한국전산구조공학회
2000년도 가을 학술발표회 논문집

다분야 최적화에서의 근사모델 관리기법의 활용
Managing Approximation Models in Multidisciplinary Optimization

양 영순* 장 범선** 정 현승** 연 윤석***
Yang, Young-Soon Jang, Beom-Seon Jung, Hyun, seung Yeun, Yoon-Suk

ABSTRACT

In system design, it is not always possible that all decision makers can cooperate fully and thus avoid conflict. They each control a specified subset of design variables and seek to minimize their own cost functions subject to their individual constraints. However, a system management team makes every effort to coordinate multiple disciplines and overcome such noncooperative environment. Although full cooperation is difficult to achieve, noncooperation also should be avoided as possible. Our approach is to predict the results of their cooperation and generate approximate Pareto set for their multiple objectives. The Pareto set can be obtained according to the degree of one's conceding coupling variables in the other's favor. We employ approximation concept for modelling this coordination and the mutiobjective genetic algorithm for exploring the coupling variable space for obtaining an approximate Pareto set. The approximation management concept is also used for improving the accuracy of the Pareto set. The exploration for the coupling variable space is more efficient because of its smaller dimension than the design variable space. Also, our approach doesn't force the disciplines to change their own way of running analysis and synthesis tools. Since the decision making process is not sequential, the required time can be reduced comparing to the existing multidisciplinary optimization techniques. This approach is applied to some mathematical examples and structural optimization problems.

1. 서론

거대한 규모의 공학 설계 문제는 보다 다루기 쉬운 더 작은 크기의 문제들로 분해되어 해결된다. 각 부문제들은 상호 의존적이므로 여러 분야 전문가들의 공동 작업이 필요하게 된다. 이러한 거대한 시스템에 대한 다분야 설계 최적화 문제는 분야들간의 연성과 다목적, 많은 설계변수들과 제한조건으로 특징지어지며 다분야간의 연성은 설계팀의 동시 작업을 방해하는 요인이 된다.

지금까지 이러한 다분야의 해석과 설계 과정을 수학적으로 통합하려는 많은 연구가 수행되어 왔다. 그 중 다분야의 자율성이 가장 강조되었다고 평가되는 다분야 최적화 기법으로는 Collaborative Optimization(CO)[1]나 Optimization by Linear Decomposition (OLD)[2]가 있다. CO

* 서울대학교 조선해양공학과 교수
** 서울대학교 조선해양공학과 박사과정
*** 대진대학교 기계공학과 교수

기법을 바탕으로 다목적을 처리하는 세 가지 전략에 대해 고찰, 비교한 연구도 수행되었다.[3] 세 전략은 기본적으로 다목적의 간의 trade-off를 위해 가중치 방법(weighting method)을 사용하였으며, 목적함수 값을 알고리즘 상에서 어떻게 계산하고 결정하느냐, 그리고 그에 따라 민감도 해석이 어떻게 달라지느냐에 따라 구분된다. 하지만 CO, OLD 기법을 이용한 최적화 과정은 하나의 블랙박스처럼 설계자의 접근이 어려우며 어느 정도의 계산이 반복된 후 종료될지도 예측하기 어렵다는 단점이 있다. 또한 상위 시스템의 최적화와 하위시스템의 최적화가 종속적으로 연결되어 있어 그 계산과정도 순차적으로 이루어져야 한다. 물론 하위시스템들은 분산환경 하에 동시 계산이 가능하긴 하지만 상하위 간에는 연성변수 값을 서로 전달해야하기 때문에 순차적으로 수행되어야 한다. 하나의 최적화 문제로 통합되어야 하기 때문에 모든 분야는 수학적인 최적화 문제 정식화되어야 하며 이것이 다분야 최적화를 실제 문제에 적용하는데 하나의 걸림돌이 된다.

