

## 가중함수에 따른 능동제어 알고리즘의 비교 연구

### Comparative Study on Active Control Algorithms through Weighting Functions

민경원\*      김성춘\*\*      황성호\*\*      정진욱\*\*  
Min, Kyung-Won      Kim, Sung-Choon      Hwang, Seong-Ho      Joung, Jin-Wook

---

#### ABSTRACT

The cost function consists of the weighting functions concerning the structural responses to be controlled and the controller capability. Therefore, the control efficiency depends on the characteristics of the weighting functions. The objective of this paper is the comparative study of the time domain control strategies of LQR and LQG and the frequency domain strategy of  $H_2$  by setting the equivalent weighting functions to the all control strategies. As a result of analysis, LQR strategy is found to be more efficient than other strategies in terms of the response reduction, but the control force is found to be a little higher. As LQG can compensate the limitation of LQR that all state variables should be identified, LQG is more acceptable algorithm than LQR. Furthermore LQG shows a good performance both in the response reduction and the control force. Finally  $H_2$  algorithm is employed to illustrate the importance of weighting filters considering the frequency characteristics of the response and the controller. It is shown that the  $H_2$  algorithm is found to be the most effective one for the response control with a little control force having a low frequency band.

---

#### 1. 서론

능동제어의 대부분은 성능지수 또는 가중함수의 최적화를 통한 제어기 설계이므로 성능지수를 무엇으로 설정하느냐에 따라 제어의 목표가 변화하게 된다. 일반적으로 구조물 응답의 특정한 부분과 제어를 구현하는 구동기의 능력을 의미하는 제어력을 성능지수의 기본 변수로 설정하여 제어기를 설계하고 응답을 제어하게 된다.<sup>1)</sup> 이때 제어대상이 되는 응답과 제어력 양의 상대적인 비교를 나타내는 가중치 또는 가중함수를 조절하여 현실적인 구동기를 택하고 제어를 하게 된다. 성능이 좋은 구동기는 원하는 제어력을 발휘할 수 있기 때문에 구조물의 응답을 매우 감소시킬 수 있으나, 비경제적인 또는 비현실적인 구동기가 필요하게 되므로 제어기 설계가 가능하지 않게 되는 경우가 있다. 따라서 제어 설계자는 가중함수의 적절한 선택을 하여 항상 제어기와 응답제어를 살펴보아야 한다.

본 연구에서는 최적제어인 LQR(Linear Quadratic Regulator)<sup>1)</sup>, LQG(Linear Quadratic Gaussian Regulator)와  $H_2$ 에 이용되는 알고리즘의 가중함수를 통하여 응답제어, 전달함수 그리고 제어력 등을 분석하고 성능을 비교하기로 한다. LQR과 LQG 같은 제어 알고리즘의 가중함수는 시간영역(time domain)의 제어력과

\* 인천대학교 건축공학과 교수

\*\* 인천대학교 건축공학과 석사과정

응답에 관한 것으로 주파수에 관한 특성이 고려되지 않고 모든 주파수에 대하여 일정한 가중치가 적용되는 것이다. 그러나 건축 및 토목 구조물과 같은 저주파수의 특성을 나타내는 응답, 고주파수의 제어력을 구현하기 힘든 구동기의 한계, 실제의 응답이 아닌 여러 고주파수의 잡음 등 일련의 신호는 시간 영역 대신 주파수영역(frequency domain)으로 표현할 때 그 특성이 나타난다.  $H_2$  제어알고리즘은 응답과 제어력의 주파수 특성을 고려한 가중함수를 적용하여 제어 효율을 높인 방법이다. 따라서 본 연구에서는 각 알고리즘에 동일한 가중함수를 적용하여 제어성능을 분석하기로 한다.

