

비대칭 박벽보에 대한 엄밀한 동적 강도행렬의 유도

Derivation of Exact Dynamic Stiffness Matrix for Non-Symmetric Thin-walled Straight Beams

김 문 영*
Kim, Moon-Young

윤 희 택**
Yun, Hee-Taek

ABSTRACT

For the general loading condition and boundary condition, it is very difficult to obtain closed-form solutions for buckling loads and natural frequencies of thin-walled structures because its behaviour is very complex due to the coupling effect of bending and torsional behaviour. Consequently most of previous finite element formulations introduced approximate displacement fields using shape functions as Hermitian polynomials, isoparametric interpolation function, and so on. The purpose of this study is to calculate the exact displacement field of a thin-walled straight beam element with the non-symmetric cross section and present a consistent derivation of the exact dynamic stiffness matrix. An exact dynamic element stiffness matrix is established from Vlasov's coupled differential equations for a uniform beam element of non-symmetric thin-walled cross section. This numerical technique is accomplished via a generalized linear eigenvalue problem by introducing 14 displacement parameters and a system of linear algebraic equations with complex matrices. The natural frequencies are evaluated for the non-symmetric thin-walled straight beam structure, and the results are compared with available solutions in order to verify validity and accuracy of the proposed procedures.

1. 서 론

유연한 적용성과 해석과정의 단순함으로 인하여 보(beam)는 가장 널리 사용되고 있는 구조 요소이다. 특히 I형, 채널, 앵글단면 형태를 가지는 박벽보 구조는 단위중량에 대한 강성이 매우 높아 실무에서 활발히 적용되고 있다. 박벽보에 관한 연구는 1960년대에 Vlasov와 Timoshenko 등에 의해 시작된 이후, 최근까지도 국내외에서 많은 발전이 이루어지고 있다.^{(1)~(7)} 그러나 박벽보 요소는 구조적 거동이 복잡하여 단순한 경계 조건이 주어지지 않는 한, 고유진동수와 진동모우드 등의 동적 특성과 좌굴하중과 같은 정적 특성에 대한 엄밀한 해석이 매우 어렵다. 이러한 이유로 직선 박벽보 요소의 안정성 및 자유진동 해석을 위한 대부분의 연구에서는 Hermitian다항식을 형상함수로 사용함으로써 근사적인 요소 강도행렬을 산정하였다.

* 정회원 · 성균관대학교 토목환경공학과 교수

** 한국철도기술연구원 선임연구원

본 연구에서는 박벽보 구조의 동적해석을 위하여 경계조건의 제약을 받지 않으며, 엄밀한 해를 얻을 수 있는 일관된 유한요소 정식화 기법을 제안한다. 비대칭 개단면을 가지는 직선 박벽보에 대한 Vlasov의 연립 미분방정식으로부터 14개의 변위 파라메타를 도입하여 4계 연립 미분방정식 형태의 지배방정식을 선형 고유치 문제로 전환하고, 힘-변위 관계식을 적용함으로써 엄밀한 14×14 동적 요소 강도행렬을 유도하였다. 본 연구와 관련하여, 1985년 Friberg⁽⁵⁾는 Vlasov이론을 바탕으로 비대칭 박벽보 요소의 엄밀한 동적 강도행렬을 유도한 바가 있으나, 이로부터 좌굴하중이나 고유진동수를 산정하기 위해서는 Wittrick-Williams algorithm과 같은 추가적인 수치해석 기법을 적용해야 하는 불편이 있다. 그러나 본 연구에서 제안한 일관된 유한요소 정식화 기법에서는 이러한 추가적인 작업이 필요하지 않다. 형상함수를 도입하여 요소의 강도행렬을 산정하는 기존의 유한요소법과 비교할 때, 이러한 요소 강도행렬은 해석해로서 요소의 수와 계산시간을 대폭 줄일 수 있으며, 다양한 하중과 경계조건에 대한 엄밀해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 본 연구에서 개발한 수치해석 기법의 타당성을 검증하기 위하여 캔틸레버 보에 대한 고유진동수를 산정하고, 다른 문헌의 결과와 비교하였다.