다분야간의 상호 작용을 게임이론에 기초해 모델링 한 시도도 있다.[4],[5] 게임이론의 대표적인 전략으로는 full cooperation, noncoopertion leader/follower 전략이 있다. 이 중 leader/follower 전략이 각 분야의 자율성을 가장 강조하며 비교적 효과적인 방법으로 알려져 있다. 이 방법은 먼저 leader가 결정하여 넘겨주는 다양한 연성변수에 대한 follower의 반응, 즉 follower의 Rational Reaction Set (RRS)을 구한다. 다음 이를 통하여 leader는 follower가 어떤 결정을 내릴 것인가를 예상하여 결정하는 것이다. 각 player들은 주어진 환경에서 자신의 이익을 극대화하려는 방향으로 움직이려 한다는 것이 follower/leader 이론의 전제가 된다. Follower는 leader가 넘겨주는 연성변수에 대해 자신의 목적함수를 최소화시키는 전략으로 대처하고 마찬가지로, leader 역시 follower가 자신에게 어떤 연성변수 값을 전달할지를 가정하여 자신의 목적함수를 최소화하는 결정을 내리게 된다. 하지만 follower 와 leader 사이에 양보와 타협이 존재하지 않는다는 것이 문제점이 된다. 때문에 양보를 통해 서로에게 더 좋은 결과를 제공할 수 있는 기회를 놓치게 되며 또한 목적함수들에 대한 의사 결정자의 가치 판단을 유연하게 설계에 반영할 수가 없다.

본 연구의 목적은 각 분야의 독립성을 가능한 유지하며 동시에 계산 시간과 비용을 줄이기 위한, 근사기법을 이용한 다목적 다분야 최적 설계 방법론을 개발하는 것이다. 각 분야의 독립성을 도모함은 기존 설계 방법을 그대로 활용하기 위함이다. 즉 각 분야의 전문가에 의한 의사결정 구조를 그대로 유지할 수 있으며, 독자적인 해석, 설계 방법의 큰 변경 없이 다분야 최적화를 수행 가능하도록 하는 것이다.

기존의 다분야 최적화 기법과 다른 점은 첫째, 다목적에 대한 Pareto set을 확보하는 데 있다. 기존 다분야 최적화 방법에서는 단일 목적에 대해 적합하도록 개발되었기 때문에 다목적에 대해서는 가중치 방법과 같이 단일 목적화하여 접근한다. 이러한 접근은 Pareto set을 얻어내는데는 유전자 알고리즘과 같은 집합 단위로 찾아가는 방법보다는 계산상 불리한 점이 많다. 본 연구에는 다목적 유전자 알고리즘(MultiObjective Genetic Algorithm :MOGA)을 다분야 최적화에 도입해 보다 효율적으로 Pareto set을 얻고자 한다. 둘째, 필요한 계산 시간과 비용을 축소하기 위해 근사기법을 도입하는 것이다. 다단계 최적화에서 하위 분야의 최적화 수행을 근사모델로 대체함으로써 계산 시간과 비용을 축소하고 더불어 최적화 과정의 순차적인 흐름을 최소화하고 이기종의 계산 환경에서도 적용 가능하게 한다.

2. 다분야간의 타협적 전략

본 연구의 개념적 착상은 게임이론의 follower/leader 전략에서 follower의 RRS(Rational

Reaction Set)를 근사적으로 모델링하는데서 비롯되었다. 이 전략에서는 leader가 넘겨줄 몇 개의 연성 변수 값에 대해 follower의 RRS를 구해 이를 표본점으로 근사모델을 구축하는 것이다. 이 방법에 의해 얻어진 해는 Pareto line 상에서 벗어난 곳에 위치할 수도 있다. 각 player(or discipline)는 자신의 이익만을 따라 결정을 내리기 때문이다. 하지만 각각이 연성 변수에 대해 상대방을 위하여 양보를 하게 되면 follower/leader 전략에 의한 해보다 서로에게 동시에 이익이 되는 타협점을 찾을 수 있다. 문제는 연성 변수에 대해 각각 얼마나 서로 양보를 해야 Pareto line상에 놓이게 될지, 또 그 선상의 어느 위치에 놓이게 될지 알 수 없다는 것이다. 게임이론의 현실 적용의 유리함을 그대로 살리면서 이러한 문제점을 해결하기 위해 어떠한 전략을 세울 것인가에 대해 다음에 논의하고자 한다.

첫째, 어느 분야(player or discipline)가 얼마나 타협할 것인가를 결정하기 위해서는 연성변수공간에 대한 탐색이 필요하다. 연성변수 공간의 한 점은 각 분야가 제공받고 또 만족시켜야 하는 연성변수 값들을 나타낸다. 연성변수 공간의 한 점에 대해 각 분야는 주어진 타협을 만족시키면서 동시에 최선의 목적함수와 위반하는 제한조건의 값을 제공한다. 이러한 입출력 관계를 바탕으로 연성변수를 설계변수로 하고 다분야의 목적함수에 대한 Pareto set을 구하는 상위의 단계가 필요하다. 기존의 다목적 최적화 문제에서의 탐색 대상은 설계변수 공간인데 비해 이 최적화 문제는 연성변수 공간이 탐색대상이 된다.