## 2. 능동제어 알고리즘

시스템을 제어하는 최적제어 이론 중에 상태공간 모델을 이용한 LQR 알고리즘은 다음과 같이 표현된다.<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $A, B, C$  은 시스템 행렬,  $x$  는 시스템의 상태 벡터,  $u$  는 제어력 그리고  $y$  는 측정된 구조물의 측정 벡터이다. 식 (1)과 같은 상태공간 모델에 대한 2차 성능지수는 다음과 같이 정의된다.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2)$$

여기서 양의 반한정 대칭행렬인  $Q$  는 상태가중행렬(weighting matrix)로 상태변수(변위, 속도)를 제어 대상으로 하여  $Q$  가 클수록 상태변수를 최적으로 조절하고,  $R$  는 양의 한정 대칭행렬인 제어가중행렬로 제어력을 제어대상으로 값이 클수록 제어력의 크기를 최적으로 한다. 최적제어 문제는 상태방정식에 가격함수를 최소화하는 제어력을 찾는 문제로서, 최적제어가 유일하게 존재할 뿐 아니라 실시간에서 모든 상태변수를 측정할 수 있다면 최적제어력  $u(t)$  을 다음과 같이 상태변수  $x$  의 피드백 형태로 나타낼 수 있다.

$$u = -Kx \quad (3)$$

여기서 최소화 이득행렬  $K$  는  $R^{-1}B^T P x$  이고,  $p$  는 양의 한정 대칭행렬인 리카치 방정식의 해이다.

그러나, 실제 구조물에선 상태변수를 모두 정확하게 파악하는 것은 상당히 힘든 일이며 비용이 많이 든다. 이와 같이 측정이 가능하지 않는 상태변수들을 시스템의 입출력값을 이용하여 추정해야 할 필요성이 야기된다. 이러한 추정 방법을 상태추정기 설계(estimator design) 또는 관측기(observer)라고 한다. 시스템의 상태방정식이 다음과 같을 때

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (4)$$

관측기를 다음과 같이 설계함으로써 상태변수를 추정한  $\hat{x}$  를 구할 수 있다. 여기서  $A, B, C, D$  은 시스템 상태방정식이다.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} + Du) \quad (5)$$

식 (4)의 상태방정식에 제어력  $u$  을 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} \quad (6)$$

이러한 상태추정기인 관측기와 상태방정식이 결합된 블록선도는 다음과 같다.<sup>2)</sup>

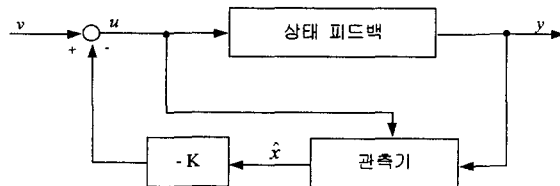


그림 1. 상태방정식과 관측기가 결합된 보상기

관측기에는 측정값을 이용하게 되므로 실제 센서잡음을 무시할 수 없다.<sup>3)</sup> 이 잡음을 확률변수로 취급해서 상태변수를 최적으로 추정하면 관측기와 비슷한 형태의 상태추정기를 얻게 된다. 이러한 추정기를 칼만필터(Kalman filter)라 한다.<sup>4)</sup> 칼만필터는 관측기의 관측 이득행렬의 값을 외란과 센서의 분산으로 최적의 값을 구한다. 다음은 실제 구조물에서와 같은 시스템의 상태공간 모델이다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Gw \\ y &= Cx + v \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $w$ 는 외란,  $v$ 는 센서(측정)잡음이며,  $G$ 는 외란에 대한 상태방정식이다. 상태변수와 추정치의 차인 추정오차 공분산을 성능지수  $J$ 로 두면 다음 식과 같다.

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ \{x - \hat{x}\} \{x - \hat{x}\}^T \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ e \cdot e^T \right] \quad (8)$$

성능지수  $J$ 를 최소화시키는 추정치  $\hat{x}$ 를 유도해 낼 수 있으며 칼만필터의 동역학 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad (9)$$

칼만필터의 안정도는  $(A - LC)$ 의 고유값에 의해서 결정된다는 것을 알 수 있다. 위 식 (9)을 정리하면 다음과 같은 칼만필터의 구조를 알 수가 있다.<sup>4)</sup>

