

RC T형 보의 최소경비설계를 위한 DCOC의 적용

Application of DCOC for Minimum Cost Design of Reinforced Concrete T-Beams

신연근* 박중열** 조홍동*** 한상훈****
Shin, Yon-Kun Park, Jung-Yeol Cho, Hong-Dong Han, Sang-Hoon

ABSTRACT

This paper describes the application of discretized continuum-type optimality criteria (DCOC) for design of the reinforced concrete T-beams. The cost of construction as objective function which includes the costs of concrete, reinforced steel and formwork is minimized. The design constraints include limits on the maximum deflection in a given span, on bending and shear strengths and optimality criteria is given based on the well known Kuhn-Tucker necessary conditions, followed by an iterative procedure for designs when the design variables are the depth and the steel ratio.

The versatility of the DCOC technique has been demonstrated by considering numerical examples which have one and five span RC T-beams.

1. 서론

현재까지 최적화는 수학적 계획법을 이용한 수치적 기법과 최적성규준에 의한 해석적 기법의 두 갈래로 발달해왔다. 일반적으로 설계변수와 제약조건의 수가 증가하게 되면 최적해에 도달하기 위한 재설계과정에서 요구되는 시간과 구조 재해석의 수가 증가하게 되어 수치적 구조 최적화 방법보다 해석적인 방법이 더 효율성이 좋게 된다. 이러한 점은 응력제약들과 하나의 변위제약을 갖는 문제들에 연속형 최적성규준(Continuum-type Optimality Criteria, COC)방법과 유한요소해석을 연결하여 반복 알고리즘을 개발한 Rozvany와 Zhou¹⁾에 의해 입증되었다. 그러나, COC에 근거한 방법들은 이산성향을 갖는 복잡한 구조물의 수반시스템(adjoint system)의 해석에서 기변형 효과를 다루는데 어려움이 있기 때문에 실제 구조물의 적용성이 결여되어 간단한 구조물에만 제한적으로 적용되었다. 이러한 제한적 요소를 제거하기 위하여 이산성 연속형 최적성 규준(Discretized Continuum-type Optimality Criteria, DCOC)에 근거한 방법들이 Rozvany와 Zhou^{1,2)}에 의해 개발되었다. 이들은 구조시스템에 대한 일반적인 최적성 규준을 유연도정식화에 의한 구조해석과 Kuhn-Tucker 필요조건을 이용하여 유도하였다. 그러나, 실제 수치과정에서의 구조해석은 보다 효율적인 강성도법을 이용하여 수행되고 있다.

일반적으로 기둥에 연결된 보에 의해 지지되는 대부분의 RC 구조물은 보와 슬래브가 일체형이므로 T형 단면으로 다루어지거나 중립축 깊이에 따라 직사각형단면으로도 설계가 가능하다. 본 논문에서는 DCOC 방

* 충북대학교 토목공학과 석사과정
** 충북대학교 토목공학과 박사과정
** 충북대학교 토목공학과 박사수료
*** 충북대학교 토목공학과 교수, 정회원

법을 철근콘크리트 T형보의 최소경비설계에 적용하였고, 제반 설계기준은 콘크리트구조설계기준을 따랐다. 또한 각 시간마다 균일한 단면을 갖는 다지간 RC T형보들의 최소 경비 설계를 위해 DCOC 알고리즘을 유도하였고 철근비는 보에서 자유롭게 변화하도록 허용하였다. 설계변수는 유효깊이와 철근비이며 목적함수는 콘크리트, 철근 및 거푸집에 관한 경비가 포함하도록 했다. 그리고 설계제약조건으로는 주어진 시간에서의 최대 처짐에 관한 제약과 휨 및 전단강도에 대한 제약, 그리고 설계변수에 대한 상한과 하한치에 대한 제약을 고려하였다.

