

## 다 층간분리된 복합보의 진동해석

### Vibration Analysis of Multi-Delaminated Composite Beams

이성희\*      박대효\*\*      한병기\*\*\*      백재욱\*\*\*\*  
Lee, Sung-Hee   Park, Tae-Hyo   Han, Byoung-Kee   Baek, Jae-Wook

#### ABSTRACT

Dynamic characteristics of multi-delaminated composite beams are presented in this work. In order to investigate the effects of sizes, locations and types of delaminations on composite beams, the general kinematic governing equations are derived and solved by dividing the delaminated beam and imposing the continuity conditions into each sub-beam. The results show dynamic behaviors are varied according to the sizes, types and locations of delaminations through the laminated composite beams. It is shown that the effects of delaminations on the dynamic characteristics of composite beams could be used to detect their sizes, types and locations from the results.

#### 1. 서론

층간분리는 복합 적층재에서 흔히 발생하는 파손형태이다. 이러한 층간분리 형태의 결함이 구조물에 존재하면 전체적인 강성과 강도가 저하되고, 대칭 적층형태의 구조물인 경우 층간분리에 의해 국부적인 비대칭형태가 되어 연계강성(coupling stiffness)이 존재하여 기하학적인 비선형 거동을 유발한다. 이로 인해 적층구조물은 좌굴하중이 감소되고 설계하중보다 낮은 하중에서 전체적인 파손이 야기 될 수 있다.

복합재 적층구조물의 안전한 사용을 위해서는 정적 및 동적 하중 또는 환경적인 영향에 의해 발생하는 다양한 형태의 손상들을 검출, 평가, 해석하는 것이 필수적이라 할 수 있다. 이러한 손상 평가방법으로는 구조부재의 재료인자를 획득하기 위해 동적 특성 결과를 이용한 비파괴 시험법<sup>(1)</sup>과 스트레인 게이지를 사용한 진동측정방법<sup>(2)</sup> 및 구조물의 고유진동수를 측정함으로써 대략적인 결함의 위치 및 손상의 정도를 찾을 수 있는 방법<sup>(3-4)</sup> 등이 있다. 즉, 전체거동을 대변하는 고유진동수의 저하를 손상복합 적층구조물의 건전성 여부를 평가할 수 있게 하는 도구로서 역방법(inversion method)이 제안되었고<sup>(3)</sup>, 모드매개변수(고유진동수, 감쇠비 및 모드 형상)를 사용하여 사용성 여부를 평가할 수 있는 비파괴 검사법으로서 활용될 수 있음을 제시했다<sup>(4)</sup>. 그러나 이러한 층간분리에 관한 진동특성 연구들에서는 복합재 적층구조물에 발생될 수 있는 실제적인 층간분리 형상이나 특성이 고려되지 않고, 단일 층간분리나 부재의 횡방향으로만 존재하는 다 층간분리로 한정되어 수행됨에 따라 실제 구조물에서 발생할 수 있는 모든 경우의 영향이 고려되지 못하였다. 즉, 건설분야에서 적용되고 있는 교량의 이동하중이 고려된다면 증방향 층간분리도 고려한 실제적인 형태의 층간분리 해석

\* 한국생산기술연구원, 선임연구원  
\*\* 한양대학교 토목공학과 조교수  
\*\*\* 홍익대학교 기계공학과 교수  
\*\*\*\* 한국해양대학교 토목환경공학과 석사과정

이 필요하다고 사료된다.

이를 위해 본 연구에서는 복합재 적층보에 다 층간분리가 종방향과 횡방향으로 발생한 경우(이하-다 중간·횡간 층간분리보)에 대해서 여러 가지 형태의 층간분리 형상으로 모형화하여 진동특성 변화를 조사함으로써 층간분리된 복합 적층보의 위치와 크기 및 형태 등을 파악하는데 활용하고자 한다.

