

일반 평면 아치 구조물의 형상설계민감도 해석 및 최적설계

Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization of General Plane Arch Structures

최 주 호*
Choi, Joo-Ho

ABSTRACT

A general formulation for shape design sensitivity analysis over a plane arch structure is developed based on a variational formulation of curved beam in linear elasticity. Sensitivity formula is derived using the material derivative concept and adjoint variable method for the stress defined at a local segment. Obtained sensitivity expression, which can be computed by simple algebraic manipulation of the solution variables, is well suited for numerical implementation since it does not involve numerical differentiation. Due to the complete description for the shape and its variation of the arch, the formulation can manage more complex design problems with ease and gives better optimum design than before. Several examples are taken to show the advantage of the method, in which the accuracy of the sensitivity is evaluated. Shape optimization is also conducted with two design problems to illustrate the excellent applicability.

1. 서 론

기계 및 토목 구조물의 설계에서 일반적으로 많이 등장하는 요소로 곡선 보(curved beam)의 사용을 들 수 있는데 이는 예를 들어 아치형 다리, 비행기 및 자동차 등에서 흔히 볼 수 있다. 본 연구의 주제는 이러한 아치 형 곡선 보 또는 그 조합을 대상으로 설계민감도 해석을 위한 체계적 방법을 개발하고 이를 활용하여 효과적인 형상최적설계를 수행하는 것이다. 민감도 해석은 지금까지 국내외에 걸쳐 매우 많은 사람들이 연구했는데 크게 이산화 접근법(finite dimensional approach)와 연속체 접근법(continuum approach)으로 나눌 수 있다.^{(1),(2)} 이산화 접근법은 유한차분을 부분 또는 전적으로 사용하여 민감도를 계산하는 반면 연속체 접근법은 해석적으로 유도된 민감도 공식을 가지고 계산하므로 여러 면에서 연속체 접근법이 더 우수하다. 아치 구조물의 형상설계 민감도를 위한 연속체 접근법은 최초로 Dems와 Mroz⁽³⁾에 의해 이뤄졌는데 여기서는 변분연산(variational calculus) 방법을 활용하여 일반 설계문제에 적용이 가능한 방법을 제시했지만 계산을 위해 3 차

수치미분을 행해야 하므로 정확도가 크게 저하되는 단점이 있다. 한편 Dopker 등⁽⁴⁾과 Chenais 등⁽⁵⁾도 유사한 방법을 연구하였는데, 이들의 방법은 얇은 아치구조물에만 적용되는 한계가 있다. 김인용 등⁽⁶⁾은 일반적 아치를 부분적 얇은 아치의 조합으로 보고 각각의 얇은 아치의 민감도 계산방법을 통해 일반 아치 문제를 해결하였다. 최근에는 Habbal⁽⁷⁾의 연구사례도 있는데 이것 역시 얇은 아치 구조물에만 적용 가능하다.

본 논문에서는 이러한 문제점 들을 극복하기 위해 형상 및 형상 변화를 일반적 고려가 가능하도록 기술하고 이를 토대로 민감도 공식을 유도하므로 일반 형상의 부재 뿐 아니라 복합 아치 구조물에도 쉽게 적용이 가능하다. 또한 민감도 계산시 미분이 필요없는 단순 대수연산으로 이뤄지므로 높은 정확도를 기대할 수 있다. 본 방법의 장점을 검증하기 위해 몇가지 수치예제를 대상으로 민감도를 계산, 정확도를 검사하였으며, 간단한 최적화 문제를 구성하여 최적설계도 구해 보았다. 본 연구에서는 최적화의 목표를 최대 응력을 최소화하는 것만 고려하였으나 무게 최소화 등 다른 최적화 문제도 약간의 수정을 통해 쉽게 고려가 가능하다. 한편 본 연구에서는 민감도 해석과 형상 최적화 과정을 일반화하여 사용이 쉽게 하였다. 구조해석을 위해 상용 해석 소프트웨어 ANSYS⁽⁸⁾를 활용하였으며 최적화 루틴은 IDESIGN⁽⁹⁾을 이용하였다. 따라서 최적화 수행을 위해서는 ANSYS 해석을 위한 유한요소모델 생성, 해석 및 후처리 용 파일 만 작성하면 되므로 ANSYS의 편리함과 민감도해석의 정확함을 결합한 효율적인 최적화 프로그램이라 할 수 있다.

