

## Bubble mesh을 이용한 적응적 EFG해석

### An adaptive analysis in the element-free Galerkin method using bubble meshing technique

이계희<sup>1)</sup>      최창근<sup>2)</sup>      정흥진<sup>3)</sup>

Lee, Gye-Hee   Choi, Chang-Koon   Chung, Heung-Jin

---

#### ABSTRACT

In this study an adaptive node generation procedure in the Element-free Galerkin (EFG) method using bubble-meshing technique is proposed.

Based on the error function that obtained by projected error estimation method, the initial node arrangement is defined along the background cell that is used in the numerical integration. To obtain the smooth nodal configuration, the nodal configuration are regenerated by bubble-meshing technique. This bubble meshing technique was originally developed to generate a set of well-shaped triangles and tetrahedra. Its basic idea is packing circles or spheres, called bubble, into the specified area or space naturally using some dynamic equations with attracting and repelling force.

To demonstrate the performance of proposed scheme, the convergence behaviors are investigated for several problems.

---

#### 1. 서론

무요소법에서는 절점의 추가 및 삭제에 따른 부가적인 요소망의 구성 및 수정이 필요없기 때문에 유한요소법에 비하여 간편하게 오차가 큰 부분의 정밀도를 높일 수 있는 방법으로 알려져 있다.

이러한 무요소법의 특징을 이용한 적응적해석법은 여러 연구자들에 의해서 다양한 방법으로 제안되어왔다. Durate와 Oden(1996)은 내부와 Neumann경계에서의 residual을 이용한 오차평가법

---

1) 한국과학기술원 토목공학과 박사과정  
2) 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수  
3) 전주대학교 토목환경공학과 조교수

을 제안하였고 Liu 등(1996)은 wavelet 함수를 이용한 Reproducing Kernel Particle Methods(RKPM)으로 경계탐색(edge detection) 및 오차의 집중점을 찾는 방법을 제시하였다. Haussler-Combe와 Korn(1998)은 형상함수의 2차 미분항을 이용하여 보간시 발생하는 오차를 산정하였으며 최근에 Chung와 Lee(2000)은 적분 cell을 이용한 적응적해석을 수행하였다.

본 연구에서는 “Bubble mesh“라 불리는 새로운 절점 배치법을 element-free Galerkin(EFG) 방법에 적용한 적응적해석을 수행하였다. 이 방법에서 각각의 절점은 주어진 오차함수에 기초한 크기와 동적특성을 갖는다. 이 때 사용되는 오차함수는 원 형상함수보다 작은 영향범위를 갖는 형상함수를 이용하여 절점의 응력을 보간하여 임의점의 응력을 산정하고 이 투영응력과 EFG방법에 의하여 계산된 응력간의 차로 정의된다. 이를 기초로 동적상사과정을 통해 각 절점의 최적 배치를 산정하였다.

## 2. EFG 근사와 오차평가

무요소법에서 형상함수의 도함수는 원 형상함수보다 더 높은 진동수 성분을 가지기 때문에 오차가 큰 곳에서는 응력이 가상적으로 진동하게 된다. 따라서 이러한 응력의 가상진동을 줄여주면 보다 정확한 응력분포를 산정할 수 있으며 이를 위하여 위에서 얻어진 절점응력을 다음과 같이 투영한다.

$$\sigma^p(\mathbf{x}) = \sum_K^l \left\{ \psi_K(\mathbf{x}) \mathbf{D} \sum_I^n \mathbf{S} \phi_I(\mathbf{x}_K) \mathbf{u}_I \right\} = \sum_K^l \psi_K(\mathbf{x}) \sigma^h(\mathbf{x}_K) \quad (1)$$