## II. 이론 정식화

다 중간·횡간 층간분리보의 고유진동수를 평가하기 위하여 이<sup>(5)</sup>의 이론식으로 Fig. 1과 같은 층간분리 모델에 대한 모드해석을 수행한다. 본 해석에서 고려되는 층간분리부는 보의 종방향으로 항상 일정한 크기를 갖는다고 가정한다. 이론 해석을 위한 기하학적 형상은 Fig. 1에서와 같이 보 내부에 층간분리가 내재되므로 다수의 영역 요소 즉, 양단과 내부 그리고 층간분리부가 존재하는 부분과 존재하지 않는 부분 영역으로 구별되면서 확장되어 나간다. 좌표축은 양단 영역에서는 끝단에 원점이 존재하며 층간분리가 존재하는 내부 영역에서는 중앙에 원점이 존재한다. NT는 다 층간분리된 보의 전체 영역의 개수를 의미하며, 각각의 영역(NR = ..., j-1, j, j+1, ...)은 nd개의 보로 구성된다.

층간분리된 각 분리보의 운동방정식은 고전 적층판 이론에서 회전관성과 전단변형 효과를 무시하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x \quad (1)$$

여기서  $u$ 와  $w$ 는 각각  $x$ 와  $z$ 방향의 변위,  $N_x$ ,  $M_x$ ,  $Q_x$ 는 각각 종방향의 합력(resultant force), 합모멘트(resultant moment), 전단력 성분이고,  $q$ 는 분포하중,  $h$ 는 적층보의 두께 그리고  $\rho$ 는 밀도를 의미한다. 합력과 합모멘트의 중립면에 대한 변형률  $\epsilon^\circ$ 과 곡률  $\kappa$  관계는 다음과 같다.

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\epsilon^\circ + \mathbf{B}\kappa, \quad \mathbf{M} = \mathbf{B}\epsilon^\circ + \mathbf{D}\kappa \quad (2)$$

여기서,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ 는 각각 신장강성(extensional stiffnesses), 연계강성(coupling stiffnesses) 및 굽힘강성(bending stiffnesses)행렬이고,  $\epsilon^\circ$ 는 중립면의 변형률벡터 ( $\epsilon_x^\circ, \epsilon_y^\circ, \epsilon_{xy}^\circ$ )을,  $\kappa$ 는 중립면의 곡률변화율벡터 ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ )를 나타낸다. 식 (2)에서 강성계수들은 다음과 같이 정의된다.

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}) = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q}(1, z, z^2) dz \quad (3)$$

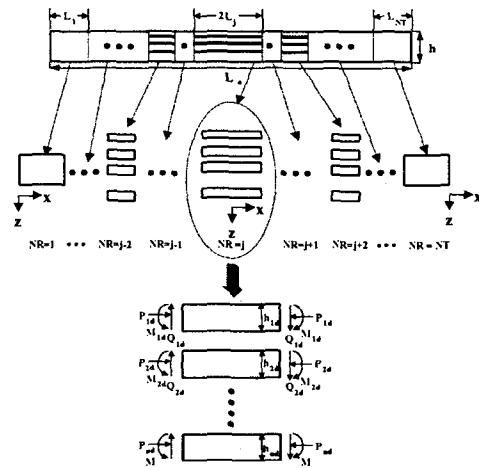


Fig. 1 Geometry and sign convention of multi-delaminated composite beams along the longitudinal and transverse direction

여기서,  $Q$ 는 각층의 재료강성행렬이다. 층간분리부가 있는 영역에서는 각각 상부 적층보와 하부 적층보에 대한 종진동이 고려되어야 한다. 적층보의 종진동 운동방정식은 보의 중립축에 대한 종방향 변위와 변형률의 관계를 이용함으로써 얻어지고, 횡진동에 대한 운동방정식은 곡률과 횡방향 변위와의 관계를 사용한다. 이 관계를 운동방정식에 대입하고  $x$ 좌표를 무차원화 시키면 일반해는 다음과 같은 형태의 해를 갖는다.

$$U(\xi)_i = H_{1i} G_{1i}(\xi) + H_{2i} G_{2i}(\xi), \quad (i=2,3), \quad W(\xi)_i = \sum_{k=1}^4 \Gamma_{ki} F_{ki}(\xi), \quad (k=1\sim4) \quad (4)$$

