

무요소법과 유한요소법의 결합에 의한 동적균열전파문제의 해석

Coupling of Meshfree Method and Finite Element Method for Dynamic Crack Propagation Analysis

이 상 호* 김 호 진**
Lee, Sang-Ho Kim, Hyo-Jin

ABSTRACT

In this study, a new algorithm analyzing dynamic crack propagation problem by the coupling technique of Meshfree Method and Finite Element Method is proposed. The coupling procedure of two methods is presented with a short description of Meshfree Method especially, Element-free Galerkin (EFG) method. The elastodynamic fracture theory is presented, and a numerical implementation procedure for dynamic fracture analysis by Meshfree Method is also discussed.

A couple of dynamic crack propagation problems illustrate the performance of the proposed technique. The accuracy of numerical solutions by the developed algorithm are compared with those of analytical solutions and experimental ones.

1. 서 론

균열의 거동을 예측하고 그로 인한 물리적 영향을 파악하고자 하는 연구는 초기에는 수학적, 이론적 접근방법에 의존하여 이루어졌으나, 유한요소법 등과 같은 강력한 수치해석기법이 등장한 이후부터는 복잡한 해를 보다 손쉽게 구하기 위해서 유한요소법이나 경계요소법과 같은 수치해석 기법이 주로 이용되어 오고 있다. 그러나, 기존의 유한요소법이나 경계요소법과 같이 요소개념을 사용하는 수치해석방법은 균열이 진전하는 경우 바뀌는 균열형상에 따라 매 단계별로 요소망을 재구성해야 하는 어려움이 있다. 더욱이 동적균열전파문제와 같이 시간별 해석을 수행하는 경우에 있어 매 단계별로 요소망을 재구성하여 균열의 진전경로를 예측하려면 엄청난 시간과 노력이 요구되며 해의 정확성을 보장할 수 없다.

실제로, 기존의 유한요소법이나 경계요소법 등과 같은 수치해석법을 이용하여 균열전파문제를 해석해보려는 시도가 진행되었다. Nishioka와 Atluri¹⁾는 *moving singular element*와 요소의 경계를 따라 균열이 전파되도록 하는 *nodal release* 기법을 개발하였으며, Swenson과 Ingraffea²⁾는 삼각형 요소를 사용하여 균열선단 주변만을 국부적으로 요소재분할 할 수 있는 기법을 제안하였다. 그 뒤 Du 등³⁾은 균열선단을 점성영역으로 모형화하여 콘크리트에서의 동적균열진전문제를 해석하려 하였다. 그러나 이러한 방법들은 세밀한 요소망을 필요로 하며, 복잡한 균열형상을 지닌 경우 해석상의 어려움을 야기시키며, 부분적인 균열전파과정만을 예측할 수 있었다.

이러한 단점을 극복하기 위해서 본 연구에서는 요소를 사용하지 않고 절점의 상관관계만을 이용하여 근사변위함수를 도출할 수 있는 무요소법을 해석의 기본 틀로 사용하여 균열의 전파과정해석을 수행하며 또한, 기존

* 정회원, 연세대학교 토목공학과 조교수

** 정회원, 연세대학교 토목공학과 박사과정

의 유한요소법과 무요소법의 조합방법에 의하여 동적균열전파문제에 있어서 균열이 전파되어가는 영역만 무요소법을 적용하여 해석함으로써 해석의 효율성을 높일 수 있는 방법을 연구하였다.

2. 무요소법과 유한요소법의 조합

2.1 무요소법 개요

무요소법은 요소개념을 사용하지 않고 경계조건과 절점상호간의 위치에 따른 상관관계를 이용하여 형상함수와 근사변위함수를 도출하는 방법이다. 그 중 본 연구에서 사용하는 Element-free Galerkin(EFG)법은 이동최소제곱근사(Moving Least Squares Approximation)법⁴⁾을 이용하여 각각의 기준점을 중심으로 일정한 거리의 영향영역(domain of influence)내에 포함되는 절점들만을 이용하여 형상함수를 정의하고, 형상함수와 각 절점들의 계수값을 이용하여 근사변위함수를 도출한 후 기존의 Galerkin방법에 따른 정식화과정을 이루어 나가는 방법이다.⁵⁾

2.2 Ramp 함수를 이용한 해석영역 경계의 조합

본 연구에서는 동적균열전파 현상을 규명하고자 하는 균열주변의 내부영역에는 무요소법을, 그 외의 경계영역에는 유한요소법을 적용하는 조합방법을 사용함으로써 무요소법의 단점 중에 하나인 필수경계조건의 만족여부를 효과적으로 처리하며 아울러 해석의 효율을 도모할 수 있는 방법을 제안하였다.

유한요소법과 무요소법은 모두 Galerkin 방법에 의해 정식화하기 때문에 다음과 같은 형태의 근사변위함수를 사용한다.

$$u_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \overline{N}_I(\mathbf{x}) u_{iI}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

여기서, \overline{N}_I 는 절점 I 에서 변위성분 i 에 대한 절점값이다.

