

신뢰성 지수의 민감도 해석을 이용한 신뢰성에 기초한 최적설계

Reliability-Based Optimization using Sensitivity Analysis of Reliability Index

조효남* 민대홍** 권우성***
Cho, Hyo-Nam Min, Dae-Hong Kwon, Woo-Sung

ABSTRACT

An optimum design algorithm using efficient reanalysis is proposed for reliability-based optimization problems formulated as the minimization of initial cost and expected failure cost with reliability constraints. The reliability-based optimization is high cost to evaluate objective function and constraints needed reliability analysis. Therefore the sensitivity analysis of reliability index for approximated reanalysis is necessary. In this paper, three solution approaches are suggested and tested. The approaches include : (1) sensitivity analysis using finite difference; (2) sensitivity analysis using automatic differentiation (AD); and (3) sensitivity analysis with respect to intermediate variables using AD. Numerical example is optimized to show the reliability and effectiveness of the new algorithm.

1. 서론

근래까지는 구조물을 설계할 때 초기비용의 최소화만을 국한하여 고려하는 경우가 많았다. 그러나 최근에는 경제성원리에 입각한 총기대비용(Life Cycle Cost)을 고려한 설계가 많이 행해지고 있어 초기비용과 파괴비용간의 적정성을 분석하기 위하여 신뢰성에 기초한 최적설계 또는 총기대비용 최적설계의 필요성이 대두되었다. 하지만 현재 신뢰성에 기초한 최적설계는 기존의 일반적인 최적화 방법을 이용할 경우 많은 수의 구조해석 및 신뢰성해석이 이루어져야 하므로 실질적인 구조물에 적용하기에는 많은 계산비용이 소요된다. 따라서 실제 해석 수를 줄이기 위한 시스템 최적설계 알고리즘이 효과적이며 이를 위해서는 구조응답에 대한 설계변수의 민감도 해석을 이용하는 근사화된 재해석기법이 필수적이다. 설계민감도 해석은 기존에는 해석적 방법과 유한차분에 근거하여 수행되어 왔다. 해석적 방법의 경우 신뢰성 지수에 대한 설계민감도 해석방법이 최근 몇몇 연구자에 의해 제안되었다[11]. 그러나 이러한 방법은 구조해석을 하지 않은 신뢰성해석에 적합하고 실제 구조시스템에 적용하기에는 매우 복잡하여 적합하지 않다. 그래서 유한차분에 의한 방법을 주로 사용하였다.

* 정회원 · 한양대학교 토목환경공학과 교수
** 학생회원 · 한양대학교 토목환경공학과 박사과정
*** 한양대학교 토목환경공학과 석사과정

시스템 최적설계 알고리즘을 제안하였다. 이 알고리즘은 설계변수에 대한 신뢰성 지수의 설계민감도를 이용하는 근사 재해석기법을 사용한다. 따라서 실제적인 구조해석 및 신뢰성해석의 수를 현저히 줄이는 효과를 얻을 수 있어 매우 효과적이다. 이와 같은 시스템 최적설계 알고리즘은 그림 1에 나타내었다.

3. 민감도 해석을 이용한 근사 재해석

본 연구에서 제안하는 시스템 최적설계 알고리즘은 국부최적화방법을 기초로 하기 때문에 국부근사화가 효과적이다. 가장 간단한 국부근사화는 함수값과 설계점에서의 미분값에 기초하는 제약조건에 대한 선형근사화이다. 각각의 요소에 대한 신뢰성 지수를 β 라고 하고 X 가 n 개의 미지수에 대한 설계변수의 벡터라면, β 는 다음의 식 (4)와 같이 근사화할 수 있다.

$$\beta(X) = \beta(X_0) + \nabla\beta(X_0)\delta X \quad (4)$$

여기서, $\delta X = X - X_0$; X_0 는 Taylor전개에서 설계변수의 시점이다. 그리고 ∇ 는 함수의 기울기를 나타낸다. Taylor전개에 추가적인 항을 고려하면 더욱 정확해지기는 하나, 많은 계산비용이 요구되는 고차미분항의 계산을 필요로 한다. 이것은 매우 효율적이지 못하다. 따라서 실제거동에 적합하도록 매개변수를 이용한 함수의 근사화가 더욱 효율적인 방법일 것이다. 일반적으로 매개변수 Y 는 설계변수 X 의 항으로 다음의 식 (5)와 같이 정의할 수 있다.