여기서 아래첨자  $i$ 는 적층보의 번호,  $\xi$ 는 적층보의 길이로 무차원화 된  $x$ 방향 좌표를 의미한다. 보의 영역 길이로 무차원화된 종방향변위는  $U_i$ 는  $(u_o/L)_i$ 이고, 횡방향변위는  $W_i$ 는  $(w/L)_i$ 이다.  $H_{1i}$ ,  $H_{2i}$ ,  $\Gamma_{ki}$ 는 경계조건과 연속조건들로부터 결정되는 미지수이다.  $G_{1i}(\xi)$ ,  $G_{2i}(\xi)$ 는 각각  $\sin C_i^2 \xi$ ,  $\cos C_i^2 \xi$ 이며,  $F_{ki}$ 는 다음과 같이  $F_{1i}(\xi) = \sin K_i \xi$ ,  $F_{2i}(\xi) = \cos K_i \xi$ ,  $F_{3i}(\xi) = \sinh K_i \xi$ ,  $F_{4i}(\xi) = \cosh K_i \xi$  값으로 쓰인다.  $C_i$ ,  $K_i$ 는 진동수 매개변수에서의 특성치(characteristic value)를 의미한다.

층간분리부에서의 각 적층보간의 횡방향 변위에 대한 기하학적 연속조건 및 종방향 변위와의 연계관계가 필요하다. 첫 번째로, 일정한 크기의 다 층간분리부가 있는 영역에서 각 적층보 사이의 횡방향 변위에 대한 기하학적 연속조건은 다음과 같다.

$$\{W_{1d} = W_{2d} = \dots = W_{nd}\}_{NR=j} \quad (5a)$$

$$\{W_{1d,\xi} = W_{2d,\xi} = \dots = W_{nd,\xi}\}_{NR=j} \quad (5b)$$

아래첨자는  $nd$ 는  $j$  번째 영역에서 층간분리로 인해 구분된 보의 전체 개수를 의미한다. 즉, 조건식이 일정 층간분리 영역에 적용되고 있음을 알 수 있다. 층간분리가 있는 내부경계에서 식 (5a)와 식 (5b)의 연속조건을 적용하면 분리보 사이의 횡방향 변위간의 관계식을 구할 수 있다. 이 관계식은 다 층간분리된 영역에서 분리보의 횡진동시 계수간의 관계식을 의미한다. 이런 방법으로, 횡방향 변위와 종방향 변위간의 관계식과 같은 영역에서의 종방향 변위간의 관계식을 구할 수 있다<sup>(5)</sup>. 마지막으로, 다 층간분리가 있는 적층보의 진동수 방정식을 구하기 위해서 층간분리가 있는 영역과 없는 영역의 경계에서는 다음과 같은 연속조건이 만족되어야 한다.

$$\{W_j L_j \quad W_{j,\xi} \quad M_j \quad V_j\}_{\xi=1} = \{W_{j+1} L_{j+1} \quad W_{j+1,\xi} \quad M_{j+1} \quad V_{j+1}\}_{\xi=-1} \quad (6)$$

여기서  $M_j$ 와  $V_j$ 는 각각  $j$ 번째 영역의 굽힘 모멘트와 전단력을 나타낸다. 층간분리가 있는 영역과 양단 경계영역과의 관계식을 구하기 위해 굽힘모멘트와 전단력을 식 (6)에 대입하고 정리하면 층간분리가 있는 영역의 왼쪽 경계에서 4개의 선형연립방정식이 구성되고, 마찬가지로 층간분리가 있는 오른쪽 경계에서 4개의 선형연립방정식이 구성되는데, 이를 횡방향 변위계수로 표현하여 등가시키면 4개의 선형연립방정식을 얻을 수 있으며 이를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$[[Q^L_{ki}] [Q^R_{ki}]] \left\{ \begin{matrix} \{B_1\}_{NR=1} \\ \{B_1\}_{NR=NT} \end{matrix} \right\} = 0, \quad (k=1,2,3,4, \quad l=1,2) \quad (7)$$

따라서, 층간분리가 있는 보의 진동수 방정식은 식 (7)의 행렬(4×4)을 행렬식으로 취함으로써 구할 수 있다.

행렬요소에 관한 자세한 설명은 생략하기로 한다.