2. Vlasov의 연립 미분방정식

1961년 Vlasov는 그림1과 같이 도심에서 U_x, ω_3, ω_2 , 전단중심에서 U_y, U_z, ω_1, f 를 정의하고, 균일한 비대칭 단면을 가지는 박벽보에 대하여 식(1)과 같은 지배방정식을 제안하였으며, 이는 지금까지도 박벽보 연구의 기초가 되고 있다. 그림에서 U_x, U_y, U_z 는 x_1, x_2, x_3 방향으로의 강체이동변위, ω_3, ω_2 는 x_2, x_3 방향으로의 회전변위, 그리고 ω_1, f 는 x_1 방향으로의 회전변위와 뒹을 정의하는 파라메타이다. 그리고 EA 는 축강성, EI_3, EI_2 는 x_2 와 x_3 축에 대한 휨강성, EI_ϕ 뒹-비틀강성(warping torsional rigidity), GJ 는 순수비틀강성(St. Venant torsional rigidity)을 나타낸다. 또한 m, ω 는 부재의 단위길이당 질량과 고유진동수(angular frequency), 그리고 P 는 단면의 도심에 작용하는 축방향 하중, $r_o, j_o (= r_o^2 m)$ 는 전단중심에 대한 회전반경과 단위길이당 극관성모멘트(polar moment of inertia)이다. 식(1)의 Vlasov방정식에서 전단변형(shear deformation)은 무시되지만, 뒹-비틀의 영향은 고려되었다.

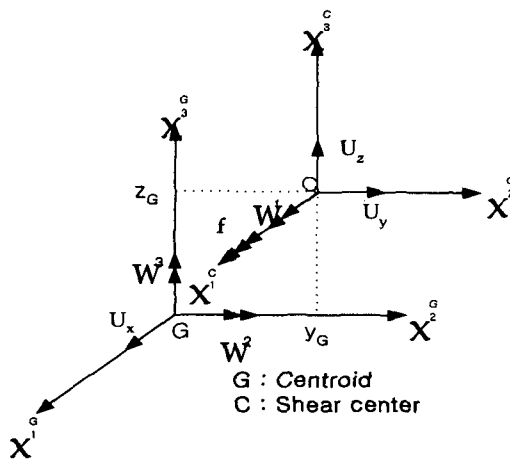


그림 1 박벽 단면의 변위 파라메타

$$-EAU_x'' - m\omega^2 U_x = 0 \quad (1-1)$$

$$EI_3 U_y'''' + \rho I_3 \omega^2 U_y'' + P(U_y'' - z_G \theta'') - m\omega^2 (U_y - z_G \theta) = 0 \quad (1-2)$$

$$EI_2 U_z'''' + \rho I_2 \omega^2 U_z'' + P(U_z'' + y_G \theta'') - m\omega^2 (U_z + y_G \theta) = 0 \quad (1-3)$$

$$EI_\phi \theta'''' + \rho I_\phi \omega^2 \theta'' - GJ\theta'' + P(r_o^2 \theta'' + y_G U_z'' - z_G U_y'') - j_o \omega^2 \theta - m\omega^2 (y_G U_z - z_G U_y) = 0 \quad (1-4)$$

이렇게 도심-전단중심에서 변위장을 정의한 Vlasov 방정식은 휨과 비틀림의 연계효과로 인하여 식(1)과 같이 4계 연립 상미분방정식의 형태를 가지며, 단순한 하중이나 경계조건이 주어지지 않는 한, 엄밀해를 구하는 것은 매우 어렵다. 이러한 경우 지금까지 직선 박벽보 요소의 안정성 및 자유진동 해석을 위한 대부분의 연구에서는 Hermitian 다항식과 같은 형상함수를 사용하므로써 근사적으로 요소 강도행렬을 산정하였다.

3. 동적 강도행렬의 유도

여기서는 비대칭 직선 박벽보 요소에 대한 Vlasov 방정식 (1)로부터 엄밀한 동적 강도행렬을 구하는 과정을 설명하고자 한다. 먼저 지배방정식을 선형 연립미분방정식 형태의 고유치 문제로 전환하기 위하여, 14개의 변위 파라메타를 다음과 같이 도입한다.

$$\{d_i\} = \{d_1, d_2, \dots, d_{14}\} \quad (2)$$

$$\text{여기서 } d_1 = U_x, d_2 = U_x', d_3 = U_y, d_4 = U_y', d_5 = U_y'', d_6 = U_y''',$$

$$d_7 = U_z, d_8 = U_z', d_9 = U_z'', d_{10} = U_z''', d_{11} = \theta, d_{12} = \theta', d_{13} = \theta'', d_{14} = \theta''' \quad \text{이다.}$$

식(2)를 식(1)에 대입하여 정리하면, 4개 파라메타들 사이의 관계를 구할 수 있다.

$$-EA d_2' = m \omega^2 d_1 \quad (3-1)$$

$$EI_3 d_6' = (-\rho I_3 \omega^2 - P) d_5 + P z_G d_{13} + m \omega^2 d_3 - m \omega^2 z_G d_{11} \quad (3-2)$$

$$EI_2 d_{10}' = (-\rho I_2 \omega^2 - P) d_9 - P y_G d_{13} + m \omega^2 d_7 + m \omega^2 y_G d_{11} \quad (3-3)$$

$$EI_\phi d_{14}' = (-\rho I_\phi \omega^2 + GJ - P r_o^2) d_{13} - P y_G d_9 + P z_G d_5 + j_o \omega^2 d_{11} + m \omega^2 y_G d_7 - m \omega^2 z_G d_3 \quad (3-4)$$