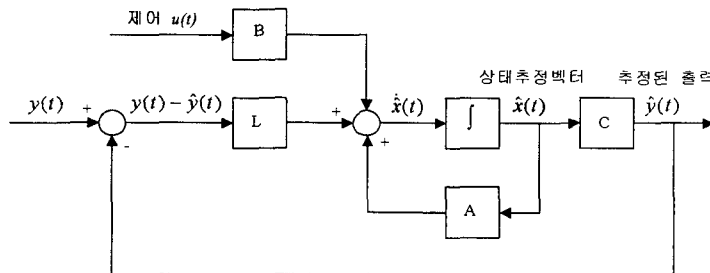


그림 2. 칼만 필터의 구조

이러한 상태추정기인 칼만 필터와 LQR 을 결합된 형태가 LQG 이다.

LQG 는 실제 구조물 제어에서 사용되는 방식으로써 시스템의 상태방정식과 출력방정식은 식 (7)과 같을 때 칼만필터 식 (9)와 LQR 을 정리하여 식 (10)이 되고, 그림 3 은 LQG 제어시스템의 구조이다.<sup>5)</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} - BK\hat{x} + Ly = (A - BK - LC)\hat{x} + Ly \\ u &= -K\hat{x} \end{aligned} \quad (10)$$

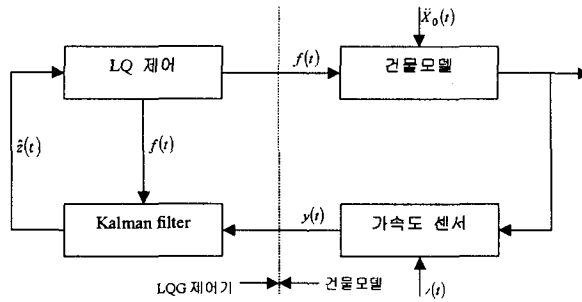


그림 3. LQG 구조 블록선도

이상에서 서술한 LQR 과 LQG 알고리즘은 건물 상태방정식의 시간영역 응답을 통해 제어하는 방식이다. 시간영역에서의 응답으로 제어력을 산정하므로 건물과 제어기에 가해지는 주파수에 관한 특성을 고려하지 않고 모든 주파수 대역에 동일한 가중치를 적용하여 제어한다. 따라서, 건축 구조물이나 토목 구조물에서의 응답과 같이 저주파수의 특성을 가지고, 구동기가 고주파수의 제어력을 구현하기 힘든 조건에서는 시간영역 응답 제어 알고리즘은 설계된 제어력의 신뢰성에 문제점을 가지고 있다. 응답을 분석할 때 시간 이력 대신에 주파수영역으로 응답 신호를 분석하여 특성을 알 수 있다. 이에 안정성을 높이기 위해 주파수영역에서 가중함수를 적용한  $H_2$  제어기법을 사용하고 있다.  $H_2$  제어기법은 주파수영역의 최적제어로서 주파수영역으로 표현된 구조물 및 외부 가진 모델을 직접적으로 다룰 수가 있으며 또한 가중함수를 사용하여 원하는 주파수대역에서의 외란의 영향을 감소시키고 측정잡음과 불확실성의 영향이 큰 주파수대역에서의 제어력을 제거 시킬 수 있기 때문에 효과적인 기법이다.  $H_2$ 는 단위 크기의 공분산을 가진 외부 입력(외란과 측정 잡음)에 대한 출력의 제곱평균제곱근(root-mean-square : RMS)값을 전달함수의 2-놈으로 정의하고 이를 최소화하고자 하는 제어기법이다. 이러한  $H_2$  제어 블록선도는 다음과 같다.<sup>9)</sup>