2. 형상 설계 민감도 해석

임의의 곡선 보에 대해 Fig. 1 과 같이 중립축을 표현할 때 곡선 상에 국부적 곡선형(curvilinear) 좌표계 (s, t) 를 구성할 수 있는데 t 는 두께방향(또는 수직방향) 높이가 된다. 곡선 보의 두께를 h 라 할 때 t 는 $(-h/2, h/2)$ 의 범위를 가진다. 곡선 보에 여러가지 하중이 가해진 경우, 이로 인한 변위를 $\mathbf{u} = \{u, w\}$ 라 하자. 보의 축방향 변형률 ϵ , 회전(rotation) ϕ 및 보요소 곡률 κ 는

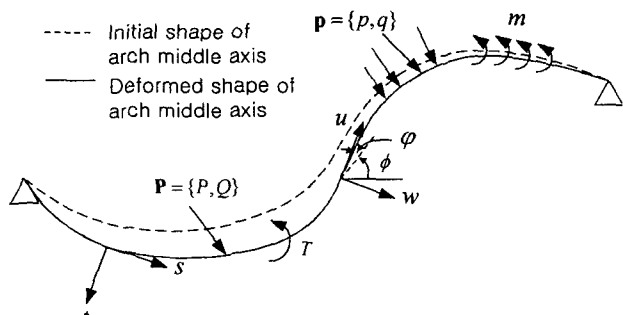


Fig. 1 Initial and deformed shape of plane arch

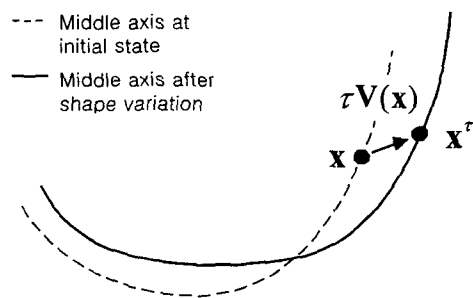


Fig. 2 Shape variation of arch

각각 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽¹⁰⁾

$$\varepsilon = u_{,s} + Hw, \quad \varphi = -w_{,s} + Hu, \quad \kappa = \varphi_{,s} \quad (1)$$

여기서 H 는 초기상태의 곡선 곡률을 의미한다. 상기와 같은 표기를 토대로 변분방정식을 유도하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = l(\bar{\mathbf{u}}) \quad (2)$$

여기서

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) &= \int_{\Gamma} \{ C\varepsilon(\mathbf{u})\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) + D\kappa(\mathbf{u})\kappa(\bar{\mathbf{u}}) \} ds \\ l(\bar{\mathbf{u}}) &= \int_{\Gamma} \{ \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{u}} + m\bar{\varphi} \} ds + \sum_k [\mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{u}} + T\bar{\varphi}]^k \end{aligned} \quad (3)$$

이며 C 와 D 는 각각 Eh 및 $Eh^3/12$, Γ 는 곡선 보 전체길이이며, $(\bar{\quad})$ 로 표시된 변수들은 가중 함수를 의미한다. 그리고 k 는 집중하중이 가해진 점들을 지칭한다. 한편 변분방정식은 방향이 고정된 직교좌표계를 통해 표현할 수도 있는데 변위와 하중들을 직교좌표계에서 각각 $\mathbf{z} = \{u_i\}$, $\mathbf{f} = \{f_i\}$ 및 $\mathbf{F} = \{F_i\}$ 로 정의하면 변형률은