둘째, 최적화의 현실적인 적용을 위해서는 각 분야의 독자적인 설계방식을 큰 수정 없이 수용할 수 있어야 한다. 각 분야는 주어진 조건을 만족시키면서 동시에 자신에게 최대한 유리하도록 결정하는 나름대로의 방법을 확보해 두고 있다. 그것은 최적화가 될 수도 있지만 기존의 설계 데이터를 적절히 변경하는 상사 설계가 될 수도 있고, 혹은 실험에 의한 방법일 수도 있다. 이처럼 몇몇 분야는 전산화에 의한 자동화가 이루어져 있지 않을 수도 있어 다른 분야보다 상당히 많은 시간을 필요로 하는 경우도 있다. 이 점은 다분야 혹은 다단계 최적화를 현실에 바로 적용시키는데 하나의 걸림돌이 되고 있다. 이러한 문제점을 완화하기 위해 본 연구에서는 근사기법에 의한 접근을 시도한다. 각 분야는 자신에게 입력되고 출력하는 다양한 연성변수 값을 가정하고 설계를 수행하여 자신의 최선의 목적함수 값이 얼마인지, 어쩔 수 없이 어떤 제한조건을 위배하게 되는지 등을 미리 평가해보는 것이다. 이 결과들을 상위 단계에서 모아 근사모델을 구축하여 이를 다목적 최적화에 이용하는 것이다. 이러한 과정은 다단계 최적화 방법에서 상위 단계와 하위단계의 설계가 순차적으로 수행됨으로써 비롯되는 시간적 지연을 최소화할 수 있는 장점이 있다. 시간적인 구속을 피할 수 있기 때문에 사전에 충분히 simulation을 해 볼 수 있어 근사기법의 오차를 줄일 수 있고 설계 결과에 대한 검증도 할 수 있게 된다. 또한 근사모델의 오차를 효율적으로 줄이기 위해 근사모델을 계속적으로 수정해가는 근사모델 관리기법도 이용하고자 한다.[(6),(7)] 다목적 처리를 위해 사용되는 다목적 유전자 알고리즘으로부터 얻어지는 Pareto set을 활용해 새로운 표본점을 선정하고 이를 근사모델의 정확도를 향상시키는데 활용한다. 반대로 유전자 알고리즘은 향상된 근사모델을 활용해 보다 정확한 Pareto set을 얻을 수 있게 된다. 이러한 과정을 그 결과가 수렴할 때까지 반복하는 것이다.

다음은 좀더 구체적으로 이러한 전략이 구체적으로 어떻게 진행되는지 단계별로 살펴보자.

3. Adaptive Approximation in MutiDisciplinary optimization(AAMDO)

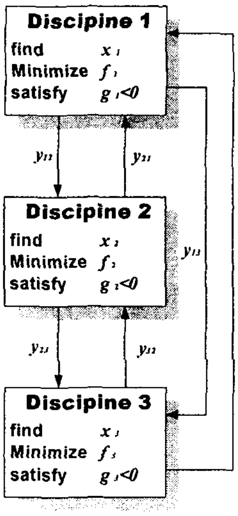

Fig. 1 Three Disciplines

그림 1과 같은 세 개의 분야로 이루어진 다분야 다목적 문제를 예로 들어보자. 각 분야는 결정해야 할 고유의 설계변수와 제한조건 및 목적함수를 가진다. 제한조건과 목적함수는 각각의 설계변수뿐만 아니라 연성변수들의 함수이기 때문에 각 분야는 독립적으로 결정될 수 없다. 본 연구에서는 이러한 다분야 다목적 문제에 대해 근사모델 관리기법을 도입해 Pareto set과 그에 대응하는 연성변수 값을 결정하고자 한다. 이러한 방법을 편의상 Adaptive Approximation in MultiDisciplinary optimization (이하 AAMDO)라고 하자. 다음은 구체적인 과정을 기술한 것이다.