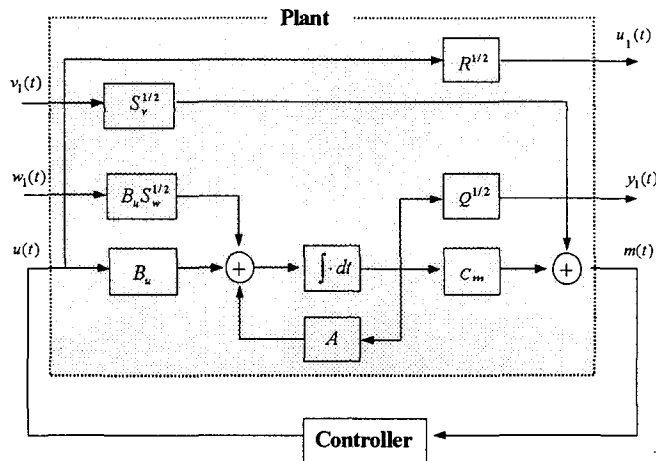


그림 4. LQG 와 동일한 가중 함수를 적용시  $H_2$ 의 블록선도 구조

여기서,  $s_v, s_w$ 는 센서잡음과 외란에 대한 스펙트럴 밀도이다.

### 3. 제어기 설계

본 수치해석에선 MATLAB 에서 사용되는 동적 해석 프로그램인 SIMULINK 을 이용하여 해석하였다. 각각의 제어알고리즘의 성능을 비교하기 위해서 다음과 같은 기준 모델을 정하였다. 첫째, AMD 가 설치된 3 층 건물에 3 층 응답(변위, 속도, 가속도)을 제어대상으로 설정하여 각 알고리즘의 시간이력, 제어력 그리고, 전달함수를 비교하였다. 둘째, 가중치행렬을 동일한 행렬값으로 설정하여 각 알고리즘을 적용하였다. Q와 R 은 일반적으로 응답과 제어력의 제어 변수로 나타낼 수 있다. 식 (2)과 같이 성능 지수를 최소화하는 것으로써 Q 가 클수록 응답제어가 잘되어 건물의 변위가 적어지고, R 이 클수록 제어력이 적게 들어가게 되며, Q와 R 를 제어응답의 한계 설정과 제어기의 성능을 고려하여 가장 적절한 값을 찾는 것이 중요하다. 본 수치해석에선 각 알고리즘에서 특성이 잘 나타난 동일한 Q와 R 의 비율을 사용하였다. 셋째, 시간영역 제어기법에서는 Q와 R 을 사용하여 제어하지만 주파수영역 제어기법에선 제어 대상에 주파수필터를 사용하여 원하는 제어성능을 발휘하게 한다.  $H_2$ 에서는 시간영역 제어기법과 주파수영역 제어기법의 동일한 기준을 설정하기 위해서 그림 4의 블록선도와 같이 Q와 R 을 비례적으로 적용하였다. 그리고  $H_2$ 의 가중함수를 주파수필터로 사용하여 특성을 비교하였다. 사용된 주파수필터는 건물의 주된 주파수영역이 저주파수이므로 저주파필터를 사용하여 응답을 감소시키고, 응답 측정시 발생하는 노이즈나 구동기의 특성상 발생하기 곤란한 고주파영역을 제거하기 위해 고주파필터를 사용하였다. 그림 5는 사용된 주파수 필터이다.<sup>7)</sup>

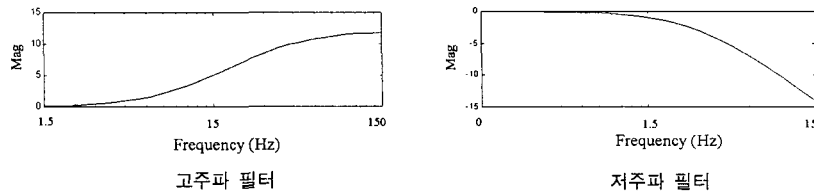
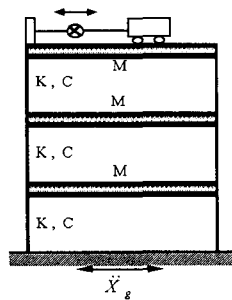


그림 5. 적용된 고주파 필터와 저주파 필터

수치 해석 예는 그림 6과 같은 3 자유도 모델이며 제어형식은 AMD(Active Mass Damper)를 가정하여 3 층에 설치된 모델을 사용하여 각 알고리즘을 비교하였다. 구조물의 질량, 강성, 감쇠값은 다음과 같고 입력 지진가속도는 El centro 지진(1940, NS)를 사용하였다.