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{z}) &= (u_i s_i)_{,s} + H(u_i n_i) = u_{i,s} s_i \\ \varphi(\mathbf{z}) &= -(u_i n_i)_{,s} + H(u_i s_i) = -u_{i,s} n_i \end{aligned} \quad (4)$$

으로 표현되며 변분방정식은 \mathbf{u} 를 \mathbf{z} 로, 하중 \mathbf{p}, \mathbf{P} 를 \mathbf{f}, \mathbf{F} 로 바꾸어 표현하면 된다.

변분방정식의 형상변화에 따른 미분을 계산하기 위해서는 전미분(material derivative) 방법을 이용하는데, 이는 초기 상태 \mathbf{x} 에서 \mathbf{x}^r 로 형상이 약간 변화되는 상황을 Fig. 2 에서와 같이 속도장 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 를 도입하여 기술하는 것이다. 여러가지 전미분 공식을 이용하여 변분방정식에 대해 전미분을 행하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$a(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) = l'(\bar{\mathbf{z}}; \mathbf{V}) - a'(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}; \mathbf{V}) \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} l'(\bar{\mathbf{z}}; \mathbf{V}) &= \int \left(\dot{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{z}} + \dot{m}\bar{\varphi} + m\dot{\bar{\varphi}}_1 + (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{z}} + m\bar{\varphi}) DV_s \right) ds + \sum_k \left[\dot{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{z}} + \dot{T}\bar{\varphi} + T\dot{\bar{\varphi}}_1 \right]^k \\ a'(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}; \mathbf{V}) &= \int \left[C(\varepsilon_1 \bar{\varepsilon} + \varepsilon \bar{\varepsilon}_1) + D(\kappa_1 \bar{\kappa} + \kappa \bar{\kappa}_1) + (C\varepsilon \bar{\varepsilon} + D\kappa \bar{\kappa}) DV_s \right] ds \end{aligned} \quad (6)$$

이며 하첨자 1 은 속도장 벡터를 직접 포함하고 있는 변수들만 모아놓은 표현식으로서

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(\mathbf{z}; \mathbf{V}) &= -\varphi DV_n - \varepsilon DV_s \\
\varphi_1(\mathbf{z}; \mathbf{V}) &= \varepsilon DV_n - \varphi DV_s \\
\kappa_1(\mathbf{z}; \mathbf{V}) &= \varphi_{1,s} - \kappa DV_s = \varepsilon_{,s} DV_n - 2\kappa DV_s + \varepsilon DV_{n,s} - \varphi DV_{s,s}
\end{aligned} \tag{7}$$

과 같이 주어진다. 또한 식 (7)에서 $DV_n = V_{k,s} n_k$, $DV_s = V_{k,s} s_k$ 이다. 아치의 미소길이에 있어서 평균응력으로 정의된 응력 범함수를 다음과 같이 고려한다.

$$\Phi_s = \int_{l_\varepsilon} \sigma ds / \int_{l_\varepsilon} ds = \int_{l_\varepsilon} \sigma ds / l_\varepsilon \tag{8}$$

응력은 두께 방향으로도 변화하기 때문에 이의 고려가 추가되어야 하는데 두께 방향의 하단과 상단 응력이 중요하므로 이들 두 부위에 대해서만 다음과 같이 고려한다.

$$\sigma(\mathbf{z}; \pm h/2) = E \left(\varepsilon \pm \frac{h}{2} \kappa \right) \tag{9}$$

여기서 \pm 가 바로 하단과 상단을 의미하며, ε 과 $h/2\kappa$ 는 각각 축방향 및 굽힘방향 하중으로 인한 변형률을 의미한다. 응력 범함수에 대해 전미분을 행하고 여기서 나타나는 변위 전미분 $\dot{\mathbf{z}}$ 를 소거하기 위해 다음과 같은 변분방정식의 해로 정의되는 보조변수 \mathbf{z}^* 를 도입한다.