여기서  $\sigma^h(\mathbf{x}_K)$ 는 절점에서의 응력이며  $l$ 은 투영응력의 영향영역내의 있는 절점의 수이다. 위 식에서 각 형상함수는 다음과 같이 나타낸다.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) \left( \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}, a_1) \mathbf{B}(\mathbf{x}, a_1) \right)_{ji} \quad (2)$$

$$\psi_K(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(x) \left( \mathbf{A}_p^{-1}(\mathbf{x}, a_2) \mathbf{B}_p(\mathbf{x}, a_2) \right)_{jK} \quad (3)$$

여기서 (2)식은 EFG의 형상함수이며 (3)식은 투영응력의 형상함수이다. 이 때 투영응력의 형상함수는 EFG형상함수에 비하여 작은 영향영역을 사용한다. 결과적으로 보면 위에서 얻어진 투영응력은 절점의 응력을 원래의 형상함수보다 작은 영향영역을 갖는 또 다른 형상함수로 보간하는 것이다. 따라서 기존의 계산 루틴을 그대로 이용할 수 있으므로 간단하게 구현할 수 있다. 이후의 오차 평가에 있어서는 이 투영응력을 정확해로 가정한다. 따라서 임의의 점에서의 오차는 다음과 같이 나타낸다.

$$\sigma^e(\mathbf{x}) = \sigma^p(\mathbf{x}) - \sigma^h(\mathbf{x}) \quad (4)$$

따라서 전체 해석의 상대오차는 다음과 같이 나타낸다.

$$R = \frac{\|E\|}{\|U\|} = \frac{\left\{ \frac{1}{2} \int \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2}}{\left\{ \frac{1}{2} \int \sigma^T(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2}} \quad (5)$$

### 3. Bubble Mesh 방법

#### 3.1 방법의 개요

Bubble mesh 방법은 구나 원을 주어진 영역에 가능한 한 많이 집어넣어 포장하는(packing) 방법으로 요약할 수 있다. 이러한 과정에서 각 원(즉 bubble)사이에 틈새나 겹치는 부분이 필연적으로 발생한다. 따라서 bubble mesh의 첫 번째 목표는 이러한 bubble 사이의 틈새나 겹치는 부분을 최소화할 수 있도록 적절한 수의 bubble를 적절한 위치에 배치하는 것이다. 이러한 과정은 다음과 같은 과정을 통해 실현될 수 있다.

- 1) 계층적인 분할에 의한 초기배치
- 2) 각 bubble사이의 적절한 인력과 척력의 산정
- 3) 위의 힘이 균형을 이루도록 적절한 동적 상사(dynamic simulation)의 반복수행 및 bubble 수의 조절

위에서 언급한 힘의 균형을 위한 동적상사나 bubble수의 조절같은 과정을 원활히 수행하기 위해서는 초기 배치가 필수적이다. 이는 최적해를 얻기 위해 필요한 반복계산의 수를 크게 줄여주고 수렴성을 증대시킨다.

초기배치가 얻어졌으면 다음 단계로 bubble 사이의 적절한 균형에 의한 최적배치가 가능하도록 인력과 척력을 정의해야 한다. 이상적인 최적배치는 인접한 두 bubble는 서로 닿아있고 두 bubble사이의 힘은 없는 상태이다. 이 때 두 bubble의 거리는 안정거리(stable distance,  $l_0$ )라 한다. 이 값은 두 bubble의 반지름의 합이다. 따라서 두 bubble이 이보다 가까우면 척력이 작용하고 이보다 가까우면 인력이 작용한다. 이러한 힘은 원자간에 작용하는 van der Waals의 힘과 유사하다. 그림 1은 이러한 힘을 두 bubble사이의 거리에 대한 3차함수로 나타낸 것이다. 이 함수는 다음과 같은 경계조건을

