

## 정현상 비대칭으로 Taper진 부재의 임계하중과 고유진동수와의 관계

### The Relationship between Critical Load and Frequency of Sinusoidally Non-symmetrically Tapered Member

이 혁\*                      홍 종 국\*                      이 수 곤\*\*  
Lee, Hyuck                      Hong, Jong-Kook                      Lee, Soo-Gon

#### ABSTRACT

It is generally known that the lateral frequency( $\omega$ ) of the vibration of a prismatic beam-column decreases according to the rule  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - P/P_{cr}}$  ( $\omega_0$ =natural frequency). In the cases of tapered members, the determination of  $P_{cr}$ (elastic critical load) and  $\omega_0$  are not easy. Furthermore, the relationship between the compressive load and frequency can not be determined by the conventional analytical method.

The axial force-frequency relationship of sinusoidally non-symmetrically tapered members with different shapes were investigated using the finite element method. To obtain the two eigenvalues, the axial thrust was increased step by step and the corresponding frequency was calculated.

The result indicated that the axial thrust of the elastic critical load ratio and the square of the frequency ratio can be approximately represented in any case by a straight line. Finally, the linear relationship is also applicable to the sinusoidally non-symmetrically tapered member.

#### 1. 서 론

서양의 고대 건축물에서부터 우리나라의 전통건축에 이르기까지 변단면 부재는 우리 생활에서 흔히 볼 수 있는 친근한 부재임에 틀림없다. 이러한 변단면 부재로 구성된 구조물이 지진의 발생 등으로 동적하중을 받게 되면 구조물은 두 가지의 고유치(eigenvalue)에 의해 지배를 받는 동적거동(dynamic behavior)을 하게 된다. 즉, 그 구조물은 정적안정(static stability)을 지배하는 임계하중과 동적안정(dynamic stability)을 지배하는 고유진동수가 바로 그것이다. 실제로 좌굴현상과 자유진동현상은 전혀 별개의 현상같이 보이지만, 일반적인 현상의 극한상태이다.

등단면 부재에 있어서 임계하중과 고유진동수는 해석적 방법이나 수치해석법으로 쉽게 구할 수 있다. 그러나 부재가 변단면 형태로 되면 고유치의 산정은 거의 수치해석법에 의해서만 가능하다.

여기서는 등단면 압축재에서 흔히 적용되는 식 (1)이 변단면, 특히 정현상으로 taper진 압축재 (sinusoidally tapered member)에서도 적용되는지를 검토하기로 한다. 두 고유치의 산정이, 앞서 언급했던 것

\* 전남대학교 대학원 석사과정

\*\* 전남대학교 건축학과 교수

처럼 해석적 방법으로 구하는 것이 거의 불가능하므로 수치해석법의 하나인 유한요소법을 이용하여 산정한다. 또한 부재에 작용하는 압축하중의 크기를 점차 증가시켜 임계하중치 까지 도달하게 하면서 이에 대응하는 진동수를 결정함으로써 압축하중과 진동수간의 관계를 조사하기로 한다.

## 2. 유한요소법의 정식화

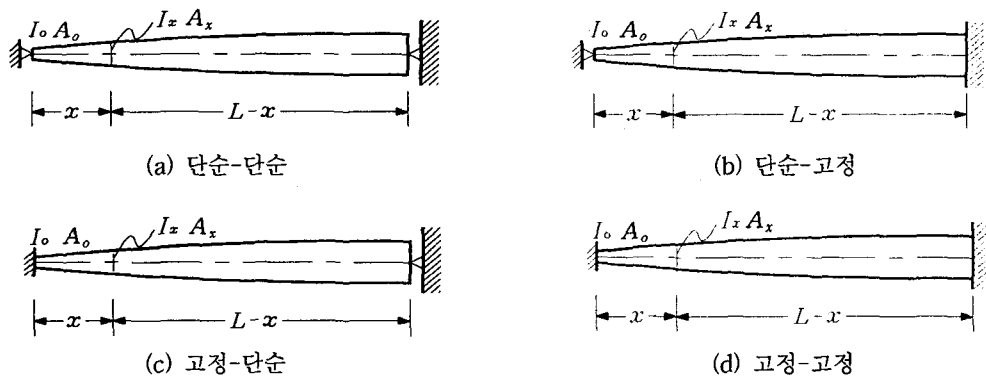
등단면 부재에서는 임계하중( $P_{cr}$ )과 고유진동수( $\omega_0$ )의 관계는 식 (1)이 성립한다는 것은 이미 알려진 사실이다.