$$Y = X^\beta \quad (5)$$

여기서, Y 는 매개변수라 불리는 설계변수의 함수이다. 선형근사화함수 $\beta(X)$ 를 다음과 같이 매개변수의 항으로 표현하면 식 (6)과 같다.

$$\beta(X) = \beta(X_0) + \nabla\beta(Y_0)\delta Y \quad (6)$$

여기서, $Y_0 = Y(X_0)$ 와 $\delta Y = Y - Y_0$ 이다. 먼저 제약조건에 대한 요소신뢰성 지수와 같은 구조응답은 구조응답의 특성을 나타내는 매개변수의 항으로 근사화할 수 있다. 따라서 한계상태방정식에 의해 정의된 요소신뢰성 지수와 같은 구조응답은 매개변수를 $Y = X^{-1}$ 를 사용함으로써 근사화시킬 수 있다.

4. 신뢰성 지수의 설계민감도 해석

시스템 최적설계 알고리즘에서 재해석 모듈을 구성하기 위한 가장 중요한 부분이 구조응답에 대한 설계민감도 해석이다. 본 연구와 같은 신뢰성 최적설계에서는 주된 구조응답이 신뢰성 지수이므로 구조시스템에 대한 요소신뢰성 지수의 설계민감도를 해석해야만 된다. 이에 따른 각각의 해석방법을 제시하였다.

4.1 해석적 방법

해석적 방법에 근거한 설계변수 x 에 대한 신뢰성 지수의 민감도는 식 (7)과 같다.

$$\frac{d\beta^J}{dx} = \frac{d\alpha^T}{dx} u^* + \alpha^T \frac{du^*}{dx} \quad (7)$$

본 연구에서는 구조시스템에서의 신뢰성 지수에 대한 설계민감도 해석을 효율적으로 수행하기 위해 해석적 방법의 정확성을 유지하면서 실제 구조해석을 한번만 수행하여도 설계민감도를 얻을 수 있고 중간매개변수에 대한 다양한 설계민감도를 효과적으로 얻을 수 있는 자동미분(automatic differentiation)을 사용하였다. 그리고 구조시스템에 대한 제안된 신뢰성 최적설계 알고리즘의 타당성을 입증하기 위하여 수치해석 예제는 실구조물이 아닌 가상의 구조물로 정하여 수치해석을 수행하였다.

2. 신뢰성에 기초한 총기대비용 최적설계

2.1 문제의 정식화

일반적인 구조물의 최적화에는 구조물의 거동조건과 기하적 조건들을 만족하면서 목적함수를 최소화하는 설계변수를 구하는 문제이다. 하지만 신뢰성에 기초한 설계에서는 구조요소 및 구조시스템이 목표로 하는 파괴확률 또는 신뢰성 지수를 주 제약조건으로 하고 총기대비용을 최소화하는 문제로 정식화된다. 다음은 신뢰성에 기초한 총기대비용 최적설계의 정식화를 나타낸 것이다.

$$\min \rightarrow F(X) = C_i + P_f C_f \quad (1)$$

$$\text{subject to } G_j(X) = \beta_j^0 - \beta_j \leq 0 ; j = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$$X_i^l \leq X_i \leq X_i^u \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

여기서,

$F(X)$ = 목적함수, X = 설계변수 벡터, P_f = 시스템의 파괴확률, C_f = 파괴비용

X_i^l, X_i^u = 설계변수에 대한 상·하한 경계치, β_j = j 번째 구조요소의 신뢰성 지수,

β_j^0 = j 번째 구조요소의 목표 신뢰성 지수

이와 같은 신뢰성에 기초한 총기대비용 최적설계는 목적함수의 파괴기대비용을 산정하기 위한 구조물의 체계 신뢰성해석이 필요하며 제약조건에는 각각의 요소에 대한 신뢰성 지수를 구하기 위해 요소신뢰성해석이 필요하다. 또한 이러한 신뢰성해석은 구조시스템 해석이 선행되어야 하므로 목적함수 및 제약조건을 일회 함수계산에 많은 계산비용이 소요된다.