Step 1. 어떤 분야(D_i)는 다른 분야로부터 전달받는 연성변수(y_{ji})에 대해 자신의 제한 조건을 만족하면서 목적함수 측면에서 가장 유리한 값(y_{ji}^{i*})을 정한다.

Step 2. 어떤 분야(D_i)는 자신에게 유리한 연성변수 값(y_{ji}^{i*})이 주어졌다고 가정하고 자신의 목적함수(F_i)를 최적화 할 수 있는 자신의 설계변수(x_i)를 구하여, 다른 분야로 넘겨줄 연성변수(y_{ij})에 대해 그때의 값들(y_{ij}^{i*})을 계산한다. 이때 이 연성변수 값들은 철저히 D_i 에 유리하도록 결정된 연성변수 값들로서 $y^{i*}=(y_{ij}^{*}, y_{ji}^{*})$로 정의한다. 마찬가지로 모든 분야에 대해 각각에 대해 가장 유리한 연성변수 값들을 구한다. 이 값들을 모아 각 연성변수에 대한 상하한(y_{ij}^{u}, y_{ij}^{l}) 값을 결정한다. 이렇게 연성변수의 상하한 값으로 결정되는 공간을 y라고 하자. 목적공간의 모든 Pareto optimal set은 연성변수의 공간(y)안에 있는 어떤 연성변수들의 값으로 매핑될 것이다.

Step 3. 연성변수 공간(y)에서 적절한 실험계획법을 이용해 표본점을 결정한다. 이 표본점들에 의해 결정된 연성변수 값들은 각 분야들이 지켜야 할 타협의 약속이다. Pareto line은 어느 하나의 분야에서 유리한 연성변수의 값에서 서서히 다른 하나의 분야의 타협으로 이동해 가며 형성될 것이다. 따라서 목적함수와 연성변수가 monotonic한 관계일 경우 Pareto surface의 모서리는 각 분야의 y_{ij}^{i*}에 대응될 것이다.

Step 4. 각 표본점이 제시하는 값(y_{ji}^{s})을 받아 자신이 제공해야 할 연성변수값(y_{ij}^{s})을 만족시키면서 자신의 목적함수를 최적화하는 설계점을 정하고 그때의 목적함수 값을 계산한다. 이때 어떤 표본점에 대해서 어떤 분야는 자신의 제한조건 (g_i) 때문에 다른 분야에 제공해야 할 연성변수 값 (y_{ij}^{s})을 계산하지 못하는 경우가 발생할 것이다. 바로 이런 제한조건은 우리가 연성변수 공간을 제한하는 제한조건이 되는 것이다. 각 분야는 모든 표본점에 대해 다음와 같은 최적화 문제를 풀

고 이때 어느 하나의 표본점에 대해서라도 만족하지 않는 제한조건은 그 위반량을 구한다.

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad w_1 MAX(0, d_i) + w_2 F_i(x_i, y_{ji}^s), \quad (w_1 \gg w_2)\\&\text{subject to} \ \ g_i(x_i, y_{ji}^s) \le d_i, \ \ y_{ij} = y_{ij}^s\\&\text{find} \ \ x_i\end{aligned}$$

이 때 위반하는 제한 조건의 수가 너무 많을 경우 제한조건 전체에 대한 MAX norm이나 KS norm 혹은 *lp* norm을 구한다[8].

Step 5. 4에서 얻어진 각 표본점을 입력으로 하고 그에 상응하는 각 분야의 목적함수 ($F_1, \ldots, F_n$) 값과 위반되는 제한조건(g_i^v) 이나 이들 전체에 대한 norm을 출력으로 하는 각각의 근사모델들($a^{F_1}, \ldots, a^{F_n}$, $a^{g_i^v}$)을 구축한다.

Step 6. 근사모델을 활용해 MOGA를 통해 다음과 같은 다목적 문제를 푼다.

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \ \ a^{F_1}(y_{ij}), \ldots, a^{F_n}(y_{ij})\\&\text{subject to} \ \ a^{g_i^v}(y_{ij}) \le 0,\\&\text{find} \ \ y_{ij}\end{aligned}$$

본래 각 목적함수나 제한 조건은 연성변수 외에 그 분야의 독립적인 설계변수의 함수이다. 하지만 4와 같은 최적화 과정을 통해 이런 독립적인 변수들은 상수처럼 취급되는 것이다.