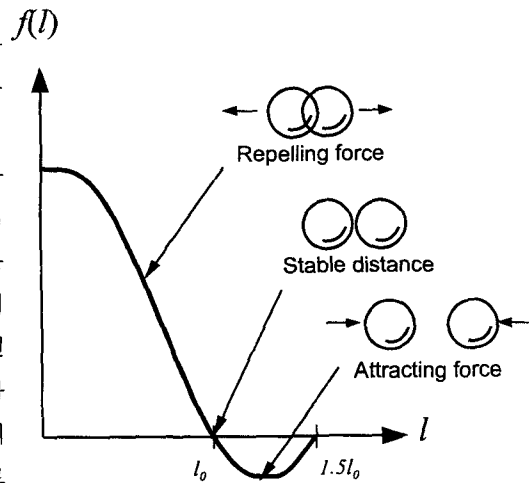


그림 1. Bubble간의 인력 및 척력

만족시켜야 한다.

$$f(l) = \begin{cases} al^3 + bl^2 + cl + d & 0 \leq l \leq 1.5l_0 \\ 0 & 1.5l_0 < l \end{cases} \quad (6)$$

$$f(l_0) = f(1.5l_0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(l_0) = k_0$$

여기서  $k_0$ 는 안정거리에서의 인력과 척력에 대한 용수철 상수를 나타낸다.

이러한 bubble간의 힘은 bubble의 최적화되지 않은 배치를 물리적으로 불안정하게 만들어 각 bubble들이 주어진 함수에 따라 안정거리에 가까운 안정상태로 최적화될 수 있도록 한다.

이러한 과정은 각 bubble을 집중질량으로 보고 힘과 감쇠특성을 부여한 동적 상사(dynamic simulation)과정을 통해 수행된다. 또한 bubble의 위치가 수정되어도 이러한 동적상사는 bubble이 자동적으로 새로운 최적의 위치로 이동하도록 강제한다.

이러한 동적상사를 위한 각 bubble의 운동방정식은 다음과 같다.

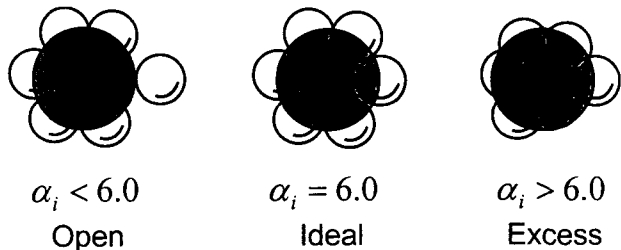
$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i(t)}{dt^2} + c_i \frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} = \mathbf{f}_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

여기서  $m_i$ 는 질량을 나타내고,  $c_i$ 는 감쇠계수, 그리고  $\mathbf{x}_i$ 는 대상영역에서의 bubble의 위치를 나타낸다. 초기 배치로부터 각 시간단계에 대한 위의 미분방정식을 풀어 최적의 배치를 얻기 위해 4차의 Runge-Kutta 방법이 사용되었다. 이러한 과정은 사용자가 정의한 수만큼의 시간단계에 대해 수행되거나 bubble의 배치가 균형을 이룰 때까지 반복된다.

위의 과정에서 적절한 수의 bubble를 주어진 영역안에 배치하려면 bubble의 수를 최적의 상태로 조정하는 과정이 필요하다. 이러한 과정은 우선 배치된 bubble이 어느 정도의 밀도를 가지고 있는지를 파악해야한다. 이러한 bubble의 밀도를 나타내는 계수로서 다음과 같은 중첩도(overlapping ratio)를 사용한다.

$$\alpha_i = \frac{2}{d(x_i)} \sum_{j=0}^n \left( d(x_j) + \frac{d(x_j)}{2} - \overline{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j} \right) \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ 는 bubble의 위치를 나타내고  $n$ 은 인접한 bubble의 수를 나타낸다. 동일한 크기의 bubble이 최적의 상태로 배치되어 있는 이상적인 상태에서 중첩도의 값은 6.0이다. 그림 2는 bubble의 배치와 중첩도와와의 관계를 나타내고 있다.



### 3.2 Bubble Mesh방법의 EFG적용

그림 2. 중첩도의 예

앞에서 언급했듯이 bubble mesh는 원래 최적의 유한요소 mesh 산정을 위한 방법이다. 따라서

이를 EFG에 적용하기 위해서는 추가적인 고려가 필요하다. 이중에서 bubble의 배치와 크기를 결정하는 오차함수가 가장먼저 고려되어야 한다. 이 때 오차함수와 bubble의 면적은 역비례적인 관계를 가진다. 즉 오차가 큰 부분에 작은 bubble이 위치하므로써 단위면적당 많은 수의 bubble이 배치되게 된다. 따라서 자동적으로 오차가 큰 영역에 작은 특성길이(characteristic leng)를 가지는  $h$ -적응적 해석이 이루어지게 된다.

오차함수와 bubble의 지름은 다음 식에 의해서 정의된다.

$$d_i = \frac{h}{\sqrt{e_i}} \tag{9}$$

여기서  $h$ 는 전체 해석모델에서 bubble의 크기에 대한 계수이고  $e_i$ 는 영역내에서의 평균오차이다. 따라서 bubble의 지름은 오차의 제곱함수이다. 그러므로 bubble의 크기를 결정하는데는 반복적인 계산이 요구된다. 이 때 계산되어진 bubble의 지름은 미리 정의된 최대 지름과 최소 지름을 초과하지 않도록 수정된다. 이 때 최소 지름과 최대 지름의 비를 해석의 해상도계수(RF: Resolution Factor)라 한다.

Bubble의 초기배치는 앞에서도 언급했듯이 적분 cell의 위치에 따라서 이루어진다. 임의의 cell의 세분화 여부는 cell의 각 절점에 위치한 bubble사이의 거리를 검사해 결정한다. 만일 어떤 cell을 세분화할 필요가 있다면 그 cell은 4개로 세분화 된다. 이 과정은 모든 bubble간의 거리가 주어진 조건에 만족할 때까지 반복된다. 따라서 초기 bubble의 좌표는 적분 cell의 좌표와 동일하다. 그러나 동적상사가 수행되면 bubble의 위치는 적분 cell의 좌표와 서로 독립적으로 결정된다. 따라서 적분 cell에 따른 적응적해석을 수행하는 다른 방법보다 mesh에 독립적인 절점을 가진 무요소법의 기본개념에 충실할 수 있게된다.

최대 bubble의 크기와 최소 bubble의 크기는 해석의 해상도에 따라 결정된다. 만일 최소 지름을 정의하지 않으면 균열의 선단 같은 고응력영역에서의 해석이 불가능 해진다. 균열의 선단에서의 응력은 이론적으로 무한대이기 때문에 bubble의 지름은 0이된다. 따라서 무한대의 수인 bubble를 배치하여야 한다. 이 정도는 아니더라도 지나치게 많은 수의 bubble를 사용하게 되면 해석의 효율성이 떨어지게 된다.

동적상사의 기본식에 대한 계수는 관련문헌에서 그 값을 취했다. 그리고 그 밖의 계수의 값은 파라메트릭 연구를 통해 경험적으로 결정하였다. 따라서 계산에 사용되는 다른 계수들의 값을 결정하는 방법에 대한 추가적인 연구가 요구된다.

## 4. 수치예제

### 4.1 외팔보 문제

이 문제는 bubble mesh에 의한 최적화 과정을 보이기 위한 문제이다. 문제의 경계 및 하중조건은 그림 3에서 보는 바와 같다. 고오차 영역은 지점부이기 때문에 이 부분에 많은 수의 절점을

배치하여야한다. Bubble mesh에 의하여 얻어진 최종 절점 배치와 적분 cell은 그림 4에서 보는 바와 같다. 이 예제에서 해상도 계수는 2.0이다. 그림에서 제시된 결과는 150단계의 동적상사를 수행한 결과이고 bubble 수의 조절은 30번째의 단계에서 1회 수행되었다.

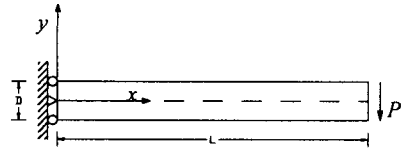


그림 3. 외팔보 예제

이 때의 최적화 과정은 그림 5에 나타내었다. 이 결과는 동적상사의 반복에 따라 bubble의 위치가 최적화되는 결과를 보여주고 있다.

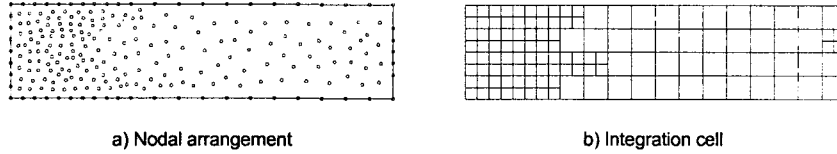


그림 4. 최종 단계의 절점배치와 적분 cell

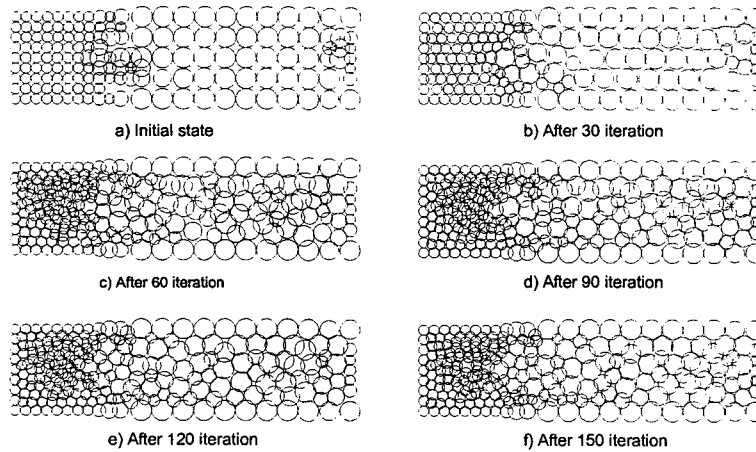


그림 5. Bubble mesh의 최적화 과정

#### 4.2 L형 평판

그림 6은 L형 평판의 하중 및 경계조건을 나타낸 것이다. 이 문제에서는 형상의 특성상 오목한 부분에 응력이 집중된다. 이러한 오목한 영역의 해석을 위하여 이 부분에 가상의 균열을 가정하였다.

제시된 적응적해석 방법의 수렴성을 조사하기 위하여 각각 다른 해상도에 대하여 해석을 수행하였다. 각각의 경우는 모두 100회의 동적상사와 1회의 bubble수 조절을 수행한 결과이다.

표 1은 해상도에 따른 해석의 상대오차를 보여준다. 그러나 해상도가 증가에 따라 해석결과가 향상되지만 해상도의 값이 커질수록 절점수의 증가에 따른 해의 개선속도가 떨어지는 현상을 나

타낸다. 따라서 추가적인 해상도의 증가는 가능하지만 큰 값의 해상도를 사용하는 경우에는 절점수의 증가와 동적상사의 단계수의 증가를 필요하고 또한 초기의 절점배치로부터 얻어진 오차함수의 정밀도는 한계가 있기 때문에 지나치게 큰 해상도의 사용을 바람직하지 않다. 파라메트릭연구 결과에 의하면 4이상의 해상도를 사용하는 것은 적합하지 않은 것으로 나타난다. 만일 이보다 정밀한 결과를 원한다면 반복계산을 통해 보다 정확한 오차 분포를 구하는 것이 필요하다.

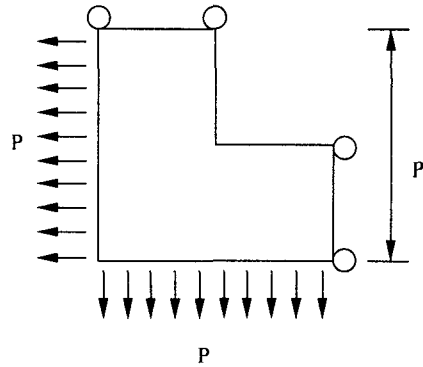


표 1. 해상도에 따른 해석의 상대오차

그림 6. L형 평판예제

Resolution factor	1.0(초기)	2.0	2.5	3.0	3.5
Number of node	65	259	297	447	543
Relative error	0.1367	0.1025	0.0806	0.0758	0.0733

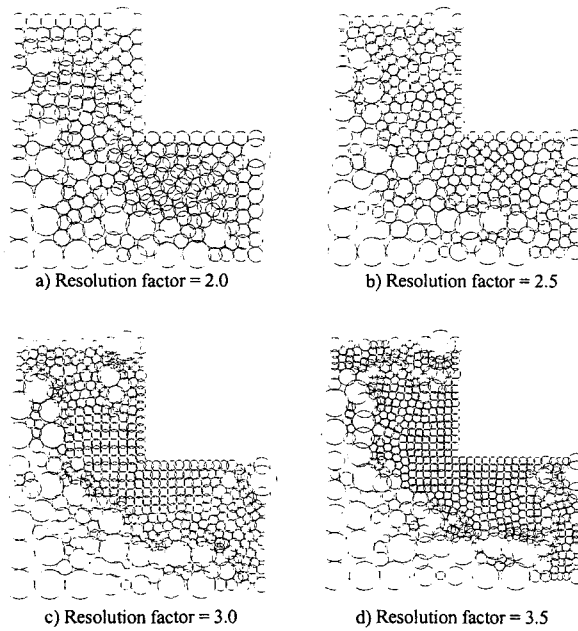


그림 7. 해상도에 따른 bubble의 배치

## 5. 결론

본 연구에서는 bubble mesh를 이용한 적응적 EFG방법을 제시하였다. 본 연구에서는 투영응력

을 이용한 오차평가를 수행하고 이를 bubble mesh 기법에 적용시킴으로서 무요소법의 원 개념에 적합한 적응적 해석법을 개발하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 적분 cell의 좌표와 무관한 절점의 배치법을 개발할 수 있었다.
- 2) 임의의 해상도에 대한 결과를 1회의 계산을 통해 얻을 수 있다. 그러나 지나치게 높은 해상도의 적용은 비 경제적이다.

이후의 연구는 각 계수들의 최적값의 산정 및 보다 안정되고 효율적인 해석기법의 개발에 중점이 두어져 수행될 예정이다.

### 참고문헌

1. Belytschko, T., Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl (1996b). Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**, 3-47.
2. Duarte, C. A. and J. T. Oden (1996). An  $hp$  Adaptive Method Using Clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**, 237-262.
3. Haussner-Combe, U. and Korn, C. (1998), An adaptive approach with the EFG method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **162**, 203-222.
4. Chung, H. J. and Belytschko, T.(1998). An error estimate in the EFG method. *Computational Mechanics* **21**, 91-110.
5. Liu, W. K., W. Hao, Y. Chen, S. Jun and J. Gosz (1996). Multiresolution reproducing kernel particle methods. *Computational Mechanics*.
6. Zienkiewicz, O. C. and J. Z. Zhu (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Method in Engineering* **24**, 337-357
7. Shimada K., Gossard D.(1995), Bubble Mesh: Automated Triangular Meshing of Non-Manifold Geometry by Sphere Packing, *ACM Third Symposium on Solid Modeling and Applications*, pp. 409-19.
8. Chung, H.J., Lee, G.H. and Choi, C.K., Adaptive nodal geration with element-free Galerkin method, *Structural Engineering and Mechanics*, submitted.