

## 막 구조물의 재단도 생성을 위한 지오데식 라인 알고리즘에 관한 연구 A Study on the Geodesic Line Algorithms for Cutting Pattern Generation of Membrane Structures

배종효\*                      한상을\*\*  
Bae, Jong-Hyo              Han, Sang-Eul

### ABSTRACT

The three main processes involved in the design of stressed membrane surface are surface form-finding, stress analysis and cutting pattern generation. The last process, cutting pattern generation, is considered as a very important procedure in the aspect of the practical design for the fabric membrane surface. In this paper, The cutting pattern generation technique using the geodesic line algorithms is first introduced. And the numerical examples resulting from this technique are presented. Cable elements are used for the approximating membrane surface and two kinds of model, square line and central line model, are used in pattern generation. Finally, a number of different cutting pattern generation for the same membrane surface is carried out and the numerical results are compared each other.

### 1. 서    론

막구조물은 일반적으로 형상 탐색, 응력 해석, 재단도 생성 등의 3가지 중요한 과정을 거쳐 설계된다. 형상탐색은 설계자가 의도하는 형상을 물리적 모델링, 기하학적 모델링, 평형 모델링등을 통해 가시화하는 과정으로서 이를 통한 데이터는 응력해석과 재단도 생성과정에 필수적으로 이용되고 있다. 근래에는 절점에서 응력 평형원리를 프로그램화 한 후 이를 통해 막 표면의 형상을 탐색하는 평형 모델링을 주로 사용하고 있다. 응력 해석 과정은 다양한 종류의 하중 조건을 막 표면에 적용하여 그 거동을 살펴보는 단계로서 막 재료의 선정기준에 1차적인 영향을 주게 된다. 막구조물 설계의 마지막 단계인 재단도 해석에서는 형상 탐색을 통해 얻어진 막 표면의 3차원 좌표를 2차원 평면 좌표로 변환하는 과정으로 일반적으로 2가지 기법이 이용된다. 첫 번째 방법은 전개기법(unfolding technique)으로 과정이 비교적 간편하기 때문에 일반적으로 이용되고 있는 방법이다. 두 번째 방법은 플래트닝 기법(flattening technique)으로 스트립의 형태상 기하학적 전개가 어려울 경우에 사용되고 있다. 플래트닝 기법은 자유영역안에 존재하는 막 요소에 구속조건을 적용하여 수치해석적으로 요소절점의 2차원 좌표를 결정하기 때문에 자유영역안의 막 요소에 대한 구속정도가 커질수록 영역안에 있는 막의 국부변형이 커지게 되며 수치해석적 문제가 발생될 수 있다. 공간적으로 곡면을 이루고 있는 막 형상을 평면적인 분할요소로 근사화시키는 것이 재단도 형성 메커니즘의 궁극적인 목적이지

\* 인하대학교 건축공학과 석사과정

\*\* 인하대학교 건축공학과 교수

만 재단도 기법을 이용해 실용성과 경제성을 실현하는 것 또한 매우 중요한 목적이 된다. 재단도 형성 후 각 스트립의 모서리는 일반적으로 곡선으로 나타난다. 각 스트립의 폭이 생산되는 롤 폭에 맞게 재단되고 재단 후 스트립의 모서리 선이 직선이 된다면 경제적인 측면에서 매우 유리할 것이다. 본 논문에서는 이러한 목적들을 실현시키기 위한 재단도 기법으로 지오데식라인 알고리즘을 이용하고 있다. 한편, 지오데식 라인에 따른 재단도 방법을 이용하려는 엔지니어에게 도움을 줄 수 있도록 여러 가지 컴퓨터 기법이 사용되었다.

막 재료는 빛의 투과율을 유도할 수 있는 잇점을 갖고 있지만 생성된 재단선이 비쳐 보인다는 측면도 함께 갖고 있다. 일반적으로, 막 표면에 생성되는 라인에는 지오데식 라인 (Geodesic Line), 평단면 라인(Planar Section Line), 유사 지오데식 라인 (Semi Geodesic Line), 불규칙 라인 (Irregular Line) 등이 있다. 본 논문에서 주로 사용하고 있는 지오데식 라인은 막표면 위를 지나면서 막면 위에 있는 두 점사이의 최단거리를 나타내고 있다. 지오데식 라인상의 주응력방향은 재단 방향과 최소의 각을 이루는 성질을 갖고 있다.