2. 일반적인 문제 정식화와 최적성 기준

2.1. 문제의 정식화

강도제약 및 변위제약을 갖는 최소비용설계에 대한 일반적인 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } \phi(z) : z \in z_x \quad (1)$$

$$\text{Subject to } u_m - \Delta_{al} \leq 0 \quad (2a)$$

$$q_j^e(z) \leq 0 \quad [e=1, \dots, N_e ; j=1, \dots, J_e] \quad (2b)$$

$$z_i^l \leq z \leq z_i^u \quad (2c)$$

여기서, z 는 요소 $z_i (i=1, \dots, n_e)$ 를 갖는 설계변수벡터, z_x 는 그것의 유용영역, $\phi(z)$ 는 목적함수, u_m 과 Δ_{al} 은 주어진 절점에서의 처짐과 허용처짐값이다. 그리고 식(2b)는 강도제약조건을 나타내며, 식(2c)의 z_i^u 과 z_i^l 는 설계변수의 상·하한치를 나타낸다.

1) 처짐제약

처짐 u_m 은 지정된 자유도에서 가상일의 원리를 이용하여 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$u_m = \{ \bar{F}_f \}^T [f] \{ F_f \} + \{ \bar{F}_f \}^T \{ \hat{u}_f \} \quad (3)$$

여기서, $\{ F_f \}$ 는 실제절점력벡터이고, $\{ \bar{F}_f \}$ 는 그 절점에 재하된 가상 dummy 하중벡터에 상응하는 수반절점력벡터이다. 그리고 $[f]$ 는 전체 유연도 매트릭스이며, $\{ \hat{u}_f \}$ 는 초기변위벡터이다.

또한 만족되어야 하는 실제와 수반시스템의 평형방정식은 다음 식과 같다.

$$\{ P \} = [B] \{ F_f \} \quad (4)$$

$$\{ \bar{P}^v \} = [B] \{ \bar{F}_f \} \quad (5)$$

여기서, $[B]$ 는 평형 매트릭스 또는 정역학적 매트릭스이다.

2) 강도제약

강도제약은 일반적으로 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$q_j^e = \{ R_j^e \}^T \{ F_f^e \} + \{ \hat{R}_j^e \}^T \{ \hat{F}_j^e \} - \hat{c}_j \quad (6)$$

여기서, $\{ R_j^e \}$ 는 구조요소 재료의 상호단면특성과 강도에 의한 절점력에서 j 번째 강도제약에 대한 저항력을 관련시키는 벡터이고, $\{ \hat{F}_j^e \}$ 는 요소내에 적용된 분포하중에 의해 발생하는 지정된 점에서의 힘이다.

다. $\{\hat{\mathbf{R}}_j^e\}$ 는 $\{\hat{\mathbf{F}}_j^e\}$ 에서 j 번째 강도제약에 대한 저항력 관련 벡터이다. \hat{c}_j 는 j 번째 제약에 대한 임계 하중과 저항력의 비(比)에 관한 상수이다.

식 (3), (4), (5), (6)과 설계변수에 대한 한계제약을 기초로, 최적화 문제는 증대 라그랑지안(augmented lagrangian)을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } \bar{\Phi} = & \\ & \phi(z) + \mu[\{\bar{\mathbf{F}}_f\}^T[\mathbf{f}]\{\mathbf{F}_f\} + \{\bar{\mathbf{F}}_f\}^T\{\hat{\mathbf{u}}_f\} - \mathcal{A}_{al} + \eta] \\ & + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{J_e} \lambda_j^e [\{\bar{\mathbf{R}}_j^e\}^T\{\mathbf{F}_f\} + \{\hat{\mathbf{R}}_j^e\}^T\{\hat{\mathbf{F}}_j^e\} - \hat{c}_j + \omega_j^e] \\ & + \{\alpha^r\}^T[\{\mathbf{P}\} - [\mathbf{B}]\{\mathbf{F}_f\}] + \{\alpha^v\}^T[\{\bar{\mathbf{P}}^v\} - [\mathbf{B}]\{\bar{\mathbf{F}}_f\}] \\ & + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} \beta_i^e (-z_i^e + z_{iu}^e + s_i^e) + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} \gamma_i^e (z_i^e - z_{iu}^e + \bar{s}_i^e) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, μ , λ_j^e , $\{\alpha^r\}$, $\{\alpha^v\}$, β_i^e 와 γ_i^e 는 라그랑지 승수이며, η 는 상수 완화변수이고, ω_j^e , s_i^e , \bar{s}_i^e 는 완화함수이다. 기본변수는 요소 z_i ($i=1, \dots, n_e$)를 포함하는 요소단면 벡터 z 와 실제시스템의 요소절점력 $\{\mathbf{F}_f\}$, 그리고 수반시스템의 요소절점력 $\{\bar{\mathbf{F}}_f\}$ 이다.