### III. 수치결과 및 고찰

본 연구에서는 이론 해석 결과를 검증하기 위해 Stamos 등<sup>(3)</sup>이 제시한 단일 층간분리보의 고유진동수변화 결과와 본 해석의 결과를 Fig. 2에 제시하였다. 결과에서 보듯이 0.1% 이내로 서로 매우 잘 일치함을 볼 수 있으므로 해석결과의 신뢰성을 확인할 수 있다. 다 층간분리된 복합보의 자유진동특성을 평가하기 위해 즉, 다 종간·횡간 층간분리보의 고유진동수 저하를 조직적으로 평가하기 위해 Fig. 3(a)~(d)과 같은 층간분리 형상모델을 선정하였다. 적층보의 물성치와 적층순서는 Table 1에 제시하였고, 참고로 각각의 경계조건에 대한 층간분리가 없는 보의 고유진동수를 Table 2에 제시하였다. 그리고 해석 결과에서 사용되는 무차원화 된 값은 다음과 같다. 해석 결과에서  $\eta$ 는 층간분리부 상부보의 두께를 전체보 두께로,  $\delta$ 는 층간분리부의 길이를 전체보 길이로,  $\chi$ 는 보의 왼쪽 경계부터 층간분리부 중심까지의 길이를 전체보 길이로,  $s$ 는 보의 중심에서 층간분리부 중심까지의 길이를 중심에서 보의 경계까지 길이로,  $a$ 는 층간분리부 사이의 길이를 전체보 길이로 무차원화 된 값이며, 층간분리가 있는 보의 고유진동수( $f$ )는 층간분리가 없는 고유진동수( $f_0$ )로 무차원화 되어 그래프의 종축에 사용된다.

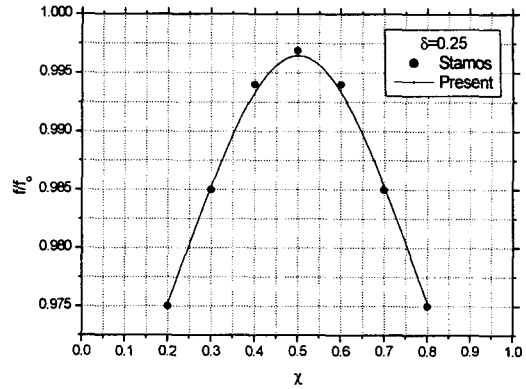


Fig. 2 The comparison of present results with reference ones for first mode frequency([90/0]<sub>10T</sub>,  $\delta=0.25$ ,  $\eta=0.5$ , SS b.c.)

Table 1 Material properties, stacking sequence, and geometry of prepreg

Material	Glass-Epoxy		
	Item	Value	Unit
Property	E <sub>11</sub>	40.7	GPa
	E <sub>22</sub>	9.75	GPa
	G <sub>12</sub>	4.65	GPa
	$\nu$	0.30	
	$\rho$	1990	kg/m <sup>3</sup>
Layup	Cross-ply	[0/90] <sub>SS</sub>	
Geometry	Length	1000	mm
	Width	25	mm
	Height	2.5	mm
	One ply thickness	0.125	mm
			(20 plies)

Table 2 Frequencies of composite laminate beams for each b.c.

Layup	B.C.	1st (Hz)	2nd (Hz)	3rd (Hz)	4th (Hz)
C	CF	1.519	9.519	26.655	52.232
	CC	9.666	26.644	52.233	86.344
	FF	9.666	26.644	52.233	86.344
	SS	4.234	17.056	38.375	68.222