질량  $M(t) = 34.5 \text{ t}$   
 강성  $K(kN/m) = 54040 \text{ kN/m}$   
 감쇠  $C(N \cdot s/m) = 20 \text{ N} \cdot s/m$   
 가중치  $Q=100, R=1$

그림 6. 3자유도 모델

피드백 능동제어에 사용된 각 알고리즘의 MATLAB 의 SIMULINK file 은 다음과 같다.<sup>8)</sup>

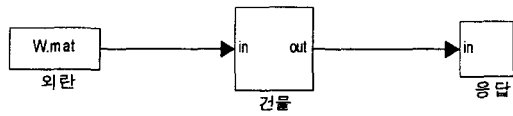


그림 7. 비제어시 SIMULINK 모델

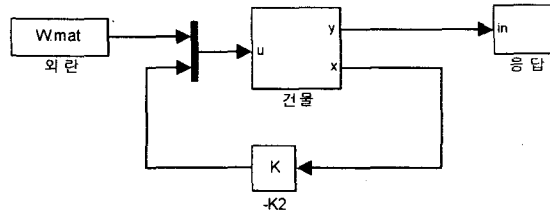


그림 8. LQR SIMULINK 모델

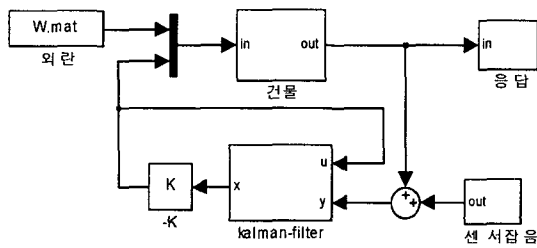


그림 9. LQG SIMULINK 모델

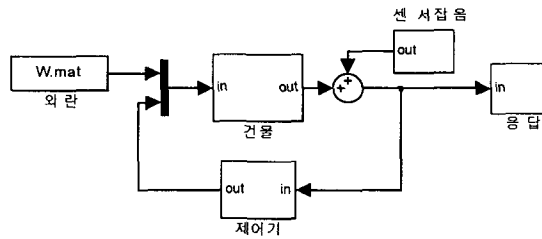


그림 10. H<sub>2</sub> SIMULINK 모델

#### 4. 실험 분석

SIMULINK 를 통해 각 알고리즘들의 3층 응답과 제어력을 산출하여 전달함수와 RMS 값을 통해 비교하였다. 그림 11, 12 은 각 알고리즘들의 3층의 응답 가속도와 제어력이다.