또한 나머지 10개의 변위 파라메타들 간의 관계는 다음과 같다.

$$d_1' = d_2, d_3' = d_4, d_4' = d_5, d_5' = d_6, d_7' = d_8$$

$$d_8' = d_9, d_9' = d_{10}, d_{11}' = d_{12}, d_{12}' = d_{13}, d_{13}' = d_{14} \quad (3-5)$$

식(3)의 관계는 다음과 같이 상수인 계수를 가지는 1차 연립방정식 형태로 나타낼 수 있다.

$$[A]\{d_i'\} = [B]\{d_i\} \quad (i=1 \sim 14) \quad (4)$$

여기서, $[A]$ 의 각 요소는 다음과 같으며, 그 외의 요소는 모두 0이다.

subroutine DCVCRG를 이용하였다.

$$([A](\lambda_j) - [B])[Z_{ij}] = 0 \quad (6)$$

따라서, 14개의 변위파라메타에 관한 식(5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{d_i\} = [X_{ij}]\{a_j\} \quad (7)$$

여기서, $[X_{ij}] = \sum_{j=1}^{14} [Z_{ij}] e^{(\lambda_j)x}$ 이며, 각 요소가 x 에 관한 복소 지수함수 형태로 이루어진 14×14 행렬이다. 그리고, 복소 계수 $\{a_j\}$ 를 구하기 위해서는 그림2와 같은 박벽보 요소 양단의 절점변위 파라메타를 도입해야 한다.

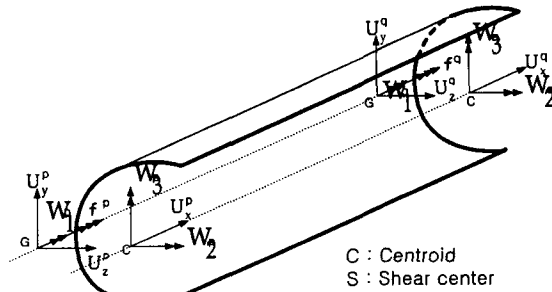


그림2 비대칭 박벽보 요소의 절점변위

$$\{u_i\} = [\hat{X}_{ij}]\{a_j\} \quad (8)$$

여기서 $\{u_i\} = \{ U_x(0), U_y(0), \omega_3(0), U_z(0), \omega_2(0), \omega_1(0), f(0) \}$

이고, $[\hat{X}_{ij}]$ 의 각

$$U_x(L), U_y(L), \omega_3(L), U_z(L), \omega_2(L), \omega_1(L), f(L) \}^T$$

요소는 $[X_{ij}]$ 로부터 쉽게 구할 수가 있다. 결국 복소 계수 $\{a_j\}$ 는 다음과 같이 구하며, 여기서 복소수 형태의 역행렬은 IMSL subroutine DLINCG를 이용하여 구하였다.

$$\{a_j\} = \{ \hat{X}_{ij} \}^{-1} \{u_i\} \quad (9)$$

식(9)를 식(7)에 대입하면, 다음과 같이 14개의 변위 파라메타를 모두 구할 수가 있다.

$$\{d_i\} = [X_{ij}]\{ \hat{X}_{ij} \}^{-1} \{u_i\} \quad (10)$$

한편, Hamilton의 원리로부터 그림 3과 같은 비대칭 박벽보 요소의 힘-변위 관계식을 얻을 수 있다. 그림 3에서 E_1, E_2, E_3 는 각각 x_1 방향의 축력과 x_2, x_3 방향의 전단력이다. 또한 M_3, M_2 는 x_2, x_3 방향의 휨모멘트, M_1, M_ϕ 는 x_1 방향의 비틀림모멘트와 바이모멘트를 나타낸다. 그리고 첨자 p, q는 각각 보의 양단($x = 0, L$)을 의미한다. 힘-변위 관계식에 식(2)와 같은 14개의 변위 파라메타를 도입하면 다음과 같다.

x 에서 박벽보 요소에 대한 절점력과 절점변위와의 관계식을 구할 수가 있다.

$$\{f\} = [S][X][\hat{X}]^{-1}\{u\} \quad (13)$$

결국, 박벽 직선 보의 요소 강도행렬 $[K]$ 을 다음과 같다.