\* C: Cross-ply

\* CF: Clamped-Free, CC: Clamped-Clamped, FF: Free-Free, SS: Simply Supported

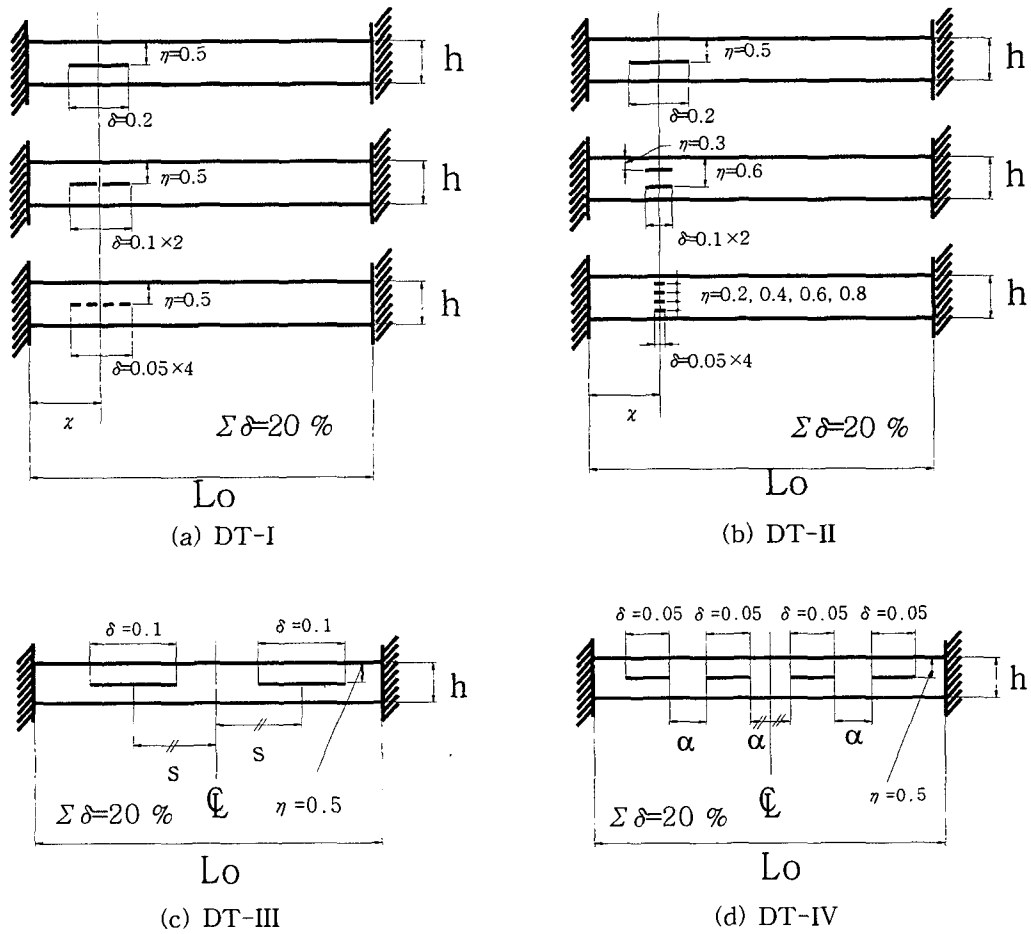


Fig. 3 Types of multi-delaminated composite beams(clamped-clamped b.c. for all models).

다 중간 층간분리부에 대한 고유진동수 변화를 고찰하기 위해 Fig. 3(a)에서와 같은 층간분리 형상을 선정하였다. 층간분리부의 전체 크기를 보 길이의 20%로 고정시키고 이러한 층간분리가 종방향(보의 길이방향)으로 일정한 간격을 갖도록 1개, 2개, 4개로 분할 형성하였다. Fig. 3(a)의 층간분리부의 위치변화에 따른 고유진동수 변화 결과를 Fig. 4에 제시하였다. 일정크기(20%)의 층간분리부를 2개, 4개로 분할시, 각각의 층간분리부 사이의 간격은 전체 보의 1% 크기로 작게 부여하였다. 이와 동일하게, 다 횡간 층간분리부에 대한 고유진동수 변화를 고찰하기 위해 Fig. 3(b)와 같은 층간분리 형상을 선정하였다. 전체 보 길이에서 총 20%의 층간분리부를 횡방향(보의 두께방향) 일정한 크기로 1개, 2개, 4개로 분할 형성하였다. 이렇게 분할된 층간분리부의 위치이동에 따른 고유진동수 변화 결과를 Fig. 5에 제시하였다. 이 종간(2개의 종방향 층간분리) 층간분리부에서 층간분리부의 위치이동에 따른 고유진동수 변화를 살펴기 위한 형상을 Fig. 3(c)에 제시하였다. 보의 중심에 위치한 20%의 층간분리부는 10%씩 2개로 분할되면서 양단경계지점으로 각각 이동하게 된다. 사 종간(4개의 종방향 층간분리) 층간분리부에서 층간분리부의 분포변화에 따른 고유진동수 변화를 살펴기 위한 형상을 Fig. 3(d)에 제시하였다. 보의 중심에 위치한 20%의 층간분리부는 5%씩 4개로 분할되어 층간분리부 사이의 간격( $\alpha$ )이 커짐에 따라 분포양상이 양단경계지

점으로 확장하게 된다. Fig. 3(c)와 (d)에 대한 고유 진동수 변화 결과는 Fig. 6과 7에 각각 제시하였다.