Step 7. 이때 정확한 Pareto set을 구하기 위해서 근사모델을 계속 업데이트 해 가는 Adaptive Approximation in Multiobjective Optimization (AAMO)[6]을 수행한다. 이 방법을 이용하면 비교적 적은 표본점으로 더 정확한 Pareto set을 얻을 수 있다. 특히 연성변수 공간에서 Pareto set에 대응되는 점은 상당히 한정된 공간상에 위치하기 때문에 좋은 효과를 얻을 수 있을 것이다. 그림 2는 지금까지의 과정, Step1에서 Step 7까지의 과정을 보여주고 있다.

Step 8. 이렇게 얻어진 Pareto solution 중 한 점(F_i^o)을 선택하고 이에 대응되는 연성변수 값 (y_{ij}^o)을 결정한다.

Step 9. 앞에서 결정된 연성변수 값(y_{ij}^o)을 만족하도록 하면서 각 분야는 자신의 제한조건을 만족시키고 자신의 목적함수를 최소화하는 설계 변수 값을 결정한다.

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad F_i(x_i, y_{ji}^o)\\&\text{subject to} \ \ g_i(x_i, y_{ji}^o) \le 0, \ \ y_{ij} = y_{ij}^o\\&\text{find} \ \ x_i\end{aligned}$$

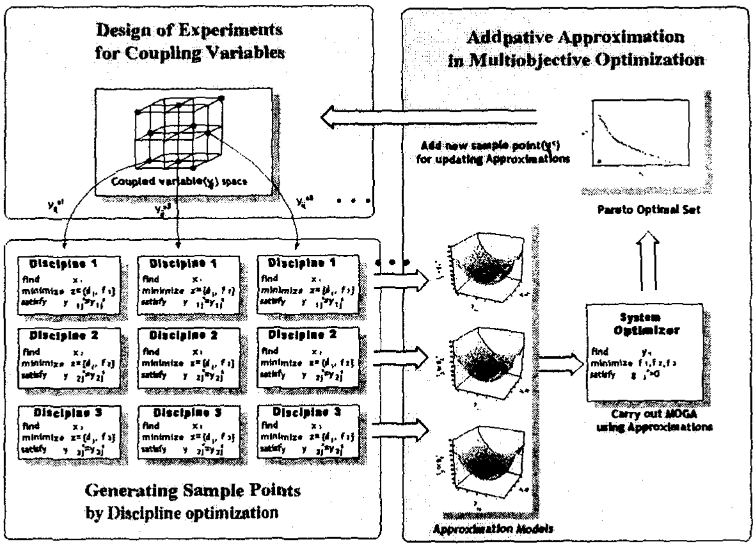

Fig. 2. Procedure of AAMDO

4. Two-member Hub Frame Example

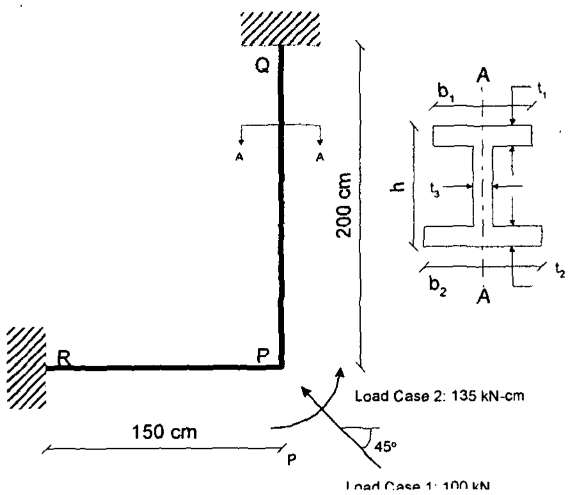

Fig 3. Two-member hub frame

그림 3과 같은 two-member hub-frame 문제를 생각해보자. 전체 부피와 절점 P에서의 translational 변위를 최소화하는 다목적 문제이다. 제한 조건은 절점 P에서의 변위 제한조건과 각 부재에서의 응력과 좌굴 제한조건으로 총 50개가 있다. 설계 변수는 그림과 같이 각 부재 당 단면의 형상을 정의하는 6개의 변수로서 모두 12개이다. 이 문제는 다음과 같은 세 분야로 나눌 수 있다.