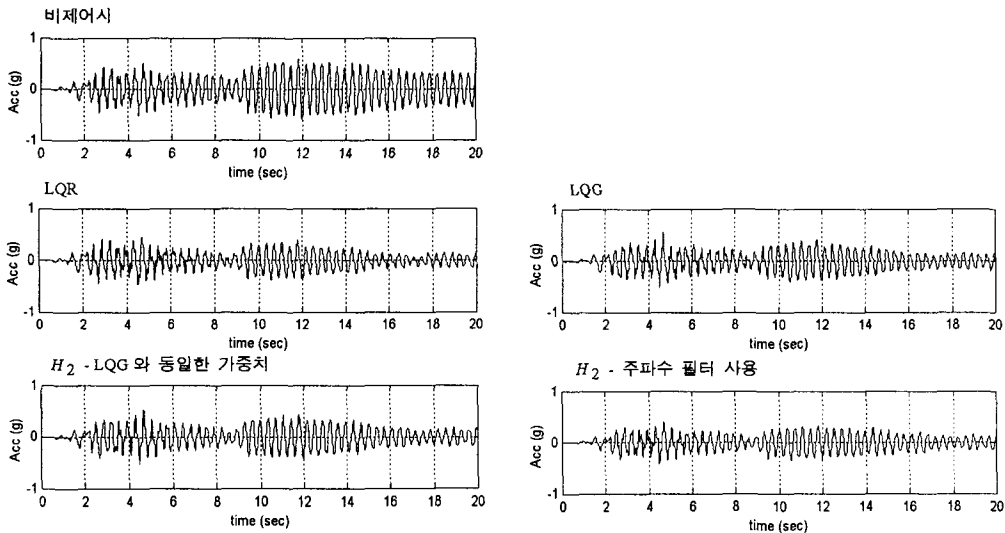


그림 11. 3층 응답 가속도

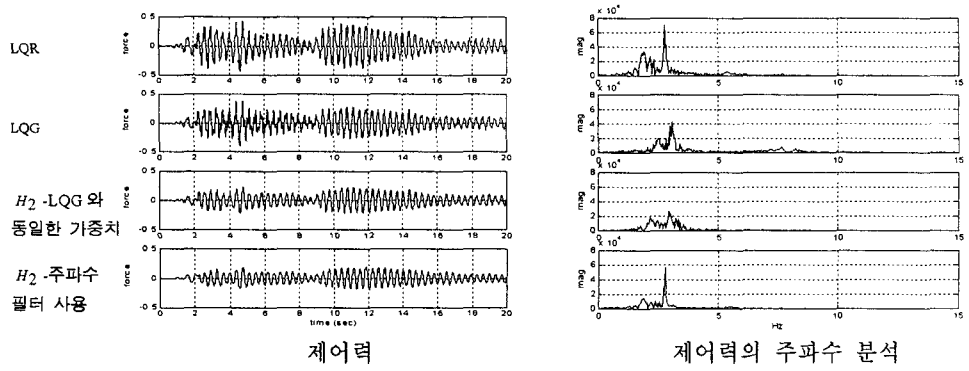


그림 12. 제어력과 주파수 분석

그림 11 과 같이 비제어시보다 각 알고리즘이 제어응답이 작아지며 LQR 이 다른 알고리즘보다 응답이 작다는 것을 볼 수 있다. 제어력 또한 LQR 이 상대적으로 큰 제어력을 발생하여 응답을 작게 한다. LQR 는 추정하지 않은 정확한 상태변수를 피드백하는 제어기법으로 효과적인 제어제인을 산정하기 때문으로 판단된다. 또,  $H_2$  에선 LQG 와 동일한 가중치를 사용한 것보다  $H_2$  주파수필터를 사용한 것이 제어응답과 제어력도 작아 나오는 것을 볼 수 있다. 건물의 고유주파수가 저주파수영역에 존재하기에 외란에 대한 건물의 주된 응답 또한 저주파이다. 이에  $H_2$  의 저주파필터로 제어대상인 응답에 가중치를 주어 효과적으로 제어할 수 있다. 그리고, 그림 12 처럼 고주파필터를 사용하여 시간영역 피드백인 LQR 과 LQG 보다 구동기에서 발생하는 제어력의 고주파부분을 감소시켜 현실적인 구동기의 안정성을 확보할 수 있다. 다음 그림은 각 알고리즘을 적용한 구조물의 전달함수이다.

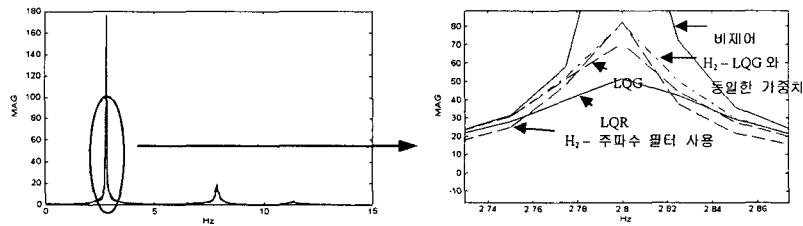


그림 13. 3층 응답에 대한 전달함수

각 알고리즘은 건축구조물에 고유주파수에는 영향을 미치지 않고 전달함수의 크기를 작게 하여 응답을 적게 한다. LQG 보다 LQR 이 크기가 더 작은 이유는 LQR 는 상태 제어기법으로 LQG 의 출력기법보다 더 효율적인 제어가 가능하다는 의미이며, 동일한 기준치를 사용한 LQG 와  $H_2$  가 다른 이유는 시간영역과 주파수영역에서의 계수 오차에서 발생으로 판단된다.