$$\frac{P}{P_{cr}} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1.0, \quad R + \Omega^2 = 1, \quad (R = P/P_{cr}, \quad \Omega = \omega/\omega_0) \quad (1)$$

여기서  $P_{cr}$ 과  $\omega_0$ 는 각각 임계하중과 고유진동수를 의미하며 식 (1)을 다시 쓰면 식 (2)와 같이 된다.

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{P}{P_{cr}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

본 연구에서는 변단면 압축재의 고유치를 산정하기 위하여 그림 1.과 같이 정현상 비대칭으로 taper진 압축재를 예로 들었다. 양단의 경계조건은 양단단순, 단순-고정, 고정-단순 그리고 양단고정으로 하였고 해석에서 고려한 parameter는 단면의 기울기를 나타내는 taper parameter  $\alpha$ 와 단면의 성질을 지배하는 sectional property parameter의 조합 (m,n)으로 그 내용은 그림 1.에서와 같다.



$$A_x = A_0 \left(1 + \alpha \sin \frac{\pi x}{2L}\right)^m, \quad I_x = I_0 \left(1 + \alpha \sin \frac{\pi x}{2L}\right)^n$$

- taper parameter  $\alpha = 0.0, 0.1, 0.2, \dots, 2.0$
- sectional property parameter (m,n) = (0,2), (1,3), (2,4)

그림 1. 정현상으로 Taper진 변단면 압축재

유한요소법을 적용하기 위해 우선, 각 절점에서의 자유도(D.O.F)가 2인 선형요소를 택한다. 이와 같은 선형요소의 변형성분  $\delta_i$ 와 이에 대응하는 절점력 성분  $q_i$ 는 그림 2와 같다. 요소의 강성행렬은 total potential energy  $\Pi$ 의 일차변분이 zero(0)로 된다는 조건으로부터 구할 수 있는데 그 과정은 다음과 같다.

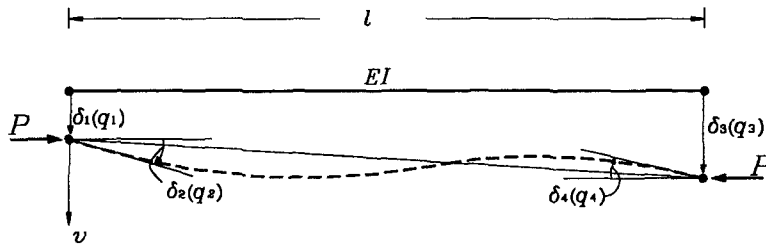


그림 2. 요소의 변형성분( $\delta_i$ )와 절점력 성분( $q_i$ )

등단면 압축재에서와 같이 부재가 진동수  $\omega$ 를 가지고 조화진동을 하게 되면 total potential energy  $\Pi$ 는 다음 식 (3)으로 표시된다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \frac{\omega^2}{2} \int_0^l v^2 \cdot \frac{\rho}{g} A(x) dx - \frac{1}{2} \{ \delta \}^T \{ q \} \quad (3)$$

식 (3)에서 처짐함수  $v(x)$ 는 형상함수(shape function)  $[N]$ 과 절점변형(nodal displacement vector)  $\{ \delta \}$ 의 곱으로 표시할 수 있다.

$$v = [N] \{ \delta \}, \quad [N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (4)$$

여기서 형상함수  $[N]$ 의 성분은 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_2 &= x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ N_3 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_4 &= \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right) \end{aligned} \quad (5)$$

또한 식 (3)에서 절점력 vector  $\{ q \}$ 는

$$\{ q \} = [k] \{ \delta \} = \begin{bmatrix} k_{11} & & & \\ k_{21} & k_{22} & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{symm} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{matrix} \quad (6)$$

로  $[k]$ 가 구하고자 하는 요소의 강성행렬이다.

요소가 평행상태에 있기 위해서는 total potential energy  $\Pi$ 의 일차변분, 즉  $\Delta^{(1)}\Pi=0$ 이 성립하므로 이것을 이용하면 식 (6)의 강성행렬은 식 (8)로 주어진다.

$$[k] = [k]_b - P[k]_g - \omega^2[m]_c \quad (8)$$

식 (8)에서  $[k]_b$ ,  $[k]_g$  및  $[m]_c$ 는 각각 식 (9-a, b, c)와 같다.

$[k]_b$  (=flexural stiffness matrix)

$$= \int_0^l EI(x) \left\{ \frac{d^2N}{dx^2} \right\}^T \left\{ \frac{d^2N}{dx^2} \right\} dx = \frac{EI(e)}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & \text{symm.} \\ 6l & 4l^2 & & \\ -12 & -6l & 12 & \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (9-a)$$

윗 식에서  $I(e)$ 는 각 요소 중앙점에서의 단면 2차 모멘트를 표시한다. 실제로  $I(x)$ 를  $I(e)$ 로 바꾸어 놓으면 다소의 오차는 있으나 그 정도는 무시할 수 있는 정도이다.

$[k]_g$  (=geometric stiffness matrix)

$$= \int_0^l \left\{ \frac{dN}{dx} \right\}^T \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} dx = \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 36 & & & \text{symm.} \\ 3l & 4l^2 & & \\ -36 & -3l & 36 & \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (9-b)$$

$[m]_c$  (=consistent mass matrix)

$$= \int_0^l \frac{\rho}{g} A(x) \{N\}^T \{N\} dx = \frac{\rho A(e)}{420g} \begin{bmatrix} 156 & & & \text{symm.} \\ 22l & 4l^2 & & \\ 54 & 13l & 156 & \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (9-c)$$

### 3. 임계하중과 고유진동수의 관계

식 (9)로 주어지는 요소의 강성행렬을 부재의 모든 요소에 관하여 조합하면 외력 vector  $\{Q\}$ 와 변형 vector  $\{\Delta\}$ 는 다음 식으로 된다.

$$[[K]_b - P[K]_g - \omega^2[M]_c]\{\Delta\} = \{Q\}, \quad \{Q\} = \{0\} \quad (10)$$

식 (10)으로부터 임계하중  $P_{cr}$ 은  $\omega=0$ 으로 놓은 후 구할 수 있고 고유진동수  $\omega_0$ 는  $P=0$ 으로 놓은 다음 구할 수 있다. 그러나, computer를 이용한 반복법(iteration method)으로 임계하중과 고유진동수를 구하면 최대값이 구해지므로 1차 좌굴 또는 진동 mode에 대응하는 최소값을 구하기 위해 다음 식 (11)과 같이 변형시킨다.

$$[ [K]_b^{-1} [K]_g - \frac{1}{P} [I] ] \{ \Delta \} = \{ 0 \} \quad (11-a)$$

$$[ [K]_b^{-1} [M]_c - \frac{1}{\omega^2} [I] ] \{ \Delta \} = \{ 0 \} \quad (11-b)$$

유한요소법에 의한 해석치는 일반적으로 요소수를 점차 증가시키면 어느 일정한 값에 수렴하게 되는데 그림 3에서 보는 바와 같이 양단이 단순지지된 변단면 압축재의 경우에 있어서 임계하중과 고유진동수는 요소수가 16이상일 때 그렇다. 따라서 여기서는 부재를 20등분하였다.

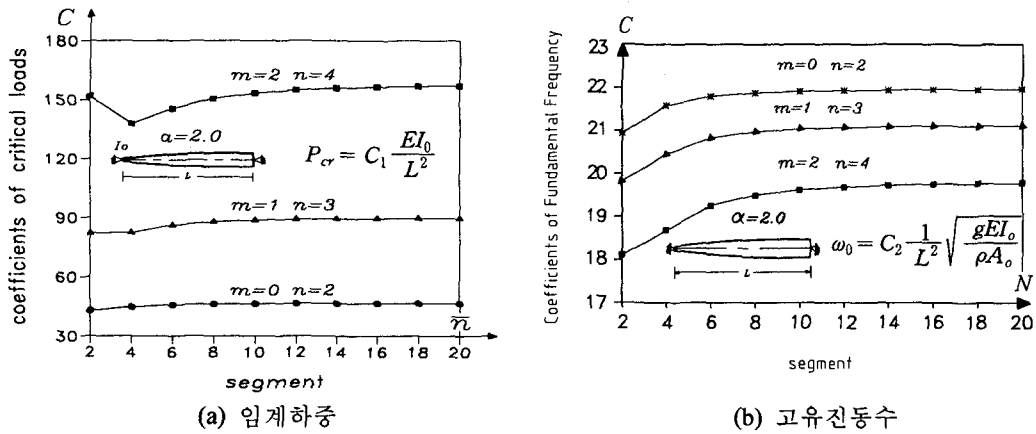


그림 3. 요소수의 증가에 따른 임계하중과 고유진동수의 수렴도

표 1. 유한요소법에 의한 임계하중 계수와 고유진동 계수 (지면관계상 단순-고정과 고정-단순은 생략)

$\alpha$	단순-단순 (그림 1. (a))						고정-고정 (그림 1. (d))					
	$(m, n) = (0, 2)$		$(m, n) = (1, 3)$		$(m, n) = (2, 4)$		$(m, n) = (0, 2)$		$(m, n) = (1, 3)$		$(m, n) = (2, 4)$	
	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$	$C_1$	$C_2$
0.0	9.8693	9.8695	9.8693	9.8695	9.8693	9.8695	39.4759	22.3725	39.4759	22.3725	39.4759	22.3725
0.1	11.2334	10.5314	11.9793	10.5292	12.7663	10.5246	44.5029	23.7167	47.2217	23.6283	50.0976	23.5454
0.2	12.6577	11.1845	14.2884	11.1705	16.1134	11.1549	49.6812	25.0338	55.6190	24.8630	62.1730	24.7032
0.3	14.1459	11.8321	16.8162	11.8028	19.9055	11.7576	55.0164	26.3297	64.6500	26.0766	75.7440	25.8489
0.4	15.6760	12.4665	19.5269	12.4149	24.1479	12.3356	60.4898	27.6036	74.3099	27.2720	90.8163	26.9796
0.5	17.2604	13.0945	22.4459	13.0176	28.8742	12.8981	66.0960	28.8577	84.5955	28.4512	107.4114	28.0972
0.6	18.8970	13.7165	25.5887	13.6160	34.0767	13.4435	71.8369	30.0951	95.5060	29.6170	125.6213	29.2115
0.7	20.5705	14.3278	28.8993	14.1955	39.7644	13.9735	77.7048	31.3165	107.0080	30.7658	145.3793	30.3119
0.8	22.3103	14.9399	32.4012	14.7647	45.9174	14.4855	83.7035	32.5247	119.1275	31.9036	166.7340	31.4032
0.9	24.0996	15.5473	36.1387	15.3343	52.5316	14.9804	89.8492	33.7245	131.8734	33.0335	189.6900	32.4843
1.0	25.9174	16.1440	40.0381	15.8883	59.6213	15.4623	96.0793	34.9054	145.2010	34.1493	214.2936	33.5594
1.1	27.8065	16.7443	44.1282	16.4344	67.2307	15.9376	102.4801	36.0848	159.1163	35.2547	240.5008	34.6234
1.2	29.7224	17.3348	48.4779	16.9859	75.3165	16.4007	108.9731	37.2489	173.6976	36.3595	268.4173	35.6851
1.3	31.6634	17.9158	52.9919	17.5250	83.9358	16.8590	115.5533	38.3991	188.8142	37.4488	298.0472	36.7432
1.4	33.6354	18.5043	57.6590	18.0516	92.9372	17.2959	122.3068	39.5506	204.5471	38.5330	329.2526	37.7858
1.5	35.7387	19.0857	62.4939	18.5689	102.4208	17.7246	129.1374	40.6878	220.8183	39.6043	362.3315	38.8339
1.6	37.8592	19.6705	67.6152	19.0955	112.4648	18.1522	136.0973	41.8203	237.7691	40.6774	397.0801	39.8728
1.7	40.0030	20.2475	72.8792	19.6101	122.9639	18.5698	143.1610	42.9452	255.2817	41.7417	433.6060	40.9081
1.8	42.2168	20.8280	78.3146	20.1166	134.0065	18.9845	150.3632	44.0674	273.3694	42.7984	471.8252	41.9355
1.9	44.3655	21.3798	83.9940	20.6264	145.2971	19.3733	157.5751	45.1677	292.0596	43.8514	511.8060	42.9563
2.0	46.6324	21.9607	89.7409	21.1631	157.2013	19.7681	165.0151	46.2817	311.2802	44.8934	553.5938	43.9745

부재를 20등분하여 유한요소법을 이용해 얻은 두 고유치는 표 1과 같다. 표 1에서  $C_1$ 은 임계하중 계수를 나타낸 것이고  $C_2$ 는 고유진동수를 나타내는 계수이다. 이 값들을 기준으로, 압축력이 변함에 따라 여기에 대응하는 고유진동수를 구하기 위해 식 (10)을 다음의 식 (12)와 같이 변형시킨 다음,  $R = 0.0, 0.2, \dots, 1.0$ 으로 변화시키면서 고유진동수를 구하였다.

$$[[k]_b - RP_{cr}[k]_g - \Omega^2 \omega_0^2 [m]_c] \{\Delta\} = \{0\} \quad (12-a)$$


$$[[k]_p^{-1} \cdot [M]_c - \frac{1}{(\Omega \omega_0)^2} [I]] \{\Delta\} = \{0\} \quad (12-b)$$

$$[K]_p = [K]_b - RP_{cr}[K]_g$$

표 2는 압축력의 변화에 따라 각각에 대응하는 진동수를 구한 것이다. 표 2에서와 같이 임계하중과 고유진동수의 관계( $R + \Omega^2$ )이 거의 모든 경우에 있어서 단위치를 나타내고 있다.

표 2. 임계하중 - 고유진동수의 관계 (지면관계상 단순-고정과 고정-단순은 생략)

(a) 단순-단순 (그림1.(a)) ( $R = \frac{P}{P_{cr}}$ ,  $\Omega^2 = (\frac{\omega}{\omega_0})^2$ )

	R											
		$\Omega^2$										
		$\alpha=0.0$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1.0$	$\alpha=1.2$	$\alpha=1.4$	$\alpha=1.6$	$\alpha=1.8$	$\alpha=2.0$
(m,n) =(0,2)	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	0.2	0.8002	0.7999	0.8002	0.8004	0.8003	0.8012	0.8009	0.8007	0.8002	0.8010	0.8019
	0.4	0.5998	0.6001	0.6002	0.6006	0.6009	0.6012	0.6014	0.6018	0.6017	0.6019	0.6025
	0.6	0.3997	0.4010	0.4006	0.4002	0.4006	0.4017	0.4012	0.4019	0.4021	0.4018	0.4023
	0.8	0.1997	0.2006	0.2005	0.2000	0.2007	0.2010	0.2014	0.2020	0.2004	0.2012	0.2013
	1.0	0.0	0.0007	-0.0004	0.0001	0.0004	0.0	0.0003	0.0003	0.0003	-0.0018	-0.0004
(m,n) =(1,3)	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	0.2	0.8002	0.8013	0.8011	0.8007	0.8021	0.8028	0.8030	0.8041	0.8050	0.8068	0.8081
	0.4	0.5998	0.6004	0.6013	0.6011	0.6034	0.6045	0.6044	0.6067	0.6078	0.6097	0.6130
	0.6	0.3997	0.4022	0.4016	0.4021	0.4034	0.4046	0.4063	0.4068	0.4090	0.4109	0.4127
	0.8	0.1997	0.2001	0.2012	0.1998	0.2028	0.2034	0.2035	0.2050	0.2060	0.2071	0.2097
	1.0	0.0	0.0003	0.0003	-0.0012	0.0008	-0.0006	-0.0009	0.0002	-0.0010	0.0008	0.0004
(m,n) =(2,4)	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	0.2	0.8002	0.7996	0.8019	0.8028	0.8040	0.8056	0.8085	0.8104	0.8120	0.8121	0.8160
	0.4	0.5998	0.6011	0.6024	0.6045	0.6065	0.6109	0.6130	0.6159	0.6187	0.6209	0.6245
	0.6	0.3997	0.4001	0.4024	0.4051	0.4069	0.4109	0.4140	0.4166	0.4194	0.4226	0.4262
	0.8	0.1997	0.1996	0.2013	0.2033	0.2046	0.2066	0.2099	0.2111	0.2141	0.2151	0.2198
	1.0	0.0	0.0	-0.0002	-0.0009	-0.0007	0.0005	-0.0002	0.0006	-0.0001	-0.0008	0.0018