2.2. 최적성 기준

정류해를 갖기 위한 필요조건은 Kuhn-Tucker 조건에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

1) 설계변수 z_i 에 의한 $\bar{\Phi}$ 의 변분

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z_i^e} = 0 \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi^e}{\partial z_i^e} - \mu \left[\{\bar{\mathbf{F}}_f^e\}^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z_i^e} \right] \{\mathbf{F}_f^e\} + \{\bar{\mathbf{F}}_f^e\}^T \left\{ \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_f^e}{\partial z_i^e} \right\} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{J_e} \lambda_j^e \left[\left\{ \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_j^e}{\partial z_i^e} \right\}^T \{\mathbf{F}_f^e\} + \left\{ \frac{\partial \hat{\mathbf{R}}_j^e}{\partial z_i^e} \right\}^T \{\hat{\mathbf{F}}_j^e\} \right] - \beta_i^e + \gamma_i^e = 0 \end{aligned} \quad (8b)$$

2) 실제 절점력 \mathbf{F}_f 에 의한 $\bar{\Phi}$ 의 변분

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \mathbf{F}_f} = 0 \quad (9a)$$

$$\mu [\mathbf{f}]\{\bar{\mathbf{F}}_f\} + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{J_e} \lambda_j^e \{\bar{\mathbf{R}}_j^e\} - [\mathbf{B}]^T \{\alpha^r\} = 0 \quad (9b)$$

3) 수반 절점력 $\bar{\mathbf{F}}_f$ 에 의한 $\bar{\Phi}$ 의 변분

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\mathbf{F}}_f} = 0 \quad (10a)$$

$$\mu [\mathbf{f}]\{\mathbf{F}_f\} + \{\hat{\mathbf{u}}_f\} - [\mathbf{B}]^T \{\alpha^v\} = 0 \quad (10b)$$

최적성 기준인 식 (9b)와 (10b)는 증대 라그랑지안 (7)에 포함되지 않은 수반시스템과 실제시스템의 적합 방정식을 나타낸다.

3. RC T형 보의 문제 정식화와 최적성 기준

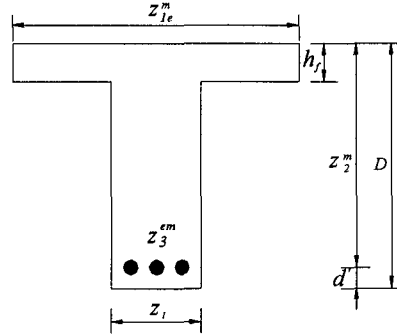


Fig. 1. RC T형보의 단면형상

3.1. 목적함수

본 논문에서는 단면이 지간마다 일정한 RC T형보들의 보다 실질적인 설계 문제를 다루었다. 지간은 N_e 요소로 나누어지고, N_m 지간을 갖는 다지간 보의 목적함수는 다음과 같다.

$$\psi^{em}(z_2^m, z_3^{em}) = \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} [z_2^m \cdot (z_3^{em} \{ \bar{z}_{1e}^m (c_{sc} - 1) c_c \} + \{ (z_1 + 2c_{fc}) c_c \}) + \{ (z_1 (d' - h_f) + [z_1 + 2(d' - h_f)] c_{fc}) c_c \}] L^{em} \quad (11)$$

여기서, 설계 유효폭은 다음과 같이 구한다.

$$\bar{z}_{1e}^m = \begin{cases} z_1, & \text{부의 휨모멘트를 받는 단면일 경우} \\ z_{1e}^m, & \text{그 외의 경우} \end{cases} \quad (12)$$

3.2. 제약조건

처짐제약은 다음 식 (13)과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_m = \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{Q^{em}}{l_2^{em} (z_2^e)^3} \quad (13)$$

여기서,

$$Q^{em} = \int_L \bar{M}(x) M(x) dx, \quad l_2^{em} = 0.045 E_c \bar{z}_{1e}^m (0.7 + 0.3 z_1 / \bar{z}_{1e}^m)^3$$

또한 휨강도 제약조건과 전단강도 제약조건은 다음 식 (14)와 식 (15)와 같다.

$$q_1^e = \frac{2|M_{\max}^e|}{l_3 (z_2^e)^2} - \hat{c}_1 \quad (14)$$

$$q_2^e = \frac{|V_{\max}^e|}{l_4 z_2^e} - \hat{c}_2 \quad (15)$$

여기서,

$$l_3 = 2\bar{z}_{1e}^m z_3^{em} (c_2 - c_3 z_3^{em}), \quad c_2 = 0.85 f_y$$

$$c_3 = 0.5 f_y^2 / f_{ck}, \quad l_4 = c_4 \bar{z}_{1e}^m, \quad c_4 = 0.8 \times (0.53 \sqrt{f_{ck}} + 2.12 \sqrt{f_{ck}}), \quad \hat{c}_1 = \hat{c}_2 = 1$$

3.3. 최적성 기준

최적성 기준에 대한 유효깊이 z_2^m 과 철근비 z_3^{em} 의 변분은 식(16)과 식(17)과 같다.

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[m_1 L^{em} + z_3^{em} m_3 L^{em} - \mu \frac{Q^{em}}{(l_2^{em}/3)(z_2^m)^4} - \lambda_1^{em} \frac{2|M_{\max}^{em}|}{z_{1e}^m (z_2^m)^3 z_3^{em} (c_2 - c_3 z_3^{em})} \right. \\ \left. - \lambda_2^{em} \frac{|V_{\max}^{em}|}{l_4 (z_2^m)^2} + \frac{3\mu}{l_2^{em}} \bar{u}_a^{em} - \beta_2^{em} + \gamma_2^{em} \right] = 0 \quad (16)$$

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[m_3 L^{em} z_2^m - \lambda_1^{em} \frac{(c_2 - 2c_3 z_3^{em}) |M_{\max}^{em}|}{z_{1e}^m (z_2^m)^2 (z_3^{em})^2 (c_2 - c_3 z_3^{em})^2} - \beta_3^{em} + \gamma_3^{em} \right] = 0 \quad (17)$$

4. 반복절차

DCOC 알고리즘의 전체적인 최적 설계 순서는 다음 Fig. 2와 같다. 또한 처짐제약은 항상 활성화 ($\mu > 0$)이라고 가정하고, 설계변수들의 분포를 통제하는 활성거동제약들의 가능한 조합은 다음과 같다.

- 1) 처짐제약과 휨강도제약에 의해 통제되는 요소(D-M)
- 2) 처짐제약과 철근비 하한에 의해 통제되는 요소(D-L)
- 3) 휨강도 제약과 철근비 상한에 의해 통제되는 요소(M-U)
- 4) 전단강도제약과 휨강도제약에 의해 통제되는 요소(S-M)
- 5) 전단강도제약과 철근비 하한에 의해 통제되는 요소(S-L)
- 6) 유효깊이의 하한과 휨강도제약에 의해 통제되는 요소(L-M)
- 7) 깊이 하한과 철근비 하한에 의해 통제되는 요소(L-L)
- 8) 휨강도제약과 휨강도제약에 의해 통제되는 요소(M-M)
- 9) 휨강도제약과 철근비하한에 의해 통제되는 요소(M-L)

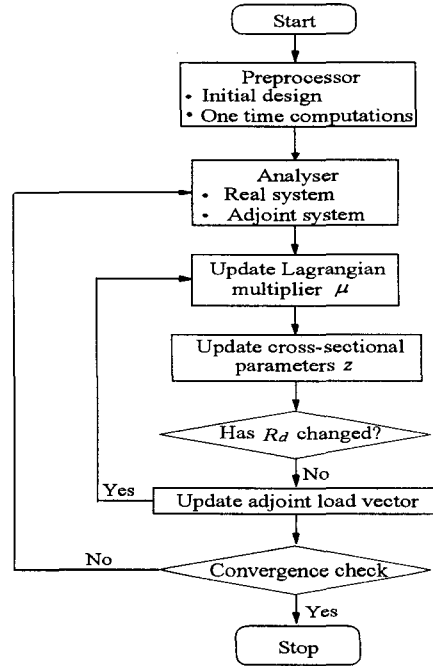


Fig. 2. 전체 최적화 과정

5. 수치예제

제안된 DCOC방법의 알고리즘의 적용성 및 효율성을 보이기 위하여 단순보와 5경간 연속보에 대해서 초기단면을 변화시키고 경간의 분절요소수를 다르게 하며 경비 최소화 문제를 수행하였다. 수치예에 적용되는 재료의 특성치와 경비 데이터는 Table 1과 같다.

Table 1. Material properties and cost data

재료 특성치		실제경비*	상대경비**
콘크리트	철근		
$f_{ck} = 240 \text{ kgf/cm}^2$ $E_c = 232,379 \text{ kgf/cm}^2$ $w_c = 2.5 \text{ tf/m}^3$	$f_y = 4,000 \text{ kgf/cm}^2$ $E_s = 2,000,000 \text{ kgf/cm}^2$	$c_c = 43,610 \text{ 원/m}^3$ $c_f = 8,200 \text{ 원/m}^2$ $c_s = 2,128,244 \text{ 원/m}^3$	$c_{cc} = 1$ $c_{fe} = 0.19$ $c_{sc} = 48.80$

*2000년 1월 정부구매물자 가격정보 기준
 **콘크리트를 기준으로 한 철근과 거푸집의 상대경비

실제 재하하중은 하중계수가 고려된 $U = 1.4D + 1.7L$ 을 부과하였다. 강도감소계수는 휨과 전단에 대해 각각 0.85와 0.8을 고려하였다. 그리고, 단면의 폭은 30cm, 피복 두께는 5cm, 플랜지 두께는 12cm이다. 최대 허용처짐의 한계는 $\Delta_{al} = l/480$ 의 경우를 고려하였다.

5.1. 단순보

본 논문에서는 DCOC의 적용성을 검증하기 위해 활하중 13kgf/cm, 고정하중 15kgf/cm(자중은 별도)가 작용하는 지간 600cm인 단순보에 대한 최적화를 수행하였다. 또한 이 결과에서 얻은 단면 폭과 유효 깊이를 사용하여 수계산에 의한 휨설계를 통해 철근량을 구해 비교해 보았다. 이 설계 결과를 Table 2에 나타내었으며, 다양한 초기 설계깊이를 가지고 수행한 결과가 Table 3에 요약되어 있다. Table 2와 3에서 알 수 있듯이 본 연구의 알고리즘은 신뢰성을 지님을 알 수 있다. 단순보의 최적화과정에서 요소의 수는 4개의 동일요소로 분절시킨 경우의 결과이며, 실제비용은 상대비용에 $c_c L_T^3$ (L_T 는 보의 길이)을 곱해줌으로써 얻을 수 있다.

Table 2. 단순보의 최적 설계

결과 경우	단면폭(cm)	유효깊이(cm)	소요 철근량(cm^2)			
			A_{s1}	A_{s2}	A_{s3}	A_{s4}
DCOC에 의한 최적설계	30.0	46.92	10.15	13.60	13.60	10.15
수계산에 의한 최적설계	30.0	46.92	10.15	13.60	13.60	10.15

Table 3. 초기깊이에 따른 단순보의 최적 설계 결과

초기깊이(cm)	최적유효깊이(cm)	초기상대경비(원)	최종상대경비(원)	라그랑지승수	활성제약
30.0	46.92	4.8854E-03	4.9613E-03	8.4227E+03	D-M
50.0	46.92	4.9991E-03	4.9613E-03	8.4224E+03	D-M
80.0	46.92	5.1642E-03	4.9613E-03	8.4225E+03	D-M
100.0	46.92	5.2710E-03	4.9613E-03	8.4225E+03	D-M

5.2. 5경간 연속보

활하중 13kgf/cm, 고정하중 15kgf/cm(자중은 별도)이 작용하는 5경간 연속보에 대한 설계를 수행하였으

며, 이에 대한 설계결과는 다음과 같다. 초기상대경비는 1.3936×10^{-4} 에서 1.2862×10^{-4} 의 최종상대비용으로 수렴하고, 라그랑지승수는 1.0591×10^4 으로 수렴하였다. 이 때 실제비용의 계산은 단순보의 경우와 동일하다. 연속보의 휨모멘트도와 최적 철근량의 분포를 비교할 수 있도록 시간당 10개의 요소로 분절하여 최적화를 수행하였다. 그림 3은 최적설계에 의한 자중을 포함한 계수하중에 상응하는 전단력도와 휨모멘트도를 보여준다. 최적 설계 결과에 대한 최적단면, 철근량 및 활성제약을 Table 4에 나타내었다.

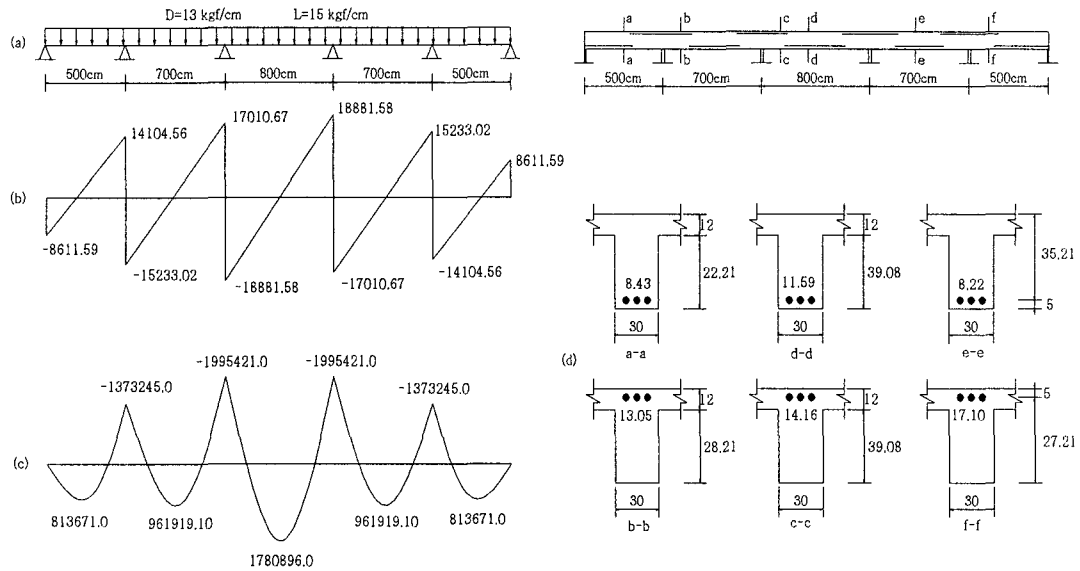


Fig 3. A five-span beam (a) geometry and service loading; (b) S.F.D.(kgf) for optimum design; (c) B.M.D.(kgf · cm) for optimum design; (d) optimal distribution of the depth(cm) and the steel area(cm²)

Table 4. 5경간 연속보의 최적 설계

경간	초기깊이 (cm)	유효깊이 (cm)	소요 철근량(cm ²)									
			활성 제약									
1	80.0	29.21	A_{s1}	A_{s2}	A_{s3}	A_{s4}	A_{s5}	A_{s6}	A_{s7}	A_{s8}	A_{s9}	A_{s10}
			3.81	6.53	8.08	8.43	8.43	7.57	5.53	3.07	8.02	17.10
			M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-L	M-M
2	80.0	35.21	A_{s11}	A_{s12}	A_{s13}	A_{s14}	A_{s15}	A_{s16}	A_{s17}	A_{s18}	A_{s19}	A_{s20}
			13.05	3.70	6.90	9.32	9.76	9.76	8.22	4.91	8.30	20.61
			M-M	M-L	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M
3	80.0	46.08	A_{s21}	A_{s22}	A_{s23}	A_{s24}	A_{s25}	A_{s26}	A_{s27}	A_{s28}	A_{s29}	A_{s30}
			14.16	4.84	7.61	10.59	11.59	11.59	10.59	7.61	4.84	14.16
			D-M	D-L	D-M	D-M	D-M	D-M	D-M	D-M	D-M	D-L
4	80.0	35.21	A_{s31}	A_{s32}	A_{s33}	A_{s34}	A_{s35}	A_{s36}	A_{s37}	A_{s38}	A_{s39}	A_{s40}
			20.61	8.30	4.91	8.22	9.76	9.76	9.32	6.90	3.70	13.05
			M-U	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-L
5	80.0	29.21	A_{s41}	A_{s42}	A_{s43}	A_{s44}	A_{s45}	A_{s46}	A_{s47}	A_{s48}	A_{s49}	A_{s50}
			17.10	8.02	3.07	5.53	7.57	8.43	8.43	8.08	6.53	3.81
			M-U	M-M	M-L	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M	M-M

6. 결 론

본 논문에서는 RC T형보의 최소 경비 설계를 위해 DCOC 기법을 적용하였다. 일반적으로 복잡한 구조물이나 거대구조물의 경우에 설계변수와 제약조건의 수가 상당히 증가하게 되면 수치적 구조 최적화 방법은 능력에 제한을 받게 되지만, 본 논문에서 제시한 이산성 연속형 최적성 규준방법(DCOC)에 의한 최적설계는 설계변수와 제약조건의 수에 거의 영향을 받지 않을 뿐만 아니라 국부해로 빠질 염려가 거의 없다. 또한 요소수의 증가에 따른 설계변수의 수와 제약조건의 수가 상당히 증가함에도 불구하고 고차의 비선형 최적화 문제의 최적해에 빠르게 수렴하였으며, 최적해는 초기치의 변화에 영향을 받지 않고 거의 동일한 값으로 수렴하였다. 그러므로 DCOC방법에 의한 알고리즘은 실제 설계실무에서 철근 콘크리트 연속 T형보의 예비설계로 이용하기에 매우 적합하다고 판단된다.

참 고 문 헌

1. Rozvany, G.I.N., and Zhou, M., "Continuum-based Optimality Criteria(COC) Methods : An Introduction", *Structural Optimization* 1, pp. 1~26, 1993.
2. Zhou, M., and Rozvany, G.I.N., "DCOC : An Optimality Criteria Method for Large System Part I : Theory", *Structural Optimization* 5, pp. 12~25, 1992.
3. Zhou, M., and Rozvany, G.I.N., "DCOC : An Optimality Criteria Method for Large System Part II : Algorithms", *Structural Optimization* 6, pp. 250~262, 1993.
4. 변동균, 신현목, 문계길, "철근 콘크리트", 동명사, 1999.
5. 한국콘크리트학회 · 대한건축학회, "콘크리트구조설계기준", 건설교통부, 1999.
6. William Weaver, Jr. and James M. Gere., "Matrix Analysis of Framed Structures", Chapman & Hall, 1990.