## 2. 목적형상 결정

디자이너가 원하는 형상을 다양한 모델을 이용해 표현하는 것이 재단도 형성의 첫 번째 과정이다. 목적형상은 메쉬 형성과정, 경계조건 부여과정, 3차원적 형상전개과정등의 세부적 단계를 거쳐 얻게 되며 반복적 수행을 거쳐 설계자가 만족할 수 있는 형상이 얻어지면 이를 재단도 형상을 위한 목적형상으로 설정한다. 목적형상은 구획된 메쉬 평면이 연속적으로 이어져 만들어진 형태를 취하고 있으며 실제 막 표면형태를 근사적으로 표현하고 있다.

### 2.1 2차원 메쉬 형성 알고리즘

경계 형상을 그린 후 전체 균형을 고려해 패치 라인(patch line)을 그린 다음, 설계자가 원하는 폭 간격으로 세부 스트립 라인(strip line)을 만든다. 이 때 메쉬 라인의 방향은 재단 라인을 형성하는 결정적인 인자가 되기 때문에 원하는 재단 라인을 미리 염두에 두어야 한다. 본 논문에서는 막 재료의 성질을 근사적으로 표현할 수 있도록 케이블 유한요소를 이용하였으며 컴퓨터를 이용한 프로그램을 통해 메쉬를 형성하였다. 그림 2는 본 논문에서 해석적 예로 이용한 모델의 초기 메쉬의 형상을 보여주고 있다.

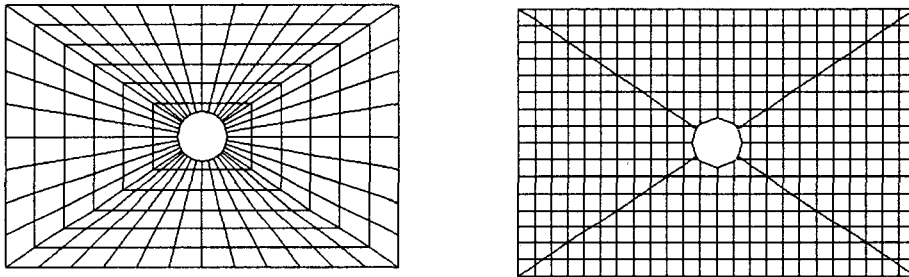


그림 1. 2차원 초기메쉬

### 2.2. 경계조건부여

본 단계에서는 절점의 3차원적인 경계조건 즉, 절점 좌표, 절점 고정과 절점 자유의 여부, 초기 응력

(prestress)의 크기, 부재의 단면적, 탄성 계수등을 결정해 주도록 한다. 초기 경계조건에 의한 막의 3차원적 초기형상이 설계자의 의도에 적합하지 않을 때에는 경계조건을 조절하여 초기형상에 변화를 유도할 수 있다.

### 2.3. 형상탐색

인장력(tension force)의 도입을 통해 구조물의 강성이 부여되어 안정화되는 구조적 특성을 나타내는 막구조는 초기 인장력 및 외부하중에 대한 변형의 정도가 전체구조형상을 변화시킬 만큼 커다란 영향을 끼친다. 따라서 초기 응력을 도입하는 기법을 이용해 구조물의 형상을 찾게 된다. 알고리즘에 이용되는 수치해석 방법에는 Force-Density 법, Newton-Raphson 법, Dynamic-Relaxation 법 등이 있으며 특히 케이블 요소를 사용할 경우에는 내력밀도법이 주로 사용되고 있다. 본 논문에서는 Newton-Raphson 법을 이용하여 해석을 수행하였다. Newton-Raphson 법은 외부하중 벡터를 zero 로 놓고 불평형력이 일정 범위에 수렴될 때의 변위를 찾아 초기 형상을 결정하는 방법으로서, 스텝  $i$  에서의 불평형력(residual)  $R$  을 계산하면,

$$\{R\}_i = \{W\} - \int_v [B]_i^T \{\sigma\}_i dv \quad (1)$$

반복계산을 통해,  $i+1$  스텝에서의  $R_{i+1} \approx \{0\}$  이 되는 좌표를 찾는다. 막구조의 형상탐색(shape finding) 단계에서는, 외부하중벡터  $\{W\}$  이 zero 이므로, 불평형력을

$$\{R\}_i = - \int_v [B]_i^T \{\sigma\}_i dv \quad (2)$$

로 계산하여,  $R_i \approx \{0\}$  일때의 구조물의 절점좌표계를 초기 응력에 의한 초기형상으로 결정한다.

