_{ji}\}\}$단계까지 p_i를 증가시킨다.

위와 같이 수학적 등가 할당 문제에 적용된 전형적인 M-Auction 반복과 ε-이완법에 의한 전형적 반복에 의하여 최소비용 흐름 문제를 해결하여 최단경로에 의한 최소비용으로 PCB회로를 설계하고자 한다.

VI. 결론

선형 망 흐름 문제의 변화에 대하여 많은 연구가 진행되어 왔다. Auction 알고리즘을 확장하고 적용하기 위한 방법으로 첫째 최단 경로와 최단 경로 개선 방법과 둘째 최소 비용과 최소 비용 개선 방법을 동일점에 배치하기 위하여, 더 많은 연구에 의하여 auction 알고리즘의 성능을 향상 시키고자한다.

본 논문에서 논의된 auction 알고리즘은 최단경로에 의한 최소 면적을 구하므로 궁극적으로 최소비용으로 PCB 회로 설계에 적용하면 적은 비용으로 시스템 성능을 향상시킬 것으로 기대되며, 연구 방법은 첫째 주어진 모든 개체가 대상에 할당될 때까지 축소경로와 확장경로를 반복하여 총 이득을 최적화 하는 할당에 의한 방법이며, 둘째 각 원호(i,j)에 대해서 최적화 변수 x_{ij}를 이용하여 최소비용 흐름 문제를 연구하였고, 셋째 상위경계와 하위경계 원호 흐름과 함께 수학적 등가에 의한 최소비용과 ε-이완법을 도출하여 PCB 회로 설계에 적용하도록 하였다.

참고문헌

[1] Bertsekas, D. P., "A Distributed Algorithm for the Assignment Problem," Lab.for Information and Decision Systems Working Paper, M.I.T., March 1979.

[2] Bertsekas, D. P., "Distributed Asynchronous Relaxation Methods for Linear Network Flow Problems," Lab. for Information and Decision Systems Report P-1606, M.I.T., November 1986.

[3] Bertsekas, D. P., "Distributed Relaxation Methods for Linear Network Flow Problems" Proceedings of 25th IEEE Conference on Decision and Control, 1986, pp.2101-2106.

[4] Bertsekas, D. P. and Polymenakos, L., "Parallel Shortest Path Auction Algorithm." Lab. for information and Decision System Report, M.I.T., April 1992

[5] Bertsekas, D. P., "Liner Network Optimization; Algorithm and Codes, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1991

[6] Bertsekas, D. P., and Castañon, D. A., "A Generic Auction Algorithm for the Minimum Cost Network Flow Problem," Alphatech Report, Burlington, MA, Sept. 1991.

[7] Bertsekas, D. P., and Castañon, D. A., "The Auction Algorithm for Transportation Problems," Annals of Operations Research, Vol. 20, pp. 67-96.

[8] Bertsekas, D. P., "Distributed Asynchronous Relaxation Methods for Linear Network Flow Problems," Lab. for information and Decision Systems Report P-1606, M. I. T., November 1986,