2.2 시스템 최적설계 알고리즘

기존의 요소 최적설계 알고리즘은 설계민감도에 의한 재해석 모듈을 사용하지 않으므로 많은 수의 직접적인 해석을 통해서 최적해를 구하였다. 하지만 이러한 방법은 신뢰성에 기초한 최적설계문제에 적용할 경우 엄청난 함수계산 비용으로 인하여 실질적인 설계를 수행할 수 없게 된다. 따라서 본 연구에서는 기존 알고리즘의 비효율성을 보완하기 위해서 설계민감도를 사용한

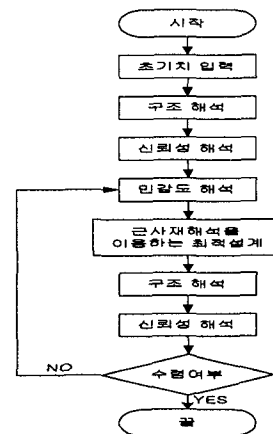


그림 1 제안된 시스템 최적설계 알고리즘

여기서,

$$\beta^J = \text{요소신뢰성 지수}, \alpha = \frac{-\nabla g(u^*)}{|\nabla g(u^*)|}, u^* = \text{파괴면과의 최소거리}, g(\cdot) = \text{한계상태 방정식}$$

이와 같은 방법은 구조시스템 해석이 필요없는 요소 신뢰성해석에 대한 민감도 해석에는 적절하지만 실제 구조시스템에 적용하기에는 매우 복잡하여 비효율적이다.

4.2 유한차분에 의한 방법

민감도 해석에 있어 재래적인 수치미분 방법으로 유한차분에 의한 방법이 있다. 유한차분법은 격자점들로 주어진 함수값을 이용하여 함수의 도함수를 계산하는 방법으로 전향차분근사식과 후향차분근사식, 그리고 중간차분근사식이 있다. 본 연구에서는 전향차분근사식을 사용하였으며 근사식은 식 (8)에 나타내었다.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (8)$$

이 방법은 미분치를 구할 때 설계변수 수 + 1 만큼의 구조해석을 필요로 하기 때문에 효율성 면에서는 다소 떨어진다.

4.3 자동미분

hand-coding, 유한차분법, symbolic differentiation과 같은 종래의 기법들은 축척오차와 계산비용이 많이 소요되기 때문에 실규모 구조에 대해 적용하는 것은 매우 어렵다. 이러한 문제를 극복하기 위해 본 연구에서는 최소한의 노력으로 정확하고 효과적인 미분치를 구할 수 있는 자동미분(automatic differentiation)을 이용하였다. 자동미분기법은 초등의 연산(가감승제)과 함수(sine, cosine 등)의 나열의 형태로 미분을 수행하기 때문에 함수 형태가 아무리 복잡할지라도 수행 가능하다. 연쇄법칙에 의해 이러한 초등연산의 조합을 반복함으로써 미분값을 정확하고 기계적으로 계산할 수 있다[8]. 또한 중간매개변수에 대한 설계민감도 해석도 간편하게 할 수 있다.

일반적으로 자동미분에는 전향모드와 후향모드의 두가지 방법이 개발되어 있다. 독립변수에 대한 미분계수를 유지하며 미분하는 방법을 자동미분의 전향모드라 한다. 전향모드의 가장 잘 알려진 대체모드는 최종결과에 대한 매개변수가 미분계수값을 유지하고 adjoint의 불연속 신호인 역 모드이다. 연쇄법칙과 미분계산의 결합으로 계산비용이 큰 미분계산의 여러 가지 방법들을 가능케 했다. 이러한 연구는 Griewank & Corliss(1991) 그리고 Berz et al(1996)에 의해 논의된 바 있다[2,9]. 여러 가지 자동미분 도구들이 사용가능하며, 이러한 프로그램에는 FORTRAN 코드로 된 ADIFOR[3,4], ODYSSEE[12] 그리고 ADOL-F[13]와 C 언어로 된 ADOL-C[10]와 ADIC[5]등이 있다. 본 연구에서는 FORTRAN77로 짜여진 ADIFOR[3,4]를 사용하였다.

5. 수치해석 예제

본 연구에서 제안하는 신뢰성 최적설계에 대한 시스템 최적설계 알고리즘 및 설계민감도 해석을 이용한 근사재해석의 성능을 검증하고 효과적인 방법에 대한 분석을 수행하기 위하여 간단한 구조시스템을 수치 예제로 선택하였다.

5.1 대상구조물

대상구조물은 그림 2에 나타낸 바와 같이 가상구조물로 2경간의 상자형 단면을 가지는 연속보이며, 단면그룹은 정모멘트부와 부모멘트부로 나누었다. 그리고 사용강재는 SM490을 사용하였다.