Discipline 1 : frame analysis of the entire hub.
Discipline 2 : analysis of member PQ.
Discipline 3 : analysis of member PQ.

표 1은 각 분야의 설계변수와 제한조건 그리고 목점함수에 대한 정의가 기술되어 있다. 이 표에서 N, M, V는 각각 각 부재의 절점 P에서의 축력, 굽힘 모멘트, 전단력에 해당되며 A와 I는 부재의 단면적과 2차 관성 모멘트에 해당된다. Discipline 1의 경우 최적화되어야 할 설계 변수가 없기 때문에 이에 해당하는 discipline-level optimization이 필요 없다. 또한 Discipline 2와 3에 대한 discipline-level optimization을 하기 전에 hub frame에 대한 구조해석을 먼저 수행하고 그 해석 결과를 Discipline 2와 3에 전달하는 순차적 과정을 거침으로써 연성변수 y_{12}^*와 y_{13}^*를 제거할 수 있다. AAMDO의 정식화는 다음과 같다.

Table 1. Variables and functions for hub problem

variable function	Content
x :	empty set
x_1 :	empty set
x_2 :	{b_1, b_2, t_1, t_2, t_3, h for member PQ}
x_3 :	{b_1, b_2, t_1, t_2, t_3, h for member PR}
g_1 :	{displacement constraint at node P}
g_2 :	{stress and buckling constraints for member PQ}
g_3 :	{stress and buckling constraints for member PR}
f_1 :	{volume of the entire hub}
f_2 :	A for member PQ
f_3 :	A for member PR
y_{12} :	{N, M, V for member PQ for each loading case}
y_{13} :	{N, M, V for member PR for each loading case}
y_{21} :	{A, I for member PQ}
y_{13} :	empty set
y_{23} :	{A, I for member PR}
y_{31} :	empty set

System-level optimization problem

Find : y_{21}^*, y_{31}^*

Minimize : a^{f_1}, $f_2 L_{PQ} + f_3 L_{PR}$

Satisfy : $a^{d_2} < 0$, $a^{d_3} < 0$

Discipline-level optimization problem

Find : x_2, d_2

Minimize :

$$w_1 MAX(0, d_2) + w_2 f_2 \quad (w_1 \gg w_2)$$

Satisfy : $g_2 < d_2$, $|y_{21} - y_{21}^*| = 0$

a^{f_1}, a^{d_2}, a^{d_3}는 각각 f_1, d_2, d_3에 대한 근사모델이다. 근사모델로는 interplotive 기법의 일종으로 근사모델 관리기법에 유리한 Kriging을 사용하였다.[8] 전체 부피는 단순히 연성변수 y_{21}^*, y_{31}^*인 A_1, A_2의 명확히 표현되는 선형 합이므로 근사모델을 쓰지 않았다. d_2는 제한 조건 g_2에 대한 max norm이며 discipline-level optimization 에서는 목적함수 보다 제한조건의 만족에 우선순위를 두게 하였다.

이 예제는 discipline-level의 설계 변수 수에 비해 system-level의 변수 수가 크게 적지 않기 때문에 다단계 최적화(multi-level optimization)에 의한 방법이 단일 단계 최적화(single-level optimization or Standard Optimization)보다 시간 면에서 오히려 불리한 문제로 알려졌다.[9] 본 연구에서는 이 예제를 통해 AAMDO의 유효성과 함께 다단계 최적화 방법에 비해 보다 효율적임을 확인하고자 한다.

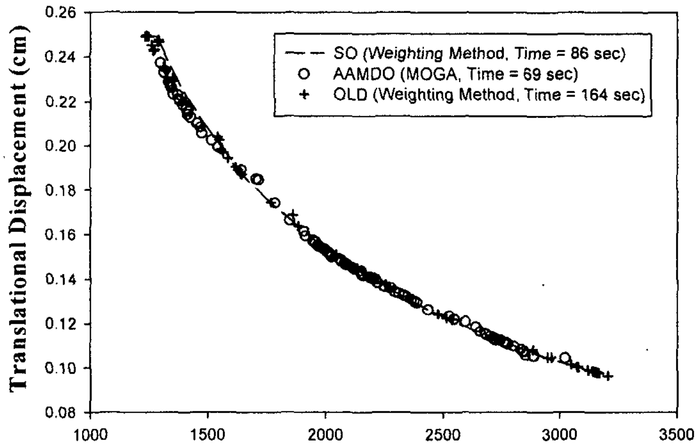

Fig. 4. Comparison of AAMDO results.

