

직선형으로 Taper진 비대칭 변단면 부재의 탄성임계하중

The Elastic Critical Loads of Linearly Non-symmetrically Tapered Members

김 효 중* 홍 종 국* 이 수 곤**
Kim, Hyo-Jung Hong, Jong-Kook Lee, Soo-Gon

ABSTRACT

The elastic critical load of a slender compression member plays an important role when the proper design of that member is required. For tapered compression members, however, there are cases when the conventional neutral equilibrium or energy method can't be applied to the determination of critical loads. In this paper, the finite element method is applied to the approximate determination of the linearly tapered members. In this paper, the bars are assumed to be tapered linearly along their axes. The parameters considered in this study are taper parameter, α and the sectional property parameter, m . The member ends are either hinged or fixed. The computed results using the finite element method are represented in the forms of algebraic equations. The regression technique is employed to determine the coefficients of the algebraic equations. Critical loads estimated by the proposed algebraic equations coincide fairly well with those employing the finite element method.

1. 서 론

등단면 압축재에 비하여 부재의 폭(width)이나 춤(depth)이 부재축에 따라서 연속적으로 변하는 변단면 압축재의 임계하중 산정은 해석적 방법(analytical method)이나 energy 원리 적용이 불가능하거나 가능하여도 대단히 복잡하게 되거나 불가능하게 될 때가 많다. 이와 같은 경우에는 수치해석법을 이용함이 편리하다.

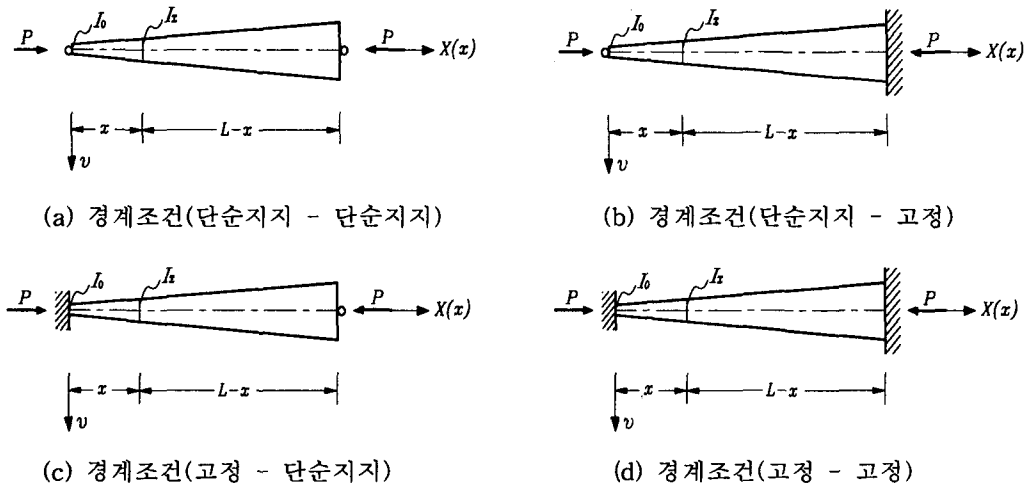
여기서는 수치해석법의 하나인 유한요소법을 이용하여 직선형 비대칭으로 taper진 부재의 임계하중을 산정하였다. 일반적으로 수치해석법의 적용으로 얻어진 결과는 어떤 계(system)의 매개변수들이 특정값을 취할 경우에만 유효하다는 단점이 있다. 따라서 본 논문에서는 수치해석 결과를 토대로 하여 간단한 대수식을 제안하였다. 대수식에 포함되는 몇 개의 상수(constant)들은 회귀법(regression method)을 이용하여 결정하였다. 또한 제안한 대수식의 적합여부를 판정하기 위한 상관계수 r 은 어느 경우에도 $r \approx 1$ 이었다.

2. 연구의 범위 및 해석적 방법

* 전남대학교 대학원 석사과정

** 전남대학교 건축학과 교수

본 연구의 범위는 그림 1과 같은 직선형으로 taper진 비대칭 변단면 부재로 하였다. 또한 여기서 고려한 parameter는 부재축에 따른 단면의 기울기를 나타내는 taper parameter α 와 단면의 특성을 나타내는 sectional property parameter m 이다. 그 내용을 살펴보면 식 (1)과 같다.



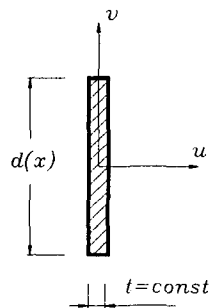
$$I_x = I_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{L}\right)^m, \quad 0 < x < L$$

그림 1. 경계조건이 다른 비대칭 압축재

taper parameter α : $\alpha = 0.0, 0.1, 0.2, \sim 2.0$

sectional property parameter m : $m = 1, 2, 3$ 또는 4 (1)

단면의 성질을 지배하는 sectional property parameter, m 이 $m = 1, 2, 3$ 또는 4를 취할 때의 기하학적 의미는 다음의 그림 2로 설명할 수 있다. 단 아래의 4개 그림에서 $d(x)$ 또는 $b(x)$ 가 변화치수로 그 변화형태는 $d(x) = d_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{L}\right)$ 로 표시된다고 한다.



$$I_v = I_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{L}\right)^1$$

$$I_u = I_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{L}\right)^3$$

(a) $m = 1$ 또는 3

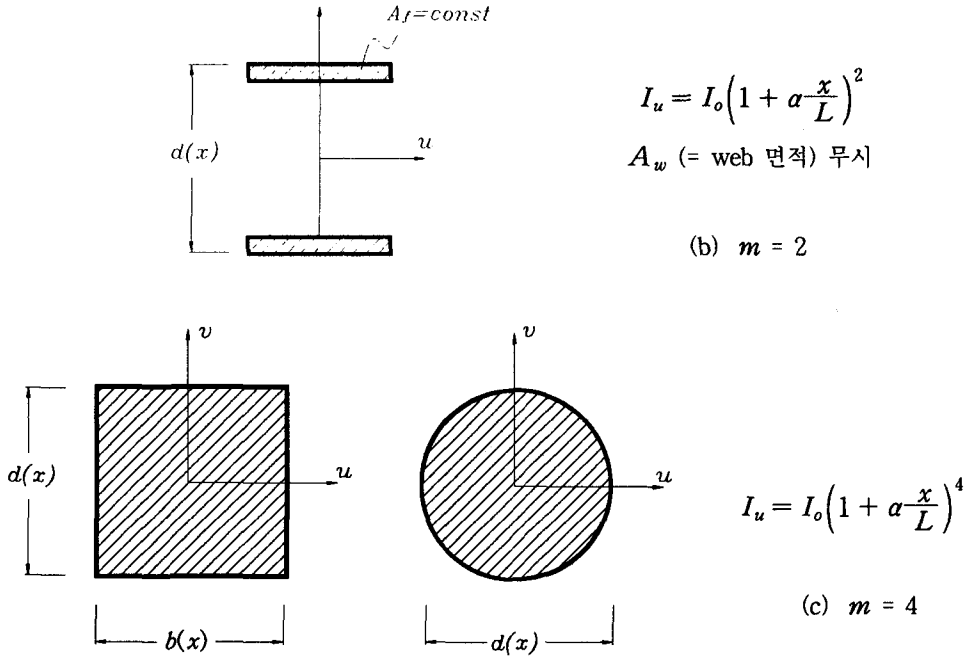


그림 2. 매개변수 m 의 기하학적 의미

그림 1.과 같은 비대칭 압축재의 좌굴을 지배하는 식은 다음 식으로 주어진다.

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(X^m \frac{d^2 v}{dX^2} \right) + k^2 \frac{d^2 v}{dX^2} = 0 \quad (2)$$

식(2)에서 X 와 k^2 은 각각 무차원 좌표 및 무차원 하중으로 그 내용은 다음과 같다.

$$X = 1 + \alpha \frac{x}{L}, \quad k^2 = \left(\frac{L}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{PL^2}{EI_o} \quad (3)$$

단면성질 매개변수 m 이 $m = 1, 2, 3$ 또는 4를 취할 때, 식(2)의 제차해(homogeneous solution)는 원주함수나 삼각함수로 주어진다. 임계하중은 부재 양단의 경계조건을 고려하는 과정에서 결정되는데 양단 단순지지의 경계조건 이외는 상당히 복잡하게 된다.

다시 말하여 해석적 방법(analysis method)에 의한 임계하중 산정은 대단히 복잡하게 된다. 이때에는 차분법이나 유한요소법과 같은 수치해석법에 의하여 임계하중을 산정할 수 있는데 이번 연구에서는 유한요소법을 이용하기로 한다.

3. 유한요소법의 정식화

단면 2차 모멘트가 그림 1에서처럼 선형함수의 형태로 변하게 되면 식 (2)로 주어지는 미분방정식의 정해는 구할 수 없거나 복잡하게 되고 따라서 임계하중 산정도 복잡 또는 불가능하게 된다.

강성행렬법을 이용하여 변단면 압축재의 좌굴하중을 구하기 위하여 먼저 그림 3과 같이 각 절점에서의 자유도(d.o.f)가 2인 선형요소를 택한다. 이때의 변형성분 δ_i 와 절점력 성분 q_i 는 그림과 같이 가정한다. 어떤 요소의 임의점 x 에서의 수직 처짐 함수 v 는

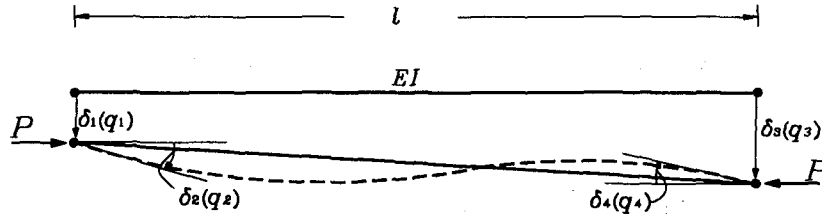


그림 3. 요소의 절점변형 및 절점력

$$v = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\} \quad (4)$$

로 표시할 수 있는데 이 식중의 $[N]$ 은 shape function으로 그 성분 N_i 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1 &= -1 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_2 &= x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ N_3 &= -3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_4 &= -\frac{x^2}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

또한 식 (4)에서 $\{\delta\}$ 는 절점변형 vector를 의미한다.

요소의 절점력 벡터 $\{q\}$ 와 절점변형 벡터 $\{\delta\}$ 와의 관계는 요소의 강성행렬 $[k]$ 에 의하여 다음식으로 결합된다.

$$\{q\} = [k]\{\delta\} \quad (6)$$

식 (6)에서 요소의 강성행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [k] &= \int_0^l \left[\frac{d^2 N}{dx^2} \right]^T EI(x) \left[\frac{d^2 N}{dx^2} \right] dx - P \int_0^l \left[\frac{dN}{dx} \right]^T \left[\frac{dN}{dx} \right] dx \\ &= [k_b] - P[k_g] \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)에서 $[k_b]$ 는 요소의 휨을 고려한 휨 강성행렬이고 $[k_g]$ 는 휨 강성에 미치는 압축력의 영향을 나타내는 기하 강성행렬이다. 복잡한 계산을 피하기 위하여 요소의 $I(x)$ 는 그 요소 중앙점에서의 단면 2차 모멘트값 $I_{(e)}$ 를 택하여 일정하다고 하면 식 (7)을 계산한 결과는 각각 다음과 같이 된다.

$$[k_b] = \frac{EI_{(e)}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \text{symm} \\ -6l & 4l^2 & & \\ -12 & 6l & 12 & \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8-a)$$

$$[k_g] = \left(\frac{1}{30}\right) \cdot \frac{P}{l} \cdot \begin{bmatrix} 36 & & & \text{symm} \\ -3l & 4l^2 & & \\ -36 & 3l & 36 & \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8-b)$$

실제로 그림 1과 같은 비대칭 변단면 압축재를 20등분 ($L=20l$) 할 경우 $m=2$, $a=1.0$ 이면, 10번째 요소의 휨 강성행렬 중 $(k_{12})_b$ 즉, $\int_{9l}^{10l} \left[\left(\frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dN_2}{dx} \right) \cdot EI_0 \cdot \left(1 + \frac{x}{L} \right)^2 \right] dx$ 의 정확한 수치 적분 결과는 $-248600.6527 \cdot EI_0$ 으로 된다. 약산에 의한 $(k_{12})_b$ 는 먼저 $I_{(10)} = I_0 \left(1 + \frac{x}{L} \right)^2 \Big|_{x=9.5l} = 2.18I_0$ 가 되고, $\int_{9l}^{10l} \left(\frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{dN_2}{dx} \right) dx = \int_{9l}^{10l} \left(\frac{-18x^4}{l^5} + \frac{42x^3}{l^4} - \frac{30x^2}{l^3} + \frac{6x}{l^2} \right) dx = -113967.1$ 이므로 $(k_{11})_b$ 는 $-247946.8228 \cdot EI_0$ 가 된다. 수치 적분 결과와 비교했을 때 오차는 약 -0.26% 정도이다.

4. 임계하중 산정

요소의 행렬인 식 (8-a)와 식 (8-b)를 전체요소에 대하여 결합하면 압축재 전체의 부재력 vector $\{Q\}$ 과 여기에 대응하는 부재변형 vector $\{\Delta\}$ 은 식 (6)와 비슷한 다음식으로 된다.

$$\{Q\} = [[K_b] - P[K_g]]\{\Delta\} \quad (9)$$

식 (9)에서 $[K_b]$ 와 $[K_g]$ 는 요소의 강성행렬이 조합된 후 양단에서의 경계조건이 처리된 압축재 전체의 강성행렬을 뜻한다. 일반적으로 압축재의 임계하중은 식 (9)의 우측행렬의 행렬식을 0(zero)으로 놓아 산정한다. 이것을 식으로 표시하면

$$\det([K_b] - P[K_g]) = 0 \quad (10)$$

식 (9)은 전형적인 고유치 문제로서 행렬식의 차수(dimension)가 클 때는 computer를 이용한 반복법(iteration method)를 이용하여 임계하중을 산정함이 편리하다. 식 (10)에 그대로 반복법을 적용할 경우 최대 임계하중이 맨 처음 구해지므로 식 (10)을 다음과 같이 변형시켜 최소 임계하중 즉 기본 mode에 대응하는

임계하중을 구한다.

$$\det\left([K_b]^{-1}[K_g] - \frac{1}{P}[I]\right) = 0 \quad (11)$$

식 (11)에서 $[I]$ 는 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

앞에서 전개한 이론을 그림 1과 같은 비대칭 변단면 압축재의 좌굴하중산정에 응용하기로 한다. 일반적으로 요소를 세분할수록, 바꾸어 말하면 부재의 요소수를 증가시킬수록 수치해석법에 의한 결과는 정해치에 더욱 수렴하는 것으로 알려지고 있다. 이와같은 사실은 그림 1과 같은 변단면의 임계하중 산정에서 요소수 증가에 따른 임계하중의 수렴정도를 나타내는 다음의 그림 4로부터 알 수 있다. 단면형태변화가 그림 1과 같을 때 정확한 임계하중식은 알 수 없으나 $N=16$ 부터는 거의 일정한 값을 유지하므로 여기서는 $N=20$, 즉 변 단면 압축재를 20등분 한 다음 $\alpha = 0.1$ 에서 $\alpha = 2.0$ 까지 변할 때의 임계하중치를 산정하였고 그 결과는 표 1과 같다. 표 1에서 " C_{fem} "이란 열(column)이 유한요소법에 의한 결과이다.

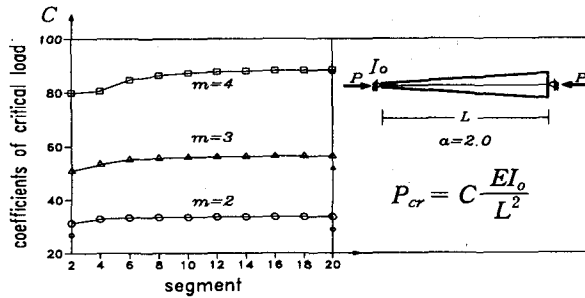


그림 4. 요소수의 증가와 수렴도

5. 회귀식

수치해석법에 의한 결과치는 계(system)의 parameter들이 어떤 특정 값을 취할 경우에만 적용할 수 있고 따라서 일반화 할 수 없는 것은 일반적으로 알려진 사실이다. 여기서는 구조설계 실무에 종사하는 기술자가 그림 1과 같은 압축재의 설계에 당면하게 될 때 부재의 내력평가를 보다 신속히 하는데 도움이 되도록 다음과 같은 추정식을 제안하였다.

$$C(a, m) = (A_0 + A_1 m + A_2 m^2) + (B_0 + B_1 m + B_2 m^2)a + (C_0 + C_1 m + C_2 m^2)a^2$$

$$P_{cr} = C(a, m) \cdot \frac{EI_0}{L^2} \quad (12)$$

식(12)의 상수들은 회귀법(regression method)으로 결정하였으며 표 2는 이들을 정리한 것이다.

또한 식 (12)의 추정식 결과가 유한요소법에 의한 임계하중치를 얼마나 충실히 반영하는가를 판정하는 하나의 방법으로 상관계수 r 을 도입하였다. 상관계수 r 은 다음식으로 계산된 값이다.

$$r = \frac{\sum (C_{fem} - \bar{C}_{fem}) \cdot (C(a, m) - \bar{C}(a, m))}{\sqrt{\sum (C_{fem} - \bar{C}_{fem})^2 \cdot \sum (C(a, m) - \bar{C}(a, m))^2}} \quad (13)$$

표 2. 회귀상수

$$[C(a, m) = (A_0 + A_1 m + A_2 m^2) + (B_0 + B_1 m + B_2 m^2)a + (C_0 + C_1 m + C_2 m^2)a^2]$$

| 경계조건 | A_0 | A_1 | A_2 | B_0 | B_1 | B_2 | C_0 | C_1 | C_2 | r |
|-------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|--------|----------|--------|-----|
| 단순-단순 | 10.0895 | -0.2505 | 0.0542 | -1.8699 | 8.8225 | -0.4738 | 3.5616 | -6.5527 | 2.9048 | 1.0 |
| 단순-고정 | 20.4279 | -0.2163 | 0.0369 | -1.8308 | 11.7216 | -0.2779 | 3.0991 | -5.9784 | 2.5399 | 1.0 |
| 고정-단순 | 20.4365 | -0.2361 | 0.0463 | -1.8538 | 11.8352 | -0.3326 | 3.0057 | -5.9870 | 2.5898 | 1.0 |
| 고정-고정 | 40.0369 | -0.5319 | 0.1030 | -4.2720 | 23.7262 | -0.7589 | 6.9594 | -13.0867 | 5.3393 | 1.0 |

6. 결 론

유한요소법을 이용하여 임의의 경계조건을 갖는 정현상 비대칭으로 taper진 압축재의 임계하중치를 산정하였다. 유한요소 해석에서 고려한 parameter는 단면의 기울기를 나타내는 taper parameter α 와 단면의 성질을 지배하는 sectional property parameter m 이었다. 경계조건은 단순-단순지지, 단순-고정, 고정-단순 그리고 고정-고정의 경우를 다루었다. 일반적으로 taper parameter α 와 sectional property parameter m 의 증가는 물론 양단의 고정도의 증가에 따라 임계하중도 증가함을 알 수 있었다.

특정의 α 및 m 에 대한 임계하중의 변화를 간단한 대수식으로 표현하였다. 제한한 2차의 대수식으로 추정된 값과 유한요소법에 의한 기준치와는 대체로 일치하였고, 상관계수 또한 1.0에 가까운 값들로 나타나 제안식을 신뢰할 수 있었다. 이러한 결과를 통해서 볼 때, 변단면 부재의 구조설계나 검토에 임하는 구조 실무자들은 제안식을 이용하여 업무처리를 신속히 할 수 있겠다.

참 고 문 헌

1. Stephen P. Timoshenko and James M. Gere, "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Co., 1963
2. 李 守 坤, "Eigenvalue Problems of the Tapered Bars with Partially Fixed Ends", 서울대학교 대학원 박사학위 청구논문, 1979
3. 사 종 엽, Professor's Numerical Analysis Home Page, Ch.4, 회귀분석, Ch.5, 수치적분
4. Himat Solanki and Gajanan M. Sabnis, "Buckling Load of Tapered Columns", pp436~442, Structures Congress, 1989
5. Moshe Eisenberger and Yoram Reich, "Buckling of Variable Cross Section Columns", pp443~451, Structures Congress, 1989
6. Frank E. Weisgerber and Khalid Salahuddin, "Elastic Stability of Non-Prismatic Columns", pp410~417, Structures Congress, 1989
7. 李 守 坤, "構造物の 安定理論", 전남대학교 출판부, 1995
8. Alexander Chajes, "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall, Inc., 1974
9. 洪 宗 局, 單純支持 變斷面 壓軸材의 臨界荷重, 한국전산구조공학회 춘계학술발표대회, 1999
10. 建築構造學大系 編輯委員會, "固有値問題", 彰國社(日本), 1967
11. W.F.Chen and E.M.Lui, "Structural Stability", Elsevier, 1987