표 1. 각 알고리즘의 응답 비교 (RMS)

	LQR	LQG	$H_2$ -LQG와 동일한 기준치	LQR	$H_2$ 주파수 필터 사용
3층 응답 (g)	0.226	0.124	0.125	0.138	0.125
제어력	-	0.128	0.092	0.076	0.069
전달함수	46.07	26.40	28.74	30.08	27.35

위의 표 1은 응답, 제어력 그리고 전달함수에 대한 RMS 값으로 비교하기 위해 나타난 것이다. 비제어시보다 각 알고리즘이 제어를 잘 되는 면을 볼 수 있으며  $H_2$ 의 가중함수인 주파수필터가 제어응답은 LQR과 비슷하지만 적은 제어력을 요구하기 때문에 보다 효과적인 알고리즘으로 판단된다.

## 5. 결론

최적 능동제어는 설정한 성능지수에 따라 제어기의 설계가 이루어진다. 성능지수는 구조물의 응답과 제어기의 성능에 관한 가중함수가 적용되어 응답 제어와 이에 따른 제어기가 결정이 된다. 따라서 가중함수의 설정에 따라 응답의 제어효과와 제어기의 성능이 달리 결정이 된다. 본 논문에서는 최적 능동제어 알고리즘의 일종인 시간영역에서의 성능지수를 고려한 LQR 기법과 LQG 기법 및 주파수영역에서의 성능지수를 고려한  $H_2$  기법에 대하여 동일한 가중함수를 적용하여 제어 성능인 제어율과 제어력을 비교하는데 목적을 두고 있다. 특정한 가중함수를 사용하였기 때문에 결과를 일반화하기는 곤란하지만 분석 결과 LQR 기법이 제어율이 가장 좋으나 제어력이 크게 나와 제어 효과가 다른 기법에 비하여 반감되는 것을 알 수 있었다. 그러나 LQR 기법은 모든 상태 변수를 알아야 한다는 전제 조건이 있으므로 현실상 제약이 많은 기법이다. 이의 보완으로 유한 개수의 센서 출력인 응답을 이용, 상태변수를 추정하여 제어기 설계를 하는 LQG 기법에서는 LQR과 동일 수준의 제어율과 제어력을 보이고 있으며 출력 제어라는 장점을 고려하면 LQR 기법보다 현실적이라고 할 수 있다. 마지막으로  $H_2$  기법을 이용한 해석에서는 건물의 주된 응답 주파수인 저주파수와 이에 대한 응답을 효과적으로 제어하기 위하여 주파수 영역의 가중함수인 필터를 적용한 결과 제어율과 제어력이 향상되는 것을 알 수 있었다. 또한 제어력의 주파수 분포에서도 고주파수 부분이 다른 제어 기법과는 달리 감소되는 것을 알 수 있어 효과적으로 제어력이 설계된 것을 확인할 수 있었다.

## 감사의 글

이 연구는 과학기술부에서 시행하는 중점국가연구개발사업의 하나인 자연재해방재기술개발사업으로 수행된 것이며, 유니슨 산업(주)의 연구비 지원에 감사의 뜻을 전합니다.

## 참고 서적

- (1) Frank L. Lewis, Vassilis L. Syrmos, *Optimal Control*, John Wiley & Sons, Inc., 1995
- (2) 신춘식, 안영주, 변기식(1999), "MATLAB과 함께한 제어시스템 해석 및 설계", 동일 출판사
- (3) 김종식(1998), "선형 제어시스템 공학", 청문각
- (4) John Doyle, Bruce Francis, Allen Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Co., 1990
- (5) 민경원, 이성경, 김성춘(1999), "LQG 보상기를 이용한 건물의 진동제어 실험", 한국지진공학회 춘계 학술발표회 논문집, 제 3 권 1 호, pp202~214
- (6) 주석준(2000), "건축구조물의 지진응답의 강인제어에 대한 실험적 연구", 서울대학교 건축학과 박사 학위논문
- (7) Burl, J.B., *Linear Optimal Control -  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods*, Addison-Wesley, 1999
- (8) *Simulink Toolbox User's Guide*, The MathWorks, Inc., 1999