### 2.4. 반복적 수행을 통한 목적형상결정

형상 탐색을 통해 만들어진 초기 형상을 살펴보면 재단 방향에 대한 스트립 라인 사이의 폭이 서로 다르게 형성되어 있음을 알 수 있다. 따라서 2차원 메쉬 형상에서의 스트립 폭을 재조정 한 후 다시 형상 탐색과정을 거치도록 한다. 이러한 과정은 만족스런 스트립 형상이 나올 때까지 반복하여 수행된다. 그림 2는 반복적 수행과정을 통해 결정된 최종 목적형상을 보여주고 있다. 반복적 목적형상 결정과정을 통해 얻어진 최종 목적형상의 3차원 절점 좌표는 그대로 지오데식 라인형성의 초기 입력 데이터로 이용된다.

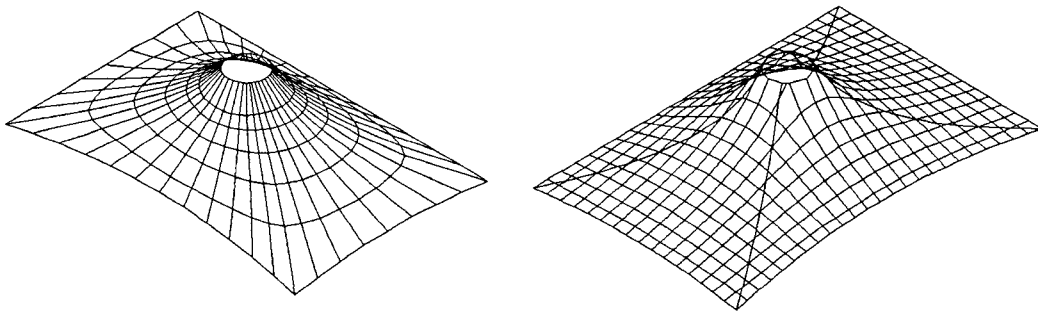


그림 2. 형상탐색 결과

### 3. 3차원 지오데식 라인의 탐색

엄밀히 말할 때, 지오데식 라인은 2차원 메쉬형상을 만들 때부터 사용되고 있다. 하지만, 막의 3차원적 목적형상을 결정하는 과정에서, 이 라인들은 곡선형태로 그 모양이 바뀌면서 지오데식라인을 벗어나게 된다. 3차원상에서 지오데식 라인의 위치를 찾아내는 방법으로는 두가지를 생각할 수 있다. 하나는 목적형상을 이루고 있는 각각의 근사 평면위를 지나는 지오데식라인을 기하학적 경로를 차례로 찾아 연결하는 방법이다. 이 방법은 형상탐색과정을 거치지 않고 지오데식라인을 찾는 반면, 수치적 에러가 단계적으로 늘어나는 현상을 보인다. 이 현상은 막의 형상을 나타내는 근사 평면이 다시 생성되는 과정에서 요소간의 응력 평형관계를 고려하지 않아 발생된다. 또 하나의 방법은 응력 평형관계를 고려하며 단계적으로 지오데식 라인을 찾아가는 것이다. 이 방법은 본 논문에서 이용되었으며 다음과 같은 단계를 거쳐 수행된다.

#### 3.1 지오데식 라인의 좌표결정

먼저, 3차원 목적 형상에서, 재단 경로에 따른 스트립라인을 선택한다. 이 스트립 라인은 3차원 절점들로 이루어져 있으므로 라인의 길이를 계산할 수 있다. 이 때, 스트립 라인의 중앙절점으로부터 양방향으로 일정한 간격을 두고 있는 유사라인을 생각할 수 있다. 여기서 이 세 라인의 길이를 계산하여 각각  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  라 하고 그 크기를 서로 비교하여 작은 쪽으로 근사 지오데식 라인의 방향을 선택한다. 선택된 선을  $L_2$  라 하고 다시  $L_1$  과  $L_3$  를 구한다. 이러한 과정을  $L_2$  값이 고정적으로 사용될 때 까지 반복한다.  $L_2$  값이 항상 중앙에 존재하게 되면 지오데식 라인은  $L_1$ ,  $L_3$  값 사이에 존재하게 된다. 이 세 개의 데이터를 이용한 최소 근사값을 구하기 위해 보간함수를 이용할 수 있다. 본 논문에서는 Lagrange 보간함수를 이용하였다. 보간함수의 일반식은 (3) 과 같고 2차 보간함수를 자연좌표(natural coordinate)로 표현한 것이 식 (5)이다.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n S_i(x)f(x_i) \quad (3)$$

$$S_i(x) = \prod_{j=1, n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \quad i \neq j \quad j=1, n \quad (4)$$

$$L = \frac{1}{2} \xi(\xi-1)L_1 + (1-\xi^2)L_2 + \frac{1}{2} \xi(\xi+1)L_3 \quad (5)$$

$$-\frac{dL}{d\xi} = 0 \quad (6)$$

$f_n(x)$ 는  $x$  에 대한  $n$  차 보간함수,  $S_i(x)$ 는  $x_i$  에 대한 형상함수,  $f(x_i)$ 는  $x_i$ 에 대한 기지의 함수값을 나타내며  $\Sigma$  는 합,  $\prod$  는 곱을 뜻한다. 절점의 이동 거리는 식 (6)를 통해 얻어지는  $\xi$  값을 이용해 구할 수 있다. 여기에서 절점의 이동거리는 2차원 메쉬형상에서의 절점이동거리를 나타낸다. 다음으로 스트립 라인 위에 있는 절점의 위치를 새로운 좌표축에 대하여 구한다.

$$X_i = X_u + (X_v - X_u) \frac{A}{L_{ij}} \quad (7)$$

여기에서,  $X_i$  는 절점의 새로운 좌표,  $A$  는 절점의 이동거리를 나타내고  $L_{ij}$  는 이웃하는 두 스트립 사이를 연결하는 부재의 길이를 나타낸다. 또한 초기 응력에 대한 길이의 변화는 식 (8)에 따라 구하게 된다.

$$L_{oi} = \frac{L_i}{1 + F/EA} \quad (8)$$

여기에서,  $L_i$  는 원래의 요소길이를 나타내고  $E$  는 Young's modulus를,  $A$  는 케이블 요소의 단면적을 각각 나타낸다.

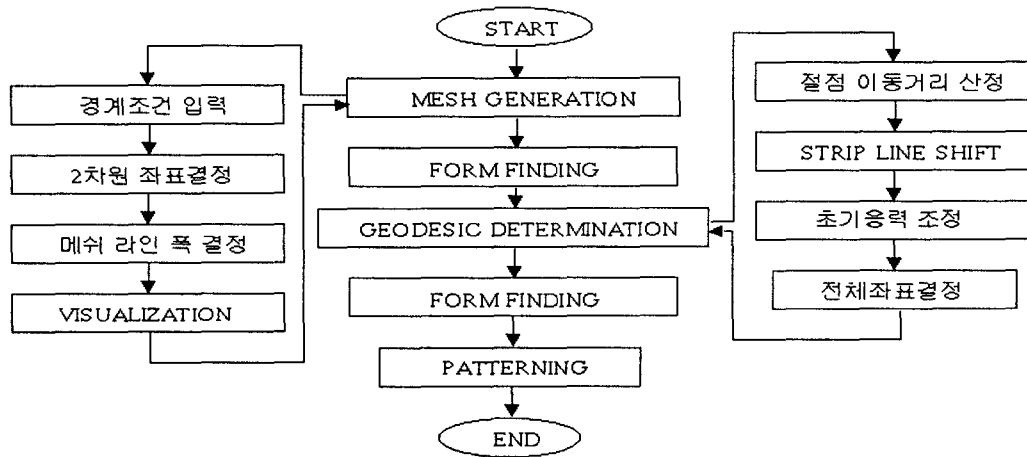


그림 3. 지오데식 라인 추출 순서도

#### 4. 재단도 형성

재단도는 설계자가 원하는 막 형상과 절점 좌표가 구해진 상태에서 수행된다. 재단도 기법에는 일반적으로 언폴딩(unfolding) 기법과 플래트닝(flattening) 기법이 있으며 언폴딩 기법은 알고리즘이 단순한 반면, 각각의 스트립을 이웃하는 두 지오데식 라인만으로 결정하기 때문에 초기 메쉬를 설계할 때부터 스트립의 폭에 대한 충분한 고려가 필요하다. 플래트닝 기법은 알고리즘이 복잡한 반면, 3개 이상의 라인으로 이루어진 스트립을 가지고 2차원 상에 도시할 수 있다는 특징이 있다. 본 내용에서는 언폴딩 기법을 이용하였다. 이 기법은, 한 절점과 연결된 두 요소 사이의 각이 바뀌더라도 두 요소길이에 변화를 주지 않는다는 가정하에, 3차원 기하학적 벡터 원리를 이용해 2차원 평면에 투영하는 기법이다.  $T_1$  을 기준 좌표,  $T_i$  를  $i$  절점에서의 좌표,  $T_{0i}$  를 기준좌표가 원점으로 이동했을 때의  $i$  절점 좌표로 하면, 2차원 좌표는 식 (9)를 이용해 구할 수 있다. 여기에서,  $[Q_i]$  는 방향 회전 매트릭스이고  $T_{xy}$  는 평면좌표계에서의 좌표이다.

$$[Q_i]T_i = T_{xy} \quad (T_i - T_1 = T_{0i}) \quad (9)$$

재단도에 필요한 절점의 좌표가 구해지면 벡터의 원리를 이용하여 전체면적을 구할 수 있다. 한 스트립의 절점수가  $n$  개일 때 총 재단 면적  $S$  는,

$$S = \frac{1}{2} \sum A_{ij} \times B_{jk} \quad j=i+1, \quad k=j+1, \quad i=1, n-1 \quad (10)$$

이다. 여기서,  $A_{ij}$  는 절점  $i$  를 시점으로 하고 절점  $j$  를 종점으로 하는 벡터,  $B_{jk}$  는  $j$  점을 시점으로 하고  $k$  를 종점으로 하는 벡터,  $i, j, k$  는 재 배열된 재단도의 절점이다.

### 5. 수치적 예제

본 논문에서는 가로 24m, 세로 16m인 장방형모형을 사용하여 3가지 형태의 재단도를 구해 보았다. 모델의 중앙에는 반지름 1.5m의 원형 구멍이 뚫려 있으며 초기 인장 높이는 6m로 하였다. 재단 폭은 초기의 동일 설정을 그대로 이용하였으며 재형상탐색과정에서의 폭 조절은 하지 않았다.

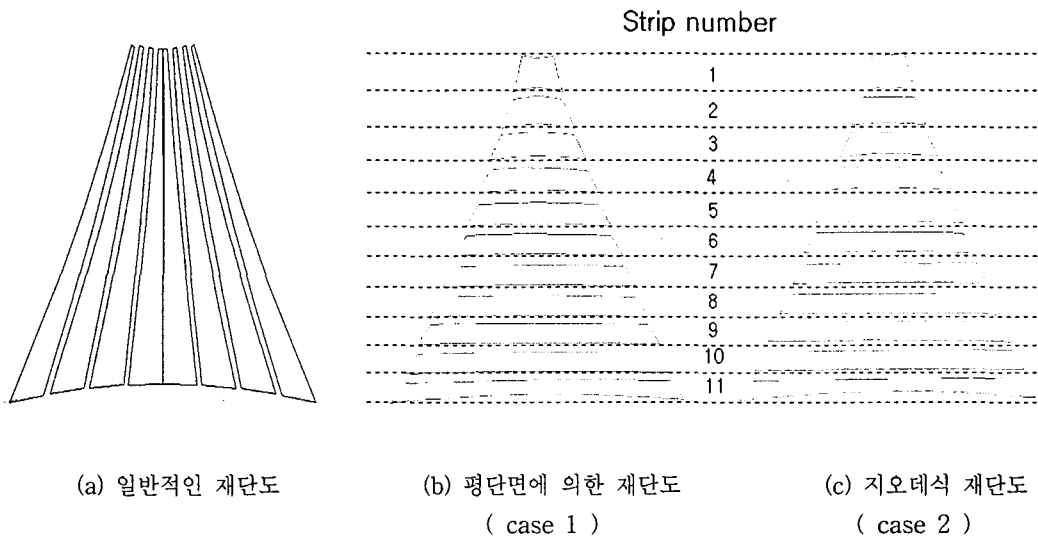


그림 4. 재단도 결과

그림 4 의 (a), (b), (c) 는 각각 서로 다른 방향으로의 재단도 형태를 보여주고 있다. (a)는 일반적인 재단도 방법으로 곡률이 큰 표면부위에서 안정적인 곡률을 나타낼 것으로 사료된다. (b)와 (c)는 메쉬의 방향을 (a)와 달리한 것으로 (b)는 형상탐색한 목적형상을 그대로 이용해 평단면 재단을 한 것이고 (c)는 지오데식 알고리즘을 이용한 재단도이다.

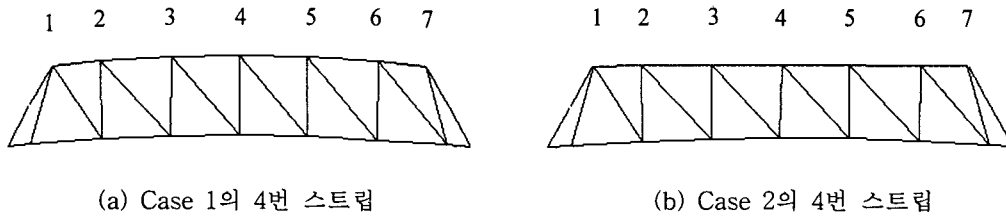


그림 5. 각 재단도의 4번 스트립

그림 5는 그림 4의 (b)와 (c)에 해당하는 4번째 스트립의 재단 형태이다. 표 1을 통해 지오데식 라인의 절점 높이에 대한 상대편차가 매우 작다는 것을 알 수 있다. 이것은 지오데식 라인이 직선에 가깝다는 것을 뜻한다. 재단선이 직선이면 재단시 경제적으로 유리하고 재단 시공이 비교적 쉬워진다. 곡률 반경이 큰 영역일수록 크게 나타나게 된다.

표 1. 그림 5의 상부 절점의 높이 (단위: cm)

절점번호 case	1	2	3	4	5	6	7	편차
case 1	112.58	118.20	123.60	125.31	123.60	118.20	112.58	4.87E-1
case 2	112.78	112.78	112.78	112.78	112.78	112.78	112.78	3.27E-4

case 1 과 case 2의 재단면적 산정결과는 하나의 스트립을 분해하지 않고 재단할 경우, 전체 소비량에 대한 실제 사용량의 비로, case 1인 경우가 약 81.6 %, case 2 인경우가 약 86.2 %로 나타났다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 지오데식 알고리즘을 형성하고 이를 이용한 막의 재단 기법에 대해 고찰하였으며 두 종류의 재단도 형성 결과를 서로 비교 검토해 보았다. 연구의 결과를 정리하면 다음과 같다.

1. 지오데식 라인 상의 절점좌표는, 평면재단도에서 상대적인 좌표값을 비교해 본 결과, 거의 직선에 가깝게 나오고 있음을 알 수 있었다.
2. 지오데식 알고리즘을 통한 막 구조물의 재단 기법은 재료의 절약성과 재단의 용이성을 고려할 때 효과가 있음을 알 수 있었다.

막의 재단은 경제성 뿐만 아니라 미학적 측면도 함께 고려하여 설계자가 융통성있게 선택하는 것이 바람직할 것이다. 곡률이 큰 막 표면 부위에 대해서는 형상 오차가 커지므로 생산되는 막 폭의 분할 절단이 불가

피할 것으로 사료된다. 따라서 향후, 막 형상의 곡률과 재료적인 특성을 고려한 재단 기법에 대해 연구가 진행되어야 할 것으로 사료된다.

## 7. 참고 문헌

1. B. Tabarrok, Form Finding and Cutting Pattern Generation for Fabric Tension Structures. *Microcomputers in Civil Engineering*, 8, pp.377-384, 1993.
2. J.L. Meek and K.Y.Tan. Post-Form Finding Determination of Geodesic Lines in Cutting Pattern Design for Membrane Structures, *Space Structures*, (2):231-239, 1986/87.
3. J.L. Meek and Xiaoyan Xia. Shape Finding Analysis of Form Structures. *Application of Numerical Methods in Engineering*, 357-366, University Pia, June 1997.
4. E. Moncrieff and B. H. V. Topping. Computer Methods for the Generation of Membrane Cutting Patterns. *Computer & Structures*, 37(4):441-450, 1990.
5. Grundig, L. and Bauerle, J., (1990), Automated Cutting Pattern Determination and Control for Prestressed Membranes, *Proceedings of Textile Composites in Building Construction*, Part2, Pluralis, Lyon, 1990
6. Moncrieff, E. and Topping, B.H.V., (1990), Computer Methods for the Generation of Membrane Cutting Patterns, *Computer and Structures*, 37, 4, 441-450
7. Grundig, L. and Moncrieff, E., (1993), Cutting Pattern Generation of Textile Structures, in *Proc. Studiedag-Seminare Textielstructuren Architecture Textile*, Vrije Universiteit Brussel, 25th May 1993
8. Grundig, L. and Moncrieff, E., (1995), On the Optimal Layout of Cutting Patterns for Architectural Textile Structures, in Obrebski, Jan B. (Ed), *Lightweight Structures in Civil Engineering* Proceedigs of the International Conference on Lightweight Structures in Civil Engineering, 25-29th September 1995, Warsaw, Poland