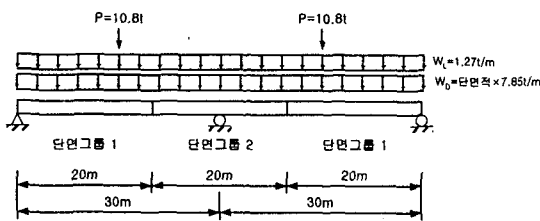


그림 2 하중조건 및 종단면도

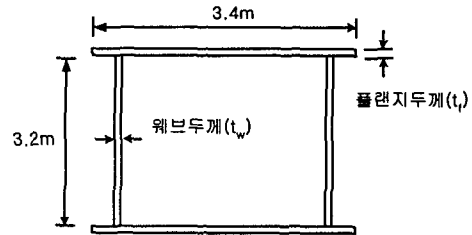


그림 3 설계상수 및 설계변수

5.2 문제의 정식화

설계변수는 그림 3과 같이 단면의 대칭성을 고려하여 플랜지의 두께와 웨브의 두께로 선정하였다. 최적설계를 위해 공용간 총기대비용을 최소화하기 위한 비용함수는 안전에 가장 지배적인 극한강도에 대한 파괴기대비용과 초기비용에 국한하여 식 (9)와 같은 목적함수로 정식화하였다.

$$F(X) : C_T = C_I + P_f C_f$$

(9)

여기서,

C_T = 총기대비용, C_I = 초기비용, C_f = 극한강도 파괴비용, P_f = 극한강도 시스템 파괴확률

초기비용(C_I)은 주형건설비용만 고려하여 정식화하였다. 대략 강재의 경우 1톤당 192만원을 제작공비로 정하였다. 또한 파괴비용(C_f)을 초기비용의 100,000배로 가정하였다. 그리고 제약조건은 요소신뢰성 지수 β_j 의 하한치를 3.0으로 하였고 플랜지와 웨브의 최소두께를 3mm로 정하였으며 최대 40mm를 초과하지 않게 하였다.

$$G_j(X) = \beta_0 - \beta_j \leq 0, \quad \beta_0 = 3.0, \quad j = 1, 2, \dots, \text{요소신뢰성수} \quad (10)$$

$$3mm \leq X \leq 40mm \quad (11)$$

5.3 한계상태 모형

목적함수에 정의된 구조물의 파괴확률을 고려하기 위하여 각 구조요소의 극한 한계상태모형을 휨모멘트에 의한 플랜지의 파괴로 정의하였다. 전체구조시스템 파괴확률을 구하기 위하여 각각의 요소파괴확률을 그림 4와 같이 직·병렬시스템으로 정의하고, 휨모멘트를 고려한 파괴모드에 대한 한계상태함수를 식 (12)와 같이 정의하였다. 그리고 체계 신뢰성해석을 수행하기 위한 통계적 불확실량은 저항의 경우 평균공칭비는 1.1, COV는 0.12, 분포형은 Normal분포이며, 사하중의 경우 평균공칭비는 1.05, COV는 0.1, 분포형은 Normal분포이고 활하중의 경우 평균공칭비는 1.24, COV는 0.25, 분포형은 Lognormal분포로 가정하였다.

$$g(\cdot) = \sigma_{MR} - (\sigma_{MD} + \sigma_{ML}) \quad (12)$$

여기서,

σ_{MR} : 실공칭 휨응력,

σ_{MD}, σ_{ML} : 실작용 사하중/활하중에 의한 휨응력

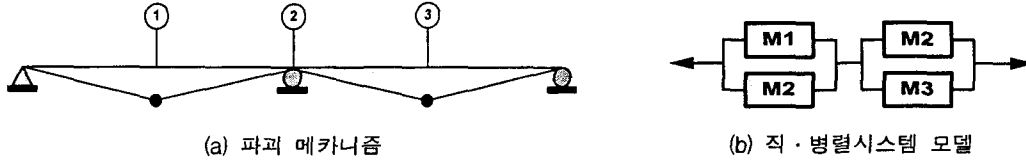


그림 4 체계 신뢰성해석 모델

5.4 최적화 방법 및 신뢰성해석

최적설계에 사용된 최적화 방법은 ALM(Augmented Lagrange Method)을 이용하였고 무제약 최소화기법으로는 Variable Metric중 BFGS(Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno)방법을 사용하였으며 단일변수함수의 최적해탐사는 황금분할법(Golden Section Method)을 이용하였다. 최적화에 사용된 프로그램은 국부최적화기법들을 부프로그램으로 형성하고 있는 ADS(Automated Design Synthesis) [G. N. Vanderplaats, 1985]를 이용하여 수행하였고, 주형의 최적설계를 위한 구조해석은 유한요소 구조해석을 이용하여 사하중 및 활하중에 대한 단면력을 구하였다.

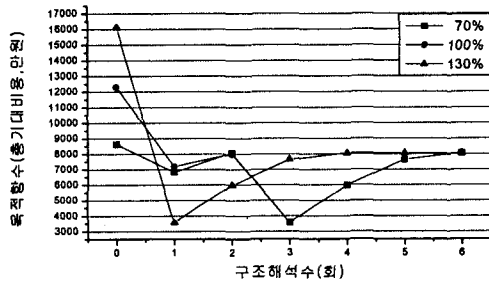
본 연구에서는 제안한 한계상태함수의 요소 신뢰성해석을 위하여, 랜덤변수의 추정, 평균과 분산 또는 공분산에 의해 표준화된 공간에서 파괴면 경계역까지의 최소거리인 신뢰성 지수 β 를 구하는 개선된 1계2차 모멘트법(AFOSM)을 사용하였다. 또한 요소 신뢰성해석결과를 이용해 구조물의 주요요소의 파괴모드로 구성된 직·병렬시스템 해석시, 대상 구조물의 파괴확률을 산정하기 위하여 Ditlevsen 구간해법을 적용하였다.

5.5 결과 및 분석

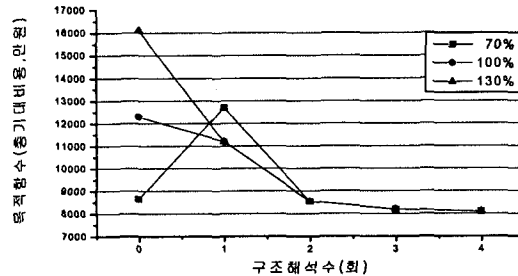
재래적 최적설계와 차분식을 이용한 최적설계 그리고 제안된 근사재해석 기법에 의한 최적설계를 수행한 결과를 표 1에 나타내었다.

표 1 최적설계 결과

최적설계 방법		요소 최적설계	시스템 최적설계			
근사 재해석방법		-	선형근사화		역변수근사화	
민감도 해석방법		-	유한차분	자동미분		
설계 변수 (mm)	정모멘트	플랜지 두께	3.25	3.30	3.31	3.36
		구간	웨브 두께	3.00	3.00	3.00
	부모멘트	플랜지 두께	24.39	24.13	24.13	24.24
		구간	웨브 두께	3.00	3.00	3.00
목적함수(총기대비용)		81,000,000원	80,539,000	80,553,000원	80,945,000	
구조해석수 (회)		464	30	6	4	



(a) 선형근사화



(b) 역변수근사화

그림 5 목적함수의 수렴추이도

목적함수의 오차범위를 실제 구조해석을 통한 정확치와 비교·검토하여 보면 차분식을 이용한 경우 약 0.57%, 선형 근사재해석을 사용한 경우 약 0.55% 그리고 역변수 근사재해석을 사용한 경우 약 0.07%의 오차를 보이고 있어 본 수치해석에서 사용한 수렴기준인 상대오차 1%를 모두 만족하고 있다. 따라서 각 방법에 따른 최적해는 신뢰할 수 있다. 그리고 구조해석 횟수를 살펴보면 민감도를 사용하지 않은 요소 최적설계방법은 464회인데 비해 유한차분에 의한 근사재해석을 사용한 최적설계의 경우 30회, 자동미분을 사용한 선형 근사화 기법과 역변수근사화 기법을 사용한 최적설계의 경우 각각 6, 4회로 단일 하중제하 조건을 가진 본 예제에서 자동미분을 사용한 역변수 근사재해석을 이용한 최적설계가 가장 효율적임을 알 수 있다. 이는 설계변수가 4개인 본 예제에서의 구조해석수이며 만약 구조물이 복잡하여 많은 수의 설계변수를 갖는다면 유한차분에 의한 근사재해석을 사용한 최적설계의 경우 설계민감도를 구하기 위해서는 기하급수적으로 구조해석수는 늘어난다. 하지만 자동미분에 의한 근사재해석을 이용한 최적설계방법은 단 한번의 구조해석을 통하여 민감도를 구해내므로 대형구조물에 적용하기에 적합한 알고리즘으로 판단된다. 또한 그림 5에 나타난 바와 같이 제안한 근사재해석 기법에 의한 최적설계에서 초기치를 70%~130%까지 변화시키에도 불구하고 안정적으로 최적해에 수렴함을 알 수 있다. 따라서 제안한 재해석 기법에 의한 최적해는 안전성을 갖는다.

본 논문에서 제안하는 자동미분에 의한 민감도해석에 근거한 역변수 근사재해석을 사용한 최적설계 알고리즘은 신뢰성에 기초한 최적설계 문제를 안정적이며 가장 효율적으로 구할 수 있는 방법임을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구는 실질적인 총기대비용 최적설계시 효과적인 최적설계를 수행하기 위해서 효율적인 근사 재해석 기법을 제안하고 이를 이용한 새로운 최적설계 알고리즘을 개발하였다. 제안한 재해석 기법과 최적설계 알고리즘을 수치예제에 적용하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 본 수치예제를 통해 제안한 알고리즘의 성능을 분석한 결과 자동미분을 사용한 역변수 근사재해석을 통한 최적설계 방법이 가장 효율적이었다.
- 2) 많은 설계변수와 하중조건이 필요한 실제 구조물의 신뢰성에 기초한 총기대비용 최적설계시 기존의 재해

석 기법은 매우 많은 수의 설계민감도 해석이 필요하므로 적용이 거의 불가능하여, 본 연구에서 제안한 효율적인 재해석 기법이 실제 구조물의 최적설계시 매우 효과적이다.

- 3) 본 연구에서 제안한 최적설계 알고리즘을 이용하면 적은 시간에 신뢰성이 있는 최적해를 구할 수 있으므로 향후 신뢰성에 기초한 총기대비용 최적설계 프로그램의 모형으로 활용될 수 있을 것이다.

감사의 글

본 연구는 학술진흥재단 자유공모과제(1998-001-E01901)의 연구비 지원에 의하여 연구되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Ang, A. H-S. and Tang, W.H., "Probability Concepts in Engineering Planning and Design.", Vol. I & II, John Wiley, 1984
2. Berz, M., Bischof, C., Corliss, G., and Griewank, A., eds. (1996). Computational differentiation -techniques, tools, and applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa.
3. Bichof, C., Carle, A., Corliss, G., Griewank, A., and Hovland, P.(1992). "ADIFOR-generating derivative codes from FORTRAN 77 programs." Scientific Programming, 1(1), 11-29.
4. Bischof, C., Carle, A., Khademi, P., and Mauer, A.(1996a). "The ADIFOR2.0 system for the automatic defferentiation of FORTRAN 77 programs." IEEE Computational Sci. & Engrg., 3(3), 18-32.
5. Bischof, C., Roh, L., and Mauer, A. (1996c). "ADIC-an extensible automatic differentiation tool for ANSI-C." Preprint ANL/MCS-P626-1196, Argonne National Laboratory, Argonne, Ill.
6. Enevoldsen, I., and Sorensen, J. D. (1991). "JOINT3: An efficient optimization algorithm for calculation of the joint beta-point in parallel systems. " Proc. of the Sixth Int. Conf. on Mechanical Behaviour of Materials - VI, M. Jono and T. Inoue, eds., Vol. 1, Pergamon Press, 583-588
7. Enevoldsen, I., and Sorensen, J. D. (1992). "Optimization algorithms for calculation of the joint design point in parallel systems.", Structural Optimization, Vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, Germany.
8. Griewank, A. (1989). "On automatic differentiation.", Mathematical programming: recent developments and applications, A. L. Norwell, ed., Kluwer Academic Publisher Group, Boston, Mass., 83
9. Griewank, A., and Corliss, G. F., eds. (1991). Automatic differentiation of algorithms : thoery, implementation, and application. Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa.
10. Griewank, A., Juedes, D., and Utke, J. (1996). "ADOL-C: a package for the automatic differentiation of algorithms written in C/C++.", ACM Trans. on Mathematical Software, 22(2), 131-167.
11. Ib Enevoldsen and John D. Sorensen(1993), "Reliability-Based Optimization of Series Systems of Parallel Systems", J. Struct. Eng., ASCE, Vol. 119, No. 4
12. Roasting, N., Dalmas, S., and Galligo, A. (1993). "Automatic differentiation in ODYSSEE." Tellus, 45a(4), 558-568.
13. Shiriaev, D., and Griewank, A. (1996). "ADOL-F: Automatic differentiation of FORTRAN codes. ", Computational differentiation-techniques, tools, and applications, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 375-384