그림 4는 AAMDO의 결과를 다목적에 대한 가중치 방법을 사용한 Standard Optimization(SO)의 결과와 다단계 최적화 방법의 일종인 OLD(Optimization by Linear Decomposition)[2]에 의한 결과를 비교하고 있다. 앞에서 언급했듯이 OLD 방법이 SO에 비해 더 많은 시간이 소요되었지만 AAMOD의 결과는 OLD에 비해 더 적은 시간이 소요됨을 확인할 수 있었다. OLD의 경우 설계목적에 대한 가중치를 조금씩 변경해가면서 총 100회의 다단계 최적화를 수행하여 discipline-level의 설계 변수까지

모두 결정하기 때문에 비교적 많은 시간이 소요되었다. 반면 AAMDO는 discipline-level optimization 결과를 근사모델로 근사시켜 대신하게 함으로써 시간 단축 효과를 얻을 수 있었다.

5. 결론

본 연구는 다분야의 다목적에 대해 유전자 알고리즘을 이용하여 효율적으로 Pareto set을 얻을 수 있는 하나의 전략을 제시하였다. 이는 discipline-level optimization에 대해 근사기법을 도입하고 이를 대신 사용함으로써 가능하다. 또한 유전자 알고리즘에서 얻어진 근사적인 Pareto set 정보를 바탕으로 계속해서 근사모델을 수정해가는 근사모델 관리기법을 적용함으로써 결과의 정확도를 높이고자 하였다. 이러한 접근은 기존의 다분야 최적화 기법에 비해 보다 적은 계산 시간과 비용으로 Pareto set을 얻을 수 있을 것이며 다분야의 완전한 통합이 어려운 환경에서도 적용 가능하리라 기대된다. 간단한 two-member hub frame 문제에 적용하였지만 분명한 검증을 위해서는 계속적으로 다양한 예제에 적용해 볼 필요가 있다.

ACKNOWLEDGEMENTS

본 연구는 한국과학재단, KOSEF(1999-2-305-003),과 Brain Korea 21에 의해 지원을 받아 수행되었습니다.

참고 문헌

1. Balling, R. J., and Sobieszcznski-Sobieski, J., "Optimization of Coupled Systems: A Critical Overview of Approaches," AIAA Journal, Vol. 34, No. 1, (1996), pp. 6-17.
2. Sobieszczanski-Sobieski, J., James B. B., and Dovi A. R., "Structural Optimization by Multilevel Decomposition," AIAA Journal, Vol. 23, No. 1, pp. 1775-1782, 1985.
3. Tappeta, Ravindra V., and Renaud, John E., "MultiObjective Collaborative Optimization," 97-DETC/DAC-3772, Proceeding of the 1997 AMSE Design Engineering Technical Conference, September 14-17, 1997, Sacramento, California.
4. Lewis, K. and Mistree, F., "Modelling Interactions in Multidisciplinary Design: A Game Theoretic Approach", AIAA Journal, Vol. 35 (1997), No. 8, pp. 1387- 1392.
5. Rao, J. R. J., Badhrinath, K., Pakala, R., and Mistree, F., "A Study of Optimal Design Under Conflict Using Models of Multi-Player Games," Engineering Optimization, Vol. 28, 1997, pp. 63-94.
6. Yang, Y. S., Jang, B. S. Yeun, Y. S. and Jung, H. S. "A Framework for Managing Approximation Models in place of Expensive simulations in Optimization", Proceedings of the second ASMO UK/ISSMO Conference on Engineering Design Optimization, Swansea, Wales, UK, July 10-11, 2000.
7. A. J. Booker,. J. E. Dennis, Jr., P. D. Frank, D. B. Serafini, V. Torczon, and M. W. Trosset, "A rigorous .framework for optimization of expensive functions by surrogates", Structural Optimization, 17 (1999), pp. 1-13.
8. Balling, R. J., Sobieszczanski-Sobieski, J., "An Algorithm for Solving the System-Level Problem in Multilevel Optimization", Structural Optimization 9, 168-177, 1995.
9. Simpson, Timothy W. 1998a: A Concept Exploration Method for Product Family Design. Phd thesis, Department of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology