

Timoshenko 보이론에 의한 압전감지기와 압전작동기의 유한요소 모형화

Finite Element Modeling of Piezoelectric Sensors and Actuators based on Timoshenko Beam Theory

최 창 근* 송 명 관**
Choi, Chang-Koon Song, Myung-Kwan

ABSTRACT

In this study, a new smart beam finite element is proposed for the finite element modeling of the beam-type smart structure with bonded plate-type piezoelectric sensors and actuators. Constitutive equations for the direct piezoelectric effect and converse piezoelectric effect of piezoelectric materials are considered. By using the variational principle, the equations of motion for the smart beam finite element are derived. The presented 2-node beam finite element is isoparametric element based on Timoshenko beam theory. The validity of the proposed beam element is shown through comparing the analysis results of the verification examples with those of other previous researches. Therefore, by analyzing smart structures with smart beam finite elements, it is possible to simulate the control of the structural behavior by piezoelectric actuators with applied voltages and the monitoring of the structure behavior by piezoelectric sensors with sensed voltages.

1. 서 론

압전재료가 대표적인 스마트 재료인데, 힘을 받아서 변형률이 발생하였을 경우, 압전재료 표면에 전하가 발생하며, 이를 직접 압전효과(direct piezoelectric effect)라고 한다. 그리고, 압전재료에 전기장이 가해질 경우, 압전재료 내에 변형률이 발생하게 되는데, 이를 역압전효과(converse piezoelectric effect)라고 한다. 이러한 직접압전효과와 역압전효과는 전기에너지와 기계에너지 사이의 변환기구(transduction mechanism)를 정의한다. 이러한 압전효과는 natural quartz crystals, polycrystalline piezoceramic, semicrystalline polyvinylidene polymer, 사람의 뼈와 같은 많은 재료들에서 관측되었으며, 기계적인 재료로서의 스마트 재료로서는 lead zirconate titanate(PZT), polyvinylidene fluoride(PVDF)가 주로 사용된다⁽¹⁾.

사회기반 시설을 구축하는 다양한 토목 건축 분야의 주요 구조 부재에 이러한 재료를 이용한 스마트 구조물(smart structure)과 같은 지적 구조시스템을 도입함으로써, 지진이나 태풍 등의 자연 재해와 예지하기 곤란한 재해에 대한 생명, 재산 보전 등의 안정성 향상이 크게 기대되고 있다. 토목 건축 분야에서는 파괴 예지 센서로서 건전성 모니터링(health monitoring)의 기능이 실현될 수 있다면, 상기의 안정성 향상뿐만 아니라 내구성이나 노후화 점검에도 유효하여 구조물의 장수명에 따른 라이프사이클코스트 저감에 큰 효과를 볼 수 있다. 특히, 직접 육안 조사하기 어려운 기둥이나 보의 접합부, 지중 수중

* 정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

구조물 등 비파괴로 검사하기 어려운 경우나 원자로 등 인간이 접근할 수 없는 구조물에는 매우 필요하다고 볼 수 있다.

이러한 스마트 구조물의 건설을 위해서는 역학적인 거동에 관한 정확한 수치적인 자료를 확보해야 하는 데, 이를 위해서는 직접적인 실험 또는 정확한 수치해석의 개발이 필요하다. 토목 건축 구조물의 거동의 해석에 있어서 주로 사용하는 수치해석 방법으로 유한요소해석 방법이 주로 사용된다. 기존에 개발된 여러 가지 유한요소들 중에서 토목 건축 구조물의 해석에 있어서는 보유한요소가 가장 많이 사용된다. 따라서, 보형태의 스마트 구조물의 해석을 위해서는 스마트 보유한요소의 개발이 필요하다.

기존의 연구에 있어서 난해한 정식화 과정을 통하여 스마트 보유한요소가 고안되었음에도 불구하고 해석결과에 있어서는 그 만큼의 개선이 이루어지지 않았다. 따라서, 본 연구에서는 판형태의 압전감지기(piezoelectric sensor)와 압전작동기(piezoelectric actuator)가 접촉되어 있는 보형태의 스마트 구조물의 유한요소 모형화를 위한 새로운 2 절점 스마트 보유한요소를 제안한다. 압전재료의 직접압전효과와 역압전효과에 대한 구성방정식을 고려하고 변분원리를 이용하는 슈우면서 명확한 정식화 과정을 통하여 스마트 보유한요소의 운동방정식을 유도한다. 이러한 스마트 보유한요소는 등매개변수요소로서 Timoshenko 보이론을 기초로 한다.

2. Timoshenko 보이론

2.1 변위장의 가정

그림 1 에서의 변위장 가정을 위하여 기본적인 Timoshenko 의 보이론을 기초로 한다⁽²⁾. 중립축에 수직인 면은 변형후에도 직선을 유지하지만, 중립축에 대해서는 반드시 수직일 필요는 없다. 그러므로, 임의의 점 (x, z) 에서의 축방향변위 \bar{u} 를 수직면의 회전 $\theta(x)$ 로 직접 표현된다.

$$\bar{u}(x, z) = -z\theta(x) \quad (1)$$

회전변위 $\theta(x)$ 는 전단변형 β 를 고려하여 다음과 같이 표현된다.

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} - \beta \quad (2)$$

임의의 점 (x, z) 에서의 연직변위 \bar{w} 는 다음과 같이 중립축의 연직변위 $w(x)$ 로 직접 표현된다.

$$\bar{w}(x) = w(x) \quad (3)$$

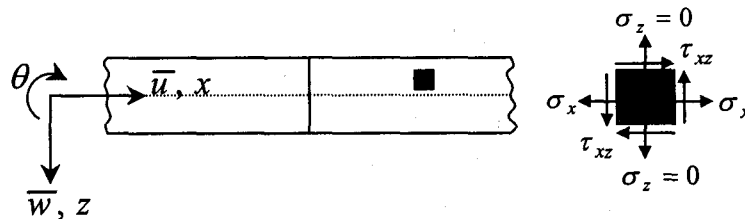


그림 1. Timoshenko 보

따라서, 미소변형이론의 가정하에서 축방향변형률 및 전단변형률은 다음과 같이 표현된다.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -z \frac{d\theta}{dx} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = -\theta + \frac{dw}{dx} = \beta \quad (4)$$

3. 스마트 보유한요소 정식화

그림 2와 같이 보형태의 구조물에 압전재료를 부착하면, 압전작동기와 압전감지기의 기능을 수행할 수 있게 된다. 상부에 부착된 작동기는 압전재료의 역압전효과를 이용하여 전압을 가해주면 부착된 구조물에 하중을 전달하게 된다. 그리고, 하부에 부착된 감지기는 압전재료의 직접압전효과를 이용하여 외부하중에 의해 내부에 변형률이 생기면 전기장을 발생하게 된다. 이러한 압전감지기와 압전작동기가 부착된 보형태의 구조물의 유한요소 모형을 위한 스마트 보유한요소를 정식화 한다.

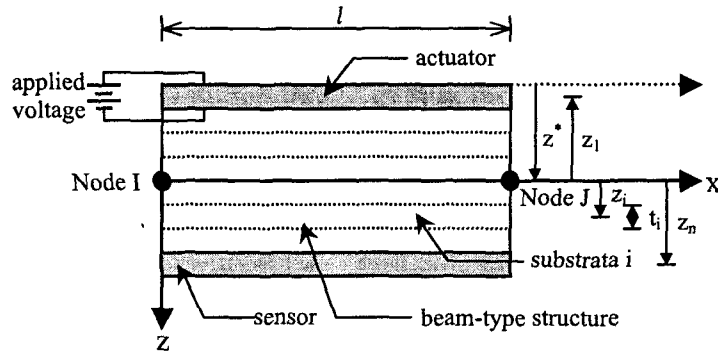


그림 2. 스마트 보유한요소(smart beam finite element)의 형태

3.1 가정

압전감지기와 압전작동기에 대한 운동방정식의 유도를 위하여 다음과 같은 사항을 가정한다⁽³⁾.

- (1) 보구조물에 비해 압전 작동기와 압전감지기는 얇은 판이다.
- (2) 압전재료는 z축의 양의 방향으로 전극화된다.
- (3) 전기장이 도입되었을 때, x축 방향으로만 재하된다.
- (4) 전극의 분포가 평행이다.
- (5) 압전재료는 균질하고, 등방성이며, 선형탄성거동을 한다.

보구조물의 운동방정식의 유도를 위하여 다음과 같은 사항을 가정한다.

- (1) 보구조물의 거동은 연속변위, 회전변위로 충분히 표현되며, 축방향변위는 미소하다.
- (2) Timoshenko 보이론을 적용하여 전단변형을 고려한다.
- (3) 축방향응력 σ_x 와 전단응력 τ_{xz} 를 고려한다.
- (4) 압전재료와 보구조물 사이는 완전 접촉되어 있다(perfect bonded).
- (5) 보구조물, 압전작동기와 압전감지기를 여러 개의 층으로 모형화한다.

3.2 중립축 산정

보구조물, 압전작동기, 압전감지기를 여러 개의 층으로 모형화하므로, 다음과 같이 구조물의 중립축을 산정한다.

$$z^* = \frac{\sum_{i=1}^n E_i z_i b_i t_i}{\sum_{i=1}^n E_i b_i t_i} \quad (5)$$

여기서, E_i, z_i, b_i, t_i 는 i 층의 탄성계수, 가장 윗면으로부터 i 층의 중심까지의 거리, i 층의 폭, i 층의 두께이다.

3.3 압전재료의 구성방정식

(1) 압전작동기에 대한 축방향응력-변형률-전기장의 관계는 다음과 같다^{(1),(3)-(8)}.

$$\sigma_x = E \varepsilon_x - E d'_{31} e_z \quad (6)$$

여기서, E 는 일정 전기장(electric field) 조건 하에서의 탄성계수, d'_{31} 는 압전변형률상수(piezoelectric strain constant), e_z 는 z 방향으로의 작용 전기장(applied electric field)이다.

압전작동기에 대한 전단응력-전단변형률 관계는 다음과 같다.

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (7)$$

여기서, 전단탄성계수 $G = E/(2(1+\nu))$ 이다. 압전감지기에 대한 전단응력-전단변형률 관계도 동일하다.

(2) 압전감지기에 대한 전기변위-변형률-전기장의 관계는 다음과 같다.

$$D_z = \mu_z^s e_z + e'_{31} \varepsilon_x = (\mu_z^s - E d'_{31}{}^2) e_z + E d'_{31} \varepsilon_x \quad (8)$$

여기서, D_z 는 전기변위(electrical displacement), μ_z^s 는 일정변형률 조건하에서의 유전상수(permittivity constant), e'_{31} 는 압전응력상수(piezoelectric stress constant), μ_z^s 는 일정응력 조건하에서의 유전상수(permittivity constant)이다

3.4 변분원리(variational principle)의 적용

일반적인 유한요소정식화의 변분방정식을 수정하여 다음과 같은 변분방정식의 유도가 가능하다^{(4),(6)}.

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \delta u \rho A \ddot{u} \right\} dx + \int \left\{ \frac{d(\delta \theta)}{dx} EI \frac{d\theta}{dx} \right\} dx + \int \left\{ \delta \beta G A \hat{\beta} \right\} dx - \int \left\{ \frac{d(\delta \theta)}{dx} E d'_{31} Q_p' \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right\} dx \\ & - \int \left\{ \frac{d(\delta \theta)}{dx} E d'_{31} Q_p'' \frac{\partial \phi_n}{\partial z} \right\} dx - \int \left\{ \frac{\partial(\delta \phi_1)}{\partial z} E d'_{31} Q_p' \frac{d\theta}{dx} \right\} dx \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& - \int \left\{ \frac{\partial(\delta\phi_n)}{\partial z} E d_{31} Q_p^n \frac{d\theta}{dx} \right\} dx - \int \left\{ \frac{\partial(\delta\phi_1)}{\partial z} \mu_z^s A_p^1 \frac{\partial\phi_1}{\partial z} \right\} dx \\
& - \int \left\{ \frac{\partial(\delta\phi_n)}{\partial x} \mu_z^s A_p^n \frac{\partial\phi_n}{\partial z} \right\} dx - \delta u P + \int \delta\phi_1 \bar{\sigma}_1 b_1 dx = 0
\end{aligned}$$

여기서, ρ 는 단위체적당 질량, ϕ_1 과 ϕ_n 은 압전작동기와 압전감지기의 전위(electric potential), $\bar{\sigma}_1$ 은 압전작동기의 표면전하(surface charge), S_1 은 표면전하가 가해지는 압전전동기의 표면적, u 는 보구조물의 변위, P 는 보구조물에 가해지는 외력이다. 첨자 l 과 n 은 각각 압전작동기의 층번호, 압전감지기의 층번호를 표시한다. 그리고, 재료특성상수들은 각 층의 기여도를 고려하여 다음과 같이 산정된다.

$$\begin{aligned}
\rho A &= \sum_{i=1}^n \rho_i b_i t_i ; EI = \sum_{i=1}^n \left(\frac{E_i b_i t_i^3}{12} + E_i z_i^2 b_i t_i \right) ; GA = \frac{5}{6} \sum_{i=1}^n G_i b_i t_i ; \rho A = \sum_{i=1}^n \rho_i b_i t_i \quad (10) \\
Q_p^1 &= z_1 b_1 t_1 ; Q_p^n = z_n b_n t_n ; A_p^1 = b_1 t_1 ; A_p^n = b_n t_n
\end{aligned}$$

3.5 형상함수(shape function)에 의한 변위장과 전위의 표현

보유한요소의 절점에서의 변위값과 형상함수를 사용하여 요소 내에서의 변위장을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
w(x) &= N_1 w_1 + N_2 w_2 \\
\theta(x) &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2
\end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $N_1 = (l-x)/l$, $N_2 = x/l$ 이다.

압전작동기와 압전감지기의 전위(electric potential)의 분포를 표현하는 함수를 다음과 같이 가정한다⁽⁶⁾.

$$\phi_1(x, y, z) = (z_1 - z)\phi_1^0(x) ; \phi_n(x, y, z) = (z_n - z)\phi_n^0(x) \quad (12)$$

여기서, $\phi_1^0(x)$, $\phi_n^0(x)$ 은 절점에서의 값과 형상함수에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_1^0(x) = N_1 \phi_{11}^0 + N_2 \phi_{12}^0 ; \phi_n^0(x) = N_1 \phi_{n1}^0 + N_2 \phi_{n2}^0 \quad (13)$$

4. 운동방정식의 유도

4.1 전기장-전위 관계

압전작동기와 압전감지기에 대해서 전기장-전위 관계는 다음과 같다^{(3),(5),(6),(8)}.

$$e_z^1 = -\frac{\partial\phi_1}{\partial z} = \langle \mathbf{B}_p^1 \rangle \{ \phi_1 \} ; e_z^n = -\frac{\partial\phi_n}{\partial z} = \langle \mathbf{B}_p^n \rangle \{ \phi_n \} \quad (14)$$

4.2 전기작동벡터(electrical actuating vector)

그림 3에서와 같이 압전작동기의 표면에 작용되는 분포 전하 밀도(distributed applied charge density), $\bar{\sigma}$ 를 전압(voltage, difference of electric potential)으로 표현하기 위하여 압전작동기에 분포하는 전위(electric

potential)의 분포를 명기하여야 한다^{(6),(9)}. 작용분포전하밀도(applied surface charge density)를 작용전압으로 표현하면 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} = \frac{\mu_z^s}{t_1} \left\{ \phi_1 \left(x, y, z_1 - \frac{t_1}{2} \right) - \phi_1 \left(x, y, z_1 + \frac{t_1}{2} \right) \right\} = \frac{\mu_z^s}{t_1} \cdot \text{Voltage} \quad (15)$$

따라서, 이를 사용하여 전기작동벡터(electrical actuating vector)를 구성할 수 있다.

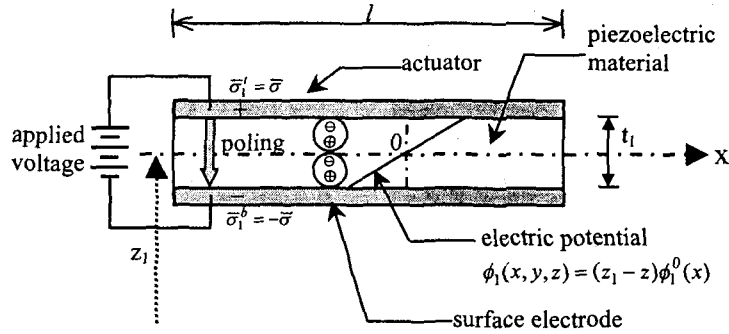


그림 3. 작용전압에 의한 전기작동모델(electric actuating model)

4.3 운동방정식

변분원리를 이용하여 최종적으로 다음과 같은 운동방정식이 구성된다.

$$[M^*] \{\ddot{u}\} + ([K_f] + [K_s]) \{u\} - [K_{p11}] \{\phi_1\} - [K_{pn1}] \{\phi_n\} = \{P\} \quad (16)$$

$$[K_{p11}]^T \{u\} + [K_{p12}] \{\phi_1\} = \{Q_1\} \quad (17)$$

$$[K_{pn1}]^T \{u\} + [K_{pn2}] \{\phi_n\} = \{0\} \quad (18)$$

식 (16), (17), (18)에서 정적응축(static condensation) 과정을 통하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[M^*] \{\ddot{u}\} + [K^*] \{u\} = \{P^*\} \quad (19)$$

여기서,

$$[K^*] = [K_f] + [K_s] + [K_{p11}] [K_{p12}]^{-1} [K_{p11}]^T + [K_{pn1}] [K_{pn2}]^{-1} [K_{pn1}]^T ; \{P^*\} = \{P\} + [K_{p11}] [K_{p12}]^{-1} \{Q_1\} \quad (20)$$

4.4 전압의 해석

위의 식 (17)과 (18)을 이용하여 압전작동기와 압전감지기에서의 발생전압을 다음과 같이 해석할 수 있다. 식 (17)과 (18)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\{\phi_1\} = [K_{p12}]^{-1} (\{Q_1\} - [K_{p11}]^T \{u\}) ; \{\phi_n\} = -[K_{pn2}]^{-1} [K_{pn1}]^T \{u\} \quad (21)$$

따라서, 변위에 대한 해석결과를 이용하여 다음 식 (22)에 의해 압전작동기와 압전감지기의 두 절점에서의 발생전압을 해석할 수 있다.

$$\{V_1\} = t_1 \{\phi_1\} ; \{V_n\} = t_n \{\phi_n\} \quad (22)$$

5. 예제해석

해석예제로서 그림 4와 같은 압전 bimorph 보를 해석한다. 이러한 압전 bimorph 보는 각 층이 반대방향으로 극성(polarities)을 갖는 2개의 PVDF 층으로 구성된다^{(8),(10),(11)}. 2개의 PVDF층의 재료물성치는 $E_p=2 \times 10^9(N/m^2)$, $\nu_p=0.29$, $d_{31}=2.2 \times 10^{-11}(m/V)$ 이다. 5개의 스마트 보유한요소로 모델링한다. 작용되는 전압에 의해서 각 층에서 인장과 압축이 발생하므로 보에서의 휨과 인장을 발생시키게 된다. 또한, 인위적인 보에 변형을 가함으로써 전압이 발생하게 된다. 본 연구에 의한 해석결과들을 기존의 연구들에 의한 해석결과들과 비교하였다. 그림 5에서는 작용전압을 0V에서 200V까지 변화시키면서 보 끝단의 연직변위를 비교하였다. 다른 연구결과들과 유사하게 해석치와 실험치 사이의 해석결과를 보여주고 있다. 그림 6에서는 작용전압 1V에 대해서 보의 각 절점에서의 연직변위를 비교하였다. 다른 해석결과들에 비해 미소하게 작은 해석결과를 주고 있다. 그림 7에서는 보의 끝에 1cm의 연직변위를 인위적으로 주었을 때의 각 요소에서의 발생전압을 비교하였다. 이론치에 근사하는 해석결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 여러 해석결과에 있어서 비교적 적은 수의 스마트 보유한요소에 의한 모형화에도 불구하고, 기존의 연구결과들과 근사한 해석결과를 보여주고 있다. 이러한 비교를 통하여 볼 때 본 연구에서 제안한 스마트 보유한요소를 이용하여 압전감지기와 압전작동기의 유한요소 모형화를 통한 정확한 수치해석이 가능하다는 것을 알 수 있다.

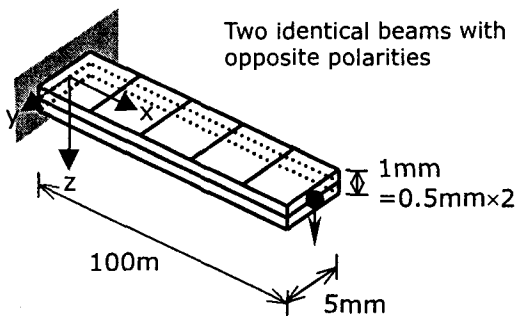


그림 4. 압전 bimorph 보

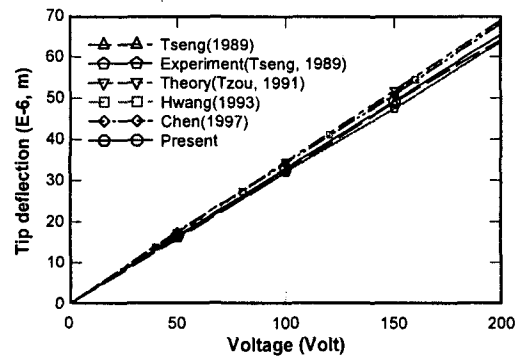


그림 5. 작용전압의 변화에 끝단 연직변위 비교

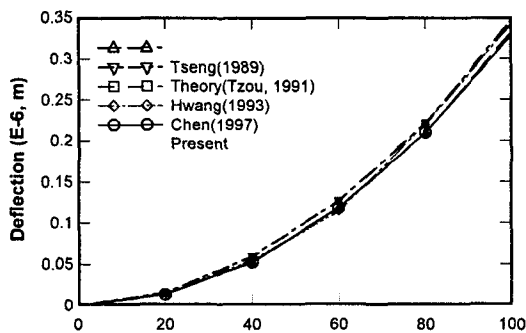


그림 6. 연직변위비교(작용전압=1V)

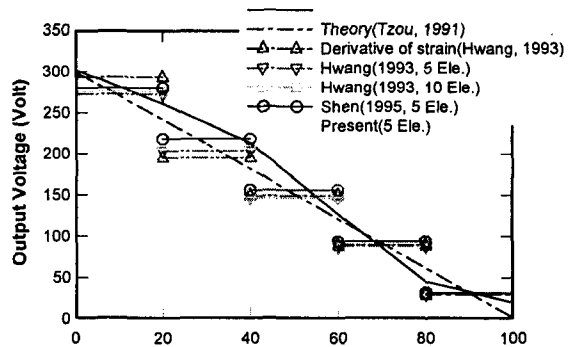


그림 7. 발생전압비교(끝단 연직변위=1cm)

6. 결 론

본 연구에서는 Timoshenko 보이론을 바탕으로 하여 압전감지기와 압전작동기의 유한요소 모형화가 가능한 스마트 보유한요소를 제안하였다. 따라서, 스마트 보유한요소에 의한 스마트 구조물의 해석을 통하여 압전작동기에서의 작용전압에 의한 구조물의 제어, 압전감지기에서의 발생전압의 감지에 대한 시뮬레이션이 가능하다. 향후 압전감지기에 의해 감지된 전압을 이용한 압전작동기의 작용전압 산정을 위한 알고리즘을 이용하여 스마트 보구조물의 수치실험이 가능할 것이다.

감사의 글

본 연구는 BK21 사업에 의하여 수행된 연구로서 본 연구를 지원해 준 교육부에 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Clark, R.L., Saunders, W.R. and Gibbs, G.P. (1998), *Adaptive Structures: Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, Canada
2. Owen, D.R.J. and Hinton, E. (1980), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Limited, UK
3. Lin, C.C. and Huang, H.N. (1999), "Vibration Control of Beam-plates with Bonded Piezoelectric Sensors and Actuators", *Computers & Structures*, Vol.73, No.1-5, pp.239~248
4. Allik, H. and Hughes, T.J.R. (1970), "Finite Element Method for Piezoelectric Vibration", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.2, pp.151~157
5. Ha, S.K., Keilers, C. and Chang F.K. (1992), "Finite Element Analysis of Composite Structures Containing Distributed Piezoceramic Sensors and Actuators", *AIAA Journal*, Vol.30, No.3, pp.772~780
6. Ray, M.C., Bhattacharyya, R. and Samanta, B. (1994), "Static Analysis of an Intelligent Structure by the Finite Element Method", *Computers & Structures*, Vol.52, No.4, pp.617~631
7. Carpenter, M.J. (1997), "Using Energy Methods to Derive Beam Finite Elements Incorporating Piezoelectric Materials", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol.8, pp.26~40
8. Chen, S.H., Wang, Z.D. and Liu X.H. (1997), "Active Vibration Control and Suppression for Intelligent Structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.200, No.2, pp.167~177
9. Griffiths, D.J. (1981), *Introduction to Electrodynamics*, Prentice-Hall, USA
10. Hwang, W.S. and Park, H.C. (1993), "Finite Element Modeling of Piezoelectric Sensors and Actuators", *AIAA Journal*, Vol.31, No.5, pp.930~937
11. Shen, M.H.H. (1995), "A New Modeling Technique for Piezoelectrically Actuated Beams", *Computers & Structures*, Vol.57, No.3, pp.361~366