Fig. 4~7에서 보는 바와 같이 층간분리부의 위치 및 분포 변화는 고유진동수에 직접적인 영향이 있음을 알 수 있으며, 층간분리부가 지지점에 근접할수록 최대의 고유진동수 저하를 보이고 있다. 이러한 이유는 경계조건이 양단고정일 경우 고정단에서 최대 모멘트가 발생되므로 결과적으로 층간분리가 고정단 부근에 근접하면 고유진동수 저하에 미치는 영향은 크게 된다. 이러한 영향성은 외팔보에서도 동일하게 발생된다. 한편 Fig. 4에서 보듯이 동일 위치에서 층간분리부가 종방향으로 2개, 4개로 분할되면 고유진동수 저하 폭이 현저히 줄어드는 경향을 보이고 있다. 따라서, 층간분리부는 분할될수록 고유진동수 저하 폭은 현저히 줄어든다는 것을 알 수 있다. 이러한 경향은 Fig. 5에서도 볼 수 있다. 층간분리가 횡방향으로 2개, 4개로 분할되면 고유진동수 저하 폭은 현저히 줄어든다.

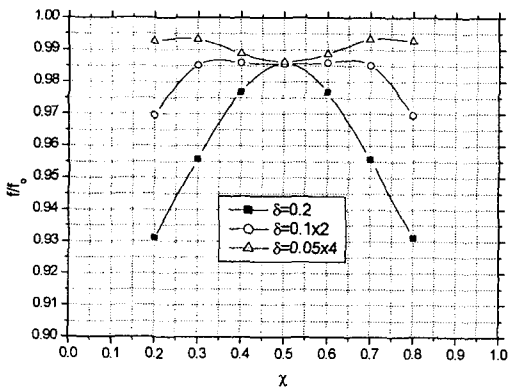


Fig. 4 Variations of the first mode frequency for DT-I

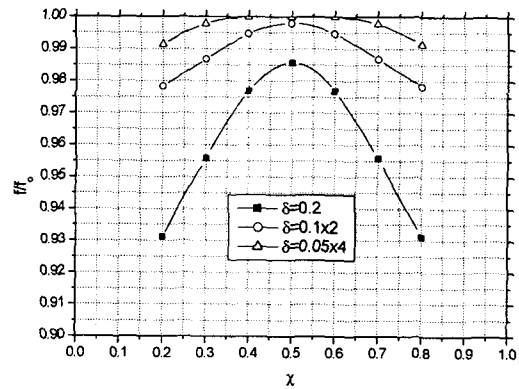


Fig. 5 Variations of the first mode frequency for DT-II

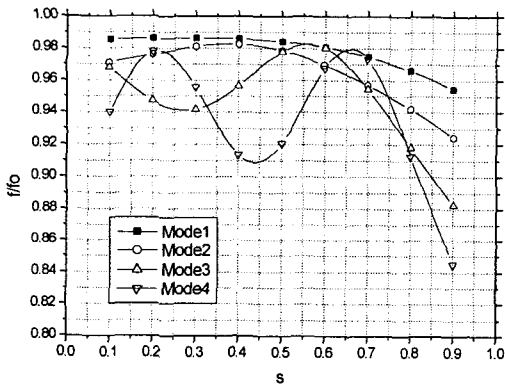


Fig. 6 Variations of frequencies for DT-III

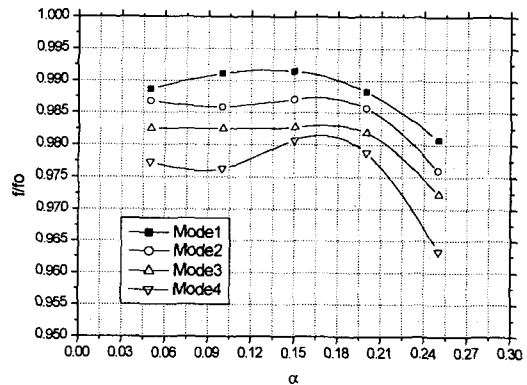


Fig. 7 Variations of frequencies for DT-IV

Fig. 6은 보의 중심에 위치한 동일한 크기의 층간분리부가 분할되어 양단경계지점으로 간격(s)을 넓히면서 각각 이동함에 따라 1차 모드에서 최대 3.1%의 고유진동수 저하를 보이고 있다. 각각의 층간분리부가 지점으로 이동함에 따라 1차 모드에서는 고유진동수가 저하되는 반면, 고차 모드로

진행될수록 고유진동수 변화에 굴곡이 생김을 알 수 있는데 이러한 이유는 진동모드형상 때문이다. 하지만, 층간분리부의 길이를 작게 모형화하여 진동수 변화형상을 비교하면 고차모드에서도 점점 굴곡이 완만해진다는 것을 볼 수 있다. 마지막으로 층간분리의 분포양상의 차이에 따른 결과가 Fig. 7에 제시하였다. 모든 결과와 동일하게 고정단에 근접하면 최대 고유진동수 저하를 보이는 반면, 지지점의 영향이 없는 부분은 사이의 간격( $\alpha$ )이 커짐에 따라 고유진동수 저하 폭이 줄어드는 경향을 보이고 있다. 따라서, 층간분리부의 분포양상은 모여있는 경우보다 흩어져 있는 경우가 고유진동수 저하되는 폭이 줄어든다.

본 연구는 층간분리부가 있는 적층보를 모드해석을 통하여 4차 모드까지의 고유진동수 저하를 평가하였다. 이러한 결과로부터 다 중간·횡간 층간분리보에서 층간분리부의 위치와 크기 변화에 따른 고유진동수 저하를 평가할 수 있고(직접법: direct method), 이에 상관되어 손상 보의 진동수를 비교, 분석함으로써 층간분리부의 위치와 크기를 대략적으로 평가할 수 있다(역방법: inversion method).

#### IV. 결론

본 연구에서는 적층보 내부에 다 중간·횡간 층간분리 형상에 기인된 고유진동수 저하를 평가하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 양단고정보에 존재하는 다 중간·횡간 층간분리부는 경계조건 영향 때문에 지지점에 근접할수록 최대의 고유진동수 저하를 보인다.
- 2) 일정 크기와 위치를 갖는 층간분리부가 종방향과 횡방향으로 2개, 4개로 분할됨에 따라 고유진동수 저하 폭은 줄어든다. 즉, 동일 위치에서 일정 크기의 층간분리는 분할이 많이 될수록 고유진동수 저하가 작아진다.
- 3) 다 중간 층간분리부의 각각의 길이가 작아짐에 따라 위치에 따른 고유진동수 변화형상은 굴곡이 완만해진다. 그리고 지점 영향이 없는 부분에서 층간분리부의 분포양상은 모여있는 것보다 흩어져 있는 경우가 고유진동수 저하 폭이 작아진다.
- 4) 본 연구는 종방향과 횡방향으로 다 층간분리된 복합보의 고유진동수 저하를 평가하고, 손상된 보에 대한 진동수를 분석함으로써 층간분리의 위치와 크기를 평가하는데 유용하게 활용될 수 있다.

#### 참고문헌

- [1] Jävelä, P., Laitinen, K. W., Purola, J. J. and Törmälä, P., "Studies on Lightweight Glass Fibre-Resin Composite by Destructive and Nondestructive Methods," *Journal of Composite Materials*, Vol. 18, pp. 557-573, 1984.
- [2] Pavic, 'G., "Measurement of Vibration by Strain Gauge, Part I: Theoretical Basis," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 102, pp. 153-163, 1985.
- [3] Stamos, B., Kostopoulos, V. and Paipetis, S. A., "Identification of Delamination by Eigenfrequency Degradation-An Inverse Problem," *AGARD Conference Proceedings 530, Debonding/Delamination of Composites*, 1992.
- [4] Cawley, P. and Adams, R. D., "A Vibration Technique for Non-Destructive Testing of Fibre Composite Structures," *Journal of Composite Materials*, Vol. 13, pp. 161-175, 1979.
- [5] 이성희, "층간분리가 있는 복합재 보-기둥의 동적특성," 박사학위논문, 홍익대학교 대학원 기계공학과, 1998.