$$a(\mathbf{z}^*, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{l_\varepsilon} \sigma(\bar{\mathbf{z}}) ds \tag{10}$$

그렇게 되면 식 (5) 및 (10)으로부터 $\dot{\mathbf{z}}$ 를 소거하여 다음과 같이 계산 가능한 민감도 공식을 얻게 된다.

$$\Phi' l_\varepsilon = l'(\mathbf{z}^*; \mathbf{V}) - a'(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*; \mathbf{V}) + R(\mathbf{V}) \tag{11}$$

여기서 $R(\mathbf{V})$ 는 앞에서와 같이 속도장 벡터를 직접 포함하고 있는 변수들만 모아놓은 표현식으로서 다음과 같다.

$$R(\mathbf{V}) = \int_{l_\varepsilon} E \{ \varepsilon_1(\mathbf{z}; \mathbf{V}) \pm \frac{h}{2} \kappa_1(\mathbf{z}; \mathbf{V}) \} ds + \int_{l_\varepsilon} (\sigma - \Phi) DV_s ds \tag{12}$$

3. 상용 소프트웨어를 이용한 설계 민감도 계산 및 최적화

구조설계와 관련하여 최근 들어 최적화 기능을 추가하거나 이것만 전용으로 갖춘 상용 소프트웨어들을 많이 찾아 볼 수 있다. 그러나 이들 중 대부분은 아직 활발한 사용이 안되고 있는 실정인데 그 주된 이유는 유한차분법을 전적으로 또는 부분적으로 사용하여 계산된 민감도의 부정확성 때문이며 이로 인해 수렴이 안되거나 매우 많은 반복계산이 소요되기 때문이다. 본 논문에서는

상용 소프트웨어 ANSYS 버전 5.5 를 사용하여 구조해석을 하였으며 민감도 해석 코드는 ANSYS 의부에서 Visual FORTRAN⁽¹¹⁾을 도구로 하여 작성하였고 특정 아치 문제에 상관없이 계산되도록 코드를 일반화하여 작성하였다. 설계변수 벡터를 \mathbf{b} 라 할 때 속도장 벡터는 유한차분을 통해 다음과 같이 근사적으로 계산하였다.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}; b_i) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_i} = \frac{1}{\Delta b_i} \{ \mathbf{x}(\mathbf{b} + \Delta b_i \mathbf{e}_i) - \mathbf{x}(\mathbf{b}) \} \quad (13)$$

여기서 \mathbf{e}_i 는 i 번째 설계변수 방향으로의 단위벡터를 의미한다. 이 방법을 이용하면 해석모델의 모든 절점에서 속도 벡터 값을 손쉽게 그리고 설계변수가 무엇이든지 상관없이 일반적으로 계산할 수 있다. 아치 해석을 위해 ANSYS 의 BEAM3 요소를 사용하였는데 이 요소는 직선요소로서 축방향과 수직방향의 변위 u 와 w 를 직선 및 Hermite 형상함수를 통해 표현한다. 보조변수의 해는 변분방정식 (10)을 이용해야 하는데, ANSYS 에서 이를 활용하기 위해 이 식을 푸는 것과 동등한 하중을 정의하여 ANSYS 내에서 자동으로 해석이 되도록 하였다. 동등한 하중은 가중잔여 방법을 사용하여 계산이 가능하며 식이 다음과 같다.

$$\int_{\epsilon} \sigma(\bar{\mathbf{u}}) ds = \int_{\epsilon} E \left(\bar{u}_{,s} + H\bar{w} + \frac{h}{2} \bar{\phi}_{,s} \right) ds = \sum_k [P^* \bar{u} + Q^* \bar{w} + M^* \bar{\phi}]^k \quad (14)$$

4. 아치 구조물의 형상 최적화

민감도 계산 결과로부터 기울기정보에 기반을 둔 최적화 알고리즘을 이용하여 형상최적화를 수행하였다. 본 문제에서는 목적함수를 총 아치 길이가 일정한 조건 하에서 응력을 되도록 균일화하는 문제만을 고려하였다. 최적화 루틴 IDESIGN 에서 제한조건의 허용 위반값과 수렴조건값을 각각 5.e-3 과 1.e-3 으로 하였다.

문제 1: 원형 아치의 형상 최적화

Fig. 3 과 같이 1/4 원 형상의 아치가 우측단은 단순지지, 좌측단은 대칭조건으로 인해 x 방향 변위와 회전이 구속되었다. 아치의 형상은 유리포물곡선(rational parabolic curve)으로서 3 개의 조정점과 3 개의 가중치에 의해 정의하였다. 초기 형상은 조정점이 각각 (100,300), (300,300), (300,100) 이고 가중치는 $1, 1/\sqrt{2}, 1$ 인데 이는 완벽한 원에 해당한다. 이러한 형상에 대해 10 개의 유한

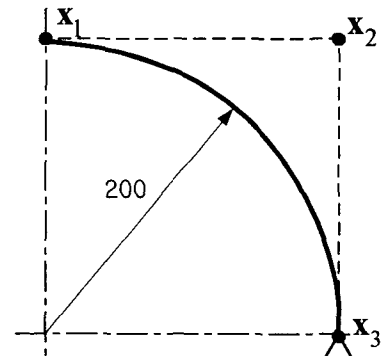


Fig. 3 Circular arch problem

요소를 생성하고 설계변수는 y_1, y_2 및 w_2 의 3개를 선정하였다. 두개의 하중조건을 고려하였는데 하나는 좌측단에 집중하중 $200 N$ 이 아래 방향으로 가해진 경우로서 최적화를 수행한 결과 반복회수 8번 만에 해를 구하였다. 그 결과 Fig. 4와 같이 최적형상은 직선으로 수렴함을 발견했는데 이는 좌굴조건이 고려되지 않은 경우 당연한 것이다. 응력값은 초기의 최대 $686 N/mm^2$ 에서 매우 균일한 압축응력인 $-25 \sim -27 N/mm^2$ 로 수렴하였다. 다른 문제는 단위 크기 $2 N/mm$ 의 자중이 가해진 경우인데 최적형상이 Fig. 5와 같이 27회 반복만에 구해졌다. 최대응력은 초기 372에서 $95 N/mm^2$ 로 감소하였다. 응력과 수렴변수 이력을 보면 약 5회를 지나면서부터 응력의 수렴속도가 매우 완만하게 이루어지고 있어 수렴까지 반복회수가 전 문제에 비해 매우 많았다.

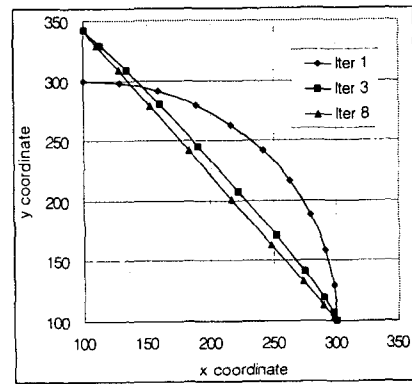


Fig. 4 Optimum shape of circular arch under concentrated force

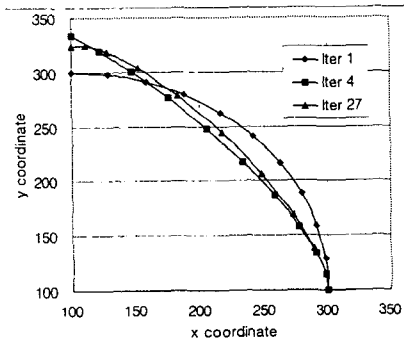


Fig. 5 Optimum shape of circular arch under self weight

문제 2: 다리구조물의 형상최적화

Fig. 6과 같은 대칭형 다리 구조물의 우측반에 대해 형상최적화를 고려한다. 우측단은 y 방향으로만 구속된 단순

지지 상태이다. 좌측단 두 곳은 앞의 문제와 같이 대칭조건으로 인해 x 변위와 회전이 구속된다. 상부 아치는 4개의 절점 x_1, x_2, x_3 및 x_7 을 통과하는 스플라인 곡선으로 표현되며 두개의 기둥보를 이용하여 상부 아치와 하부 보를 연결하였다. 총 길이는 $250 mm$, 초기상태에서 두개 기둥의 높이는 $100 mm$ 이다. 하중은 크기 $2 N/mm$ 의 자중만을 고려했다. 여기서 결정해야 할 설계변수는 점 1의 높이 y , 점 2,3의 좌표 (x, y) 로서

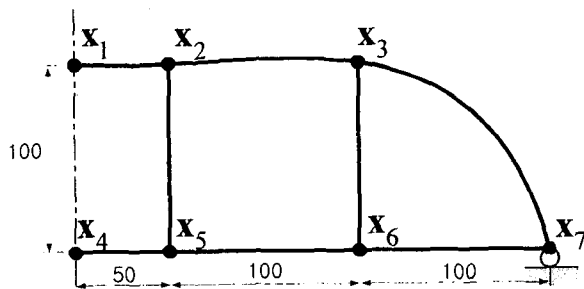


Fig. 6 Bridge structure problem

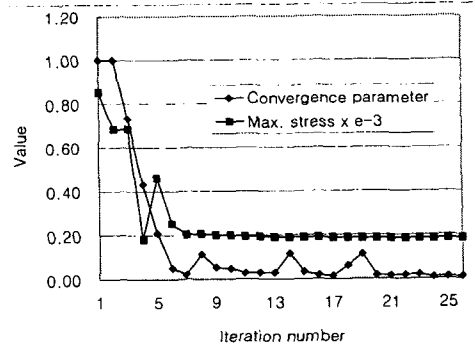


Fig. 7 Iteration history of bridge structure

총 5 개이다. 3 개의 유한요소가 점과 점 사이에 형성된 모든 마디에 생성되도록 하였다. 다만 좌측 하단에 있는 수평 마디보에만 1 개의 요소를 부과하였다. 본 문제에 대해 최적화를 행한 결과 여기서는 수렴조건 1.e-3 도달에 실패하였으며 그 이력을 Fig. 7 에 보였다. 그러나 최대응력이 853 에서 187 N/mm^2 로 감소한 데다가 약 9 회 이후부터 그 크기가 거의 변하지 않음

을 보면 수치해석의 한계로 인한 것일 뿐 문제 자체가 수렴 안 되는 것이 아님으로 판단되었다.

초기 및 최적형상을 Fig. 8 에 보였으며, 이로부터 최적형상은 비교적 실제 다리에서 볼 수 있는 매끄러운 형상을 하고 있음을 알 수 있다.