(b) 고정-고정 (그림1.(d) (  $R = \frac{P}{P_{cr}}$  ,  $\Omega^2 = (\frac{\omega}{\omega_0})^2$  )

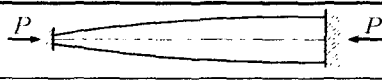
												
		$\Omega^2$										
$R$		$\alpha=0.0$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1.0$	$\alpha=1.2$	$\alpha=1.4$	$\alpha=1.6$	$\alpha=1.8$	$\alpha=2.0$
(m,n) =(0,2)	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	0.2	0.8050	0.8050	0.8047	0.8049	0.8052	0.8054	0.8055	0.8057	0.8059	0.8060	0.8064
	0.4	0.6078	0.6079	0.6075	0.6078	0.6083	0.6085	0.6086	0.6088	0.6092	0.6099	0.6101
	0.6	0.4082	0.4082	0.4080	0.4082	0.4086	0.4091	0.4092	0.4098	0.4099	0.4101	0.4108
	0.8	0.2057	0.2058	0.2055	0.2058	0.2061	0.2063	0.2064	0.2066	0.2070	0.2073	0.2078
	1.0	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0002	0.0001	-0.0001	-0.0001	0.0000	-0.0003	-0.0001
(m,n) =(1,3)	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	0.2	0.8050	0.8050	0.8056	0.8062	0.8073	0.8084	0.8091	0.8105	0.8118	0.8130	0.8141
	0.4	0.6078	0.6081	0.6068	0.6096	0.6114	0.6132	0.6149	0.6171	0.6189	0.6210	0.6229
	0.6	0.4082	0.4085	0.4091	0.4103	0.4123	0.4144	0.4159	0.4181	0.4205	0.4227	0.4248
	0.8	0.2057	0.2059	0.2065	0.2074	0.2088	0.2102	0.2115	0.2134	0.2149	0.2166	0.2184
	1.0	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0004	0.0000	0.0002	-0.0002	-0.0002	0.0000	0.0000	0.0002
(m,n) =(2,4)	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	0.2	0.8050	0.8053	0.8066	0.8084	0.8108	0.8135	0.8162	0.8193	0.8217	0.8242	0.8268
	0.4	0.6078	0.6083	0.6104	0.6137	0.6176	0.6220	0.6266	0.6311	0.6354	0.6398	0.6444
	0.6	0.4082	0.4087	0.4110	0.4147	0.4189	0.4238	0.4290	0.4344	0.4392	0.4443	0.4495
	0.8	0.2057	0.2062	0.2078	0.2105	0.2136	0.2174	0.2212	0.2254	0.2291	0.2330	0.2375
	1.0	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0002	-0.0002	-0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	-0.0002	0.0000

그림 4는 표 2에서 얻은 값을 가지고 그래프화 시킨 것이다.  $R + \Omega^2 = 1$ 임을 시각적으로 확연히 알아볼 수 있다. 따라서 식 (1)을 변단면의 경우에 있어서도 적용할 수 있다고 하겠다.