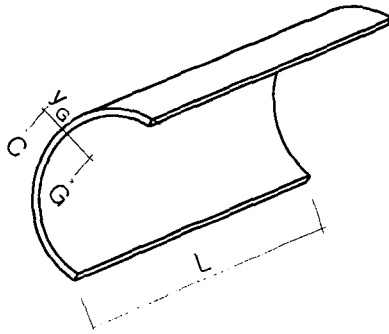
$$[K]_{7 \times 14} = [S][X][\hat{X}]^{-1} \quad (14)$$

식(14)의 $[K]$ 는 7×14 행렬이며, 이를 보 양단($x = 0, L$)의 14×14 로 확장하면 다음과 같이 비대칭 박벽 직선보의 자유진동 해석을 위한 동적 요소 강도행렬을 구할 수가 있다.

$$[K]_{14 \times 14} = \begin{bmatrix} -[S][X(0)][\hat{X}]^{-1} \\ [S][X(L)][\hat{X}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

4. 수치해석

본 연구에서 제안한 비대칭 직선 박벽보에 대한 동적 강도행렬의 정확성을 검증하기 위하여 다음과 같은 1축 대칭 단면을 가지는 캔틸레버 박벽보 구조에 대한 자유진동 해석을 수행하였다.



$$E = 68.9 \text{ GPa}, G = 26.5 \text{ GPa}$$

$$y_G = 15.5 \text{ mm}, z_G = 0.0 \text{ mm}$$

$$A = 0.000308 \text{ m}^2, L = 820 \text{ mm}$$

$$I_2 = 92.6 \times 10^{-9} \text{ m}^4, I_3 = 17.7 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$J = 1.52 \times 10^{-12} \text{ m}^4, I_\phi = 1.64 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$m = 0.835 \text{ kg/m}, j_o = 0.00501 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

표 1 고유진동수 f_n (Hz)

| mode | This study | | Friberg | |
|------|------------|---------|---------|---------|
| | P=0N | P=1790N | P=0N | P=1790N |
| 1 | 31.81 | 25.02 | 31.80 | 25.01 |
| 2 | 63.84 | 61.37 | 63.76 | 61.28 |
| 3 | 137.9 | 136.4 | 137.5 | 136.0 |
| 4 | 199.4 | 192.7 | 199.0 | 192.4 |
| 5 | 278.2 | 274.9 | 278.2 | 274.9 |
| 6 | 484.9 | 479.5 | 483.9 | 478.5 |
| 7 | 556.8 | 552.1 | 556.3 | 550.7 |
| 8 | 665.0 | 662.6 | 657.3 | 654.8 |
| 9 | 767.7 | 761.1 | 767.5 | 760.8 |
| 10 | 1075. | 1067. | 1075. | 1067. |

5. 결 론

- 1) 4계 상미분 연립방정식의 형태로 표현되는 Vlasov의 비대칭 직선 박벽보 요소의 지배방정식을 1계 연립 미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 힘-변위 관계식을 적용하여 엄밀한 동적 강도행렬을 유도하였다.
- 2) Hermitian 다항식과 같은 형상함수를 도입하여 구한 요소 강도행렬과는 달리, 본 연구에서 유도한 동적 강도행렬은 박벽 뼈대구조를 해석할 경우에 경계조건의 제약을 받지 않으며, 엄밀해이므로 요소의 수를 대폭 감소시킬 수 있다는 장점이 있다.
- 3) 동적 강도행렬로부터 단순지지, 캔틸레버 박벽보 구조의 고유진동수를 구하고, 다른 문헌의 결과와 비교하였다. 해석 결과에서 보는 바와 같이, 1축 대칭 박벽보 구조의 고유진동수는 해석해와 잘 일치함으로써 본 연구에서 제시한 동적 강도행렬의 정확성을 입증하였다.

참고문헌

1. Banerjee, J. R. 'Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements,' *Int. j. numer. methods eng.* 1989, 28, pp.1283-1298
2. Barsoum, R. W. and Gallagher, R. H. 'Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems,' *Int. J. Num. Meth. Engng.* 1970, 2, pp.335-352
3. Friberg, P. O. 'Beam element matrices derived from Vlasov's theory of open thin-walled elastic beams,' *Int. j. numer. methods eng.* 1985, 21, pp.1205-1228
4. IMSL. Library, *Problem-solving software system for mathematical and statistical FORTRAN programming*, IMSL Inc., Houston, 1984
5. Kim, M. Y., Chang, S. P. and Kim, S. B. 'Spatial stability analysis of thin-walled space frames', *Int. J. Num. Meth. Engng.* 1996, 39, pp.499-525
6. Kim, S. B. and Kim, M. Y. 'Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames,' *Engng. Struct.* 1999, pp.446-458
7. Vlasov, V. Z. *Thin Walled Elastic Beams*, 2nd ed., Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem, 1961