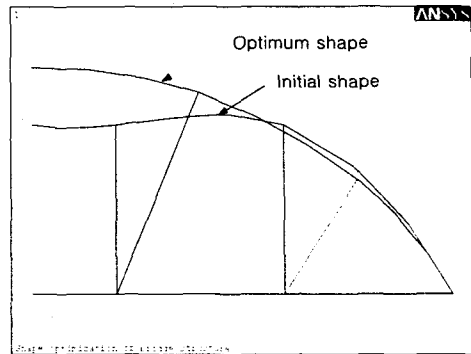


Fig. 8 Optimum shape of bridge structure

5. 토의 및 결론

본 논문에서는 선형 탄성조건 하에서 곡선보의 변분방정식을 활용하여 2 차원 아치구조물의 설계민감도를 구하는 방법을 소개하였다. 민감도의 유도를 위해 전미분 방법을 활용하였으며 형상의 표현과 형상변화의 표현이 일반적으로 기술되었기 때문에 형상의 제약이 없이 복잡한 아치 구조물에 쉽게 적용이 가능하다. 이는 기존 문헌에서 얇은 아치나 수직방향 형상변화만 고려한 것과 비교할 때 매우 큰 장점을 가진다. 또한 유도된 민감도 표현식은 거의 변형률의 단순 연산조합 형태로 나타나 있기 때문에 유한요소해석 결과로부터 변형률만 알면 추가 작업 없이 손쉽게 계산이 가능하다. 이 역시 기존문헌에서 민감도 계산을 위해 변형률을 가지고 무려 3 차 수치미분 까지 행해야 했던 것과 비교하면 큰 이점이다.

본 연구에서는 해석을 위해 ANSYS 를 사용하였고, BEAM3 직선요소를 채택하였다. 따라서 민감도 계산시 곡률영향이 없어져 계산이 더욱 단순해 진다. 그러나 민감도 공식은 선형요소에만 국한되지 않고 일반적인 곡선요소라 하더라도 문제없이 계산 가능하다. 본 연구를 위해 민감도 해석과 형상 최적화의 제반 과정을 최대한 쉽고 효율적으로 수행하기 위한 시스템을 구성하였는데 특정 문제를 고려할 때 마다 민감도 계산 루틴을 수정하거나 작성할 필요가 없도록 일반화하였다. 따라서 최적화 수행을 위해서는 단지 통상의 해석 매치럼 ANSYS 해석을 위한 유한요소모델 생성, 해석 및 후처리 용 파일 만 작성하면 된다. 따라서 본 시스템은 ANSYS 의 편리함과 민감도해석의 정확함을 결합한 매우 효율적인 최적화 프로그램일 뿐 아니라 최적화 전문가가 아니라도 변수를 사용한 ANSYS 해석만 할 수 있으면 본 시스템을 통해 손쉽게 최적설계를 수행할 수 있다. 몇가지 예제를 통해 본 방법의 민감도 정확성, 유한차분과의 특성비교, 그리고 실제 형상최적화 결과

를 보임으로써 본 방법이 복잡한 아치 구조물에 대해 효율적 형상최적화를 할 수 있음을 입증하였다.

참고 문헌

1. Haftka R.T. and Gurdal Z., **Elements of Structural Optimization**, Kluwer Academic Publishers, 1992.
2. Haug E.J., Choi K.K. and Komkov V., **Design Sensitivity Analysis of Structural Systems**, Academic Press, New York, 1986.
3. Dems K. and Mroz Z., "A variational approach to sensitivity analysis and structural optimization of plane arches," *Mech. Struct. & Mach.* 15 (1987) 297-321
4. Dopker B., Choi K.K. and Benedict R.L., "Shape design sensitivity analysis of structures containing arches," *Comput. Struct.* 28 (1988) 1-13.
5. Chenais D., Rousslet B. and Benedict R., "Design sensitivity for arch structures with respect to midsurface shape under static loading," *J. Opt. Theory & Appl.* 58 (1988) 225-239.
6. Kim I.Y. and Kwak B.M., "Shape design sensitivity analysis and optimization of general shape arches," *Comput. Struct.* 48 (1993) 1025-1031.
7. Habbal A., "A direct approach to the minimization of the maximal stress over an arch structure," *J. Opt. Theory & Appl.* 97 (1998) 551-578.
8. **ANSYS Help System**, Release 5.5, SAS IP, 1998.
9. Arora J.S. and Tseng C.H., **User's Manual for IDESIGN: version 3.5**, Optimal Design Lab., Univ. of Iowa, 1986.
10. Cook R.D., Malkus D.S. and Plesha M.E., **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, John Wiley & Sons, 1989.
11. Digital Visual Fortran Version 6.0 Home Page, Digital Equipment Corporation, 1998.