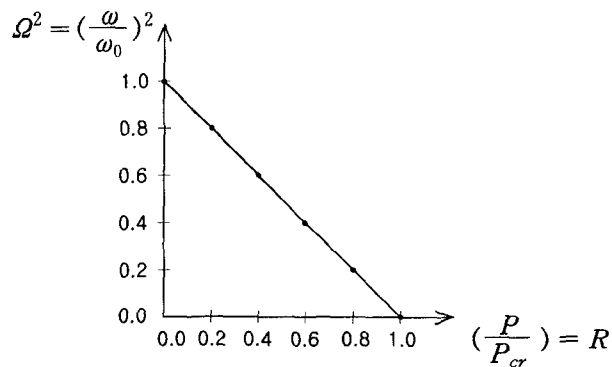


그림 4. 압축하중 - 진동수 관계

#### 4. 결 론

변단면 부재의 경우는 등단면과는 달리 해석적 방법에 의한 고유치의 산정이 쉽지 않다. 따라서 본 논문에서는 정현상 비대칭으로 taper진 압축재의 두 고유치(임계하중과 고유진동수)를 수치해석법의 하나인 유한요소법을 이용하여 구하였다. 양단의 경계조건은 양단고정, 단순-고정, 고정-단순 그리고 양단고정으로 하였고 이때 고려한 매개변수는 단면의 기울기를 나타내는 taper parameter,  $\alpha$ 와 단면의 성능을 지배하는 sectional property parameter,  $(m,n)$ 이다. taper parameter,  $\alpha$ 를 0.0에서 2.0까지로 하였고  $(m,n)$ 의 조합은  $(0,2)$ ,  $(1,3)$  또는  $(2,4)$ 로 하였다.

이 두 고유치의 관계를 알기 위해 압축력을 차츰 증가시켜 나가면서 여기에 대응하는 고유진동수를 구하였다. 그 결과 어떤 경우에 있어서도 임계하중 비( $P/P_{cr}$ )와 고유진동수 비의 제곱( $(\omega/\omega_0)^2$ )의 합은 그림 4에서와 같이 항상 단위치 1을 나타냈다. 따라서 정현상 비대칭으로 taper진 부재에 있어서도 등단면에서와 마찬가지로 식 (1)이 성립함을 알 수 있었다. 아울러 이러한 결과는 단순히 수치해석 결과에 의존하여 얻어진 것이므로 실험에 의한 검증이 수반되면 더욱 신뢰할 수 있을 것으로 사료된다.

#### 참 고 문 헌

1. Harold Lurie, "Lateral Vibrations as Related to Structural Stability"  
*Jour. of Applied Mechanics Div.*, ASME, V.10, No.12, September, 1952, pp.195-203
2. 川井忠彦, *捩屈問題解析*, 培風館(日本), 1974
3. Alexander Chajes, "Stability Behavior Illustrated by Simple Models"  
*Jour. of the Structural Div.*, ASCE, V.95, No.ST6, June, 1969, pp.1153-1172
4. Arvind K. Gupta, "Frequency-Dependent Matrices for Tapered Beams"  
*Jour. of the Structural Div.*, ASCE, V.112, No.1, January, 1986, pp. 85-103
5. Chen Y.Z, Cheung Y.K, and Xie J.R, "Buckling Loads of Columns with Varying Cross Sections", *Jour. of Engineering Mechanics*, ASCE, V.115, No.3, March, 1989, pp.662-667
6. Kanaka Raju K. and Venkateswara Rao G., "Free Vibration Behavior Tapered Beam Columns", *Jour. of Engineering Mechanics*, ASCE, V.114, No.5, May, 1988, pp.889-892
7. Murray R. Spiegel, *Probability and Statistics*, McGRAW-Hill, Inc, 1975, pp.258-264
8. 金淳哲, "構造物の 靜的安定과 固有振動數와의 關係," 全南大學校 大學院, 1991
9. 李守坤, *構造物の 安定 理論*, 全南大學校 出版部, 1995
10. Mario Paz, *Structural Dynamics*, Van Nostrand Reinhold Co., Inc, 1985, pp.402-407
11. 사중엽, Professor's Numerical Analysis Home Page, Ch.4, 회귀분석, Ch.5, 수치적분,