유한요소해석 영역과 무요소 해석 영역이 접촉하는 영역에서의 근사변위함수는 무요소법과 유한요소법의 형상함수에 Belytschko 등⁶⁾이 variational coupling에 사용한 Ramp 함수를 도입하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i^h(\mathbf{x}) = u_i^{FE}(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x})[u_i^{EFG}(\mathbf{x}) - u_i^{FE}(\mathbf{x})] \equiv [1 - R(\mathbf{x})]u_i^{FE}(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x})u_i^{EFG}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

여기서 Ramp 함수 $R(\mathbf{x})$ 는 접촉부에서의 연속성을 만족시키기 위해 무요소 영역과 만나는 경계 Γ_{EFG} 에서는 1의 값을 가지고 유한요소법의 영역과 접촉요소가 만나는 경계 Γ_{FE} 에서는 0의 값을 갖도록 하며, 두 경계 사이에서는 선형적으로 분포되도록 한다. 그럴 경우, 유한요소해석영역과 무요소해석영역의 경계상에서 완충역할을 하는 접촉요소의 형상함수는 유한요소법과 무요소법의 근사변위함수를 식 (1)에 대입하므로써 다음과 같이 유도해 낼 수 있다.

$$u_i^h(\mathbf{x}) = [1 - R(\mathbf{x})] \sum_{I=1}^{n_m} N_I(\xi(\mathbf{x})) u_{iI}(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x}) \sum_{I=1}^{n_m} \phi_I(\mathbf{x}) u_{iI}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{I=1}^{n_m} N_I^c(\mathbf{x}) u_{iI}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

따라서, 형상함수 $\overline{N}_I(\mathbf{x})$ 는 유한요소 영역, 무요소 영역 그리고 접촉요소에서 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\overline{N}_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} N_I(\xi(\mathbf{x})) & x \in \Omega_F^e \\ \phi_I(\mathbf{x}) & x \in \Omega_{EFG} \\ N_I^c(\mathbf{x}) & x \in \Omega_I^e \end{cases} \quad (4)$$

3. 동적파괴역학 이론

선형 탄성 동적파괴역학문제에 있어서 응력확대계수는 균열이 성장할 때 균열전파 속도와 균열전파 방향을 결정하는 중요한 역할을 한다. 본 연구에서는 면내(in-plane)에서 발생하는 균열의 전파거동을 파악하고자 하므로 모드 I, 모드 II, 혼합모드상태의 문제들만을 다루도록 한다.

3.1 에너지해방률

본 연구에서는 Moran과 Shih⁷⁾ 그리고 Freund⁸⁾가 제안한 방법에 의해서 균열선단 주변 영역에서의 에너지 균형관계로부터 에너지해방률을 유도하였다. 즉, 내부에서 발생하는 에너지는 전체적인 역학적 에너지로부터 균열면에서 발생하는 에너지유출량과 균열 선단 주변의 적분경로를 통해 발생하는 에너지 유출량만큼을 줄인 것과 같다. 이 때, 동적하중하에서 진전하는 균열 선단의 단위 균열진전량에 따른 에너지해방률은 균열 선단 주변의 적분경로를 통해 발생하는 에너지 유출량을 균열 선단의 전파속도로 나눔으로써 얻을 수 있다.

$$G = \frac{F}{v} \quad (5)$$

여기서, v 는 균열전파속도를 의미하며, F 는 균열 선단 주변의 적분경로를 통해 발생하는 에너지 유출량으로 균열 선단에 접근할수록 적분경로에 관계없이 일정한 값을 가지는 국부 경로무관성(local path-independence)을 지니게 되며, 이로부터 최종적으로 에너지해방률 G 는 다음과 같이 표현된다.

$$G = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} [(W+L)\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,1}]n_j dS \quad (6)$$

여기서, Γ 는 균열 선단 주변의 적분경로, W 는 변형률에너지, L 은 운동에너지를 의미한다.

식 (6)에서 정의된 에너지해방률은 균열 선단 주변의 적분경로를 통해 적분이 이루어지는 선적분에 의해서 산정된다. 그러나 수치해석기법에서는 영역에 대한 수치적분을 수행하는 것이 일반적이기 때문에 해석상의 편의를 위해 Moran과 Shih⁷⁾가 제안한 면적분형태의 에너지해방률 계산식을 적용하여 에너지해방률 G 를 산정하였다.

3.2 응력확대계수의 산정

혼합모드상태의 하중을 받는 경우 에너지해방률 G 는 모드 I과 모드 II 응력확대계수항을 하용하여 다음과 같이 표현할 수 있다⁹⁾.

$$G = \frac{1}{E'} [A_I(v)K_I^2 + A_{II}(v)K_{II}^2] \quad (7)$$

여기서, $E' = E$ 이면 평면응력문제, $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ 이면 평면변형률문제이며, A_I 와 A_{II} 는 다음과 같다.

$$A_I = \frac{v^2 \alpha_d}{(1-\nu)c_d^2 D}, \quad A_{II} = \frac{v^2 \alpha_s}{(1-\nu)c_s^2 D}, \quad (8)$$

$$\alpha_d = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_d^2}}, \quad \alpha_s = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_s^2}}, \quad D(v) = 4\alpha_d \alpha_s - (1 + \alpha_s^2)^2 \quad (9)$$

이다. 이 때, c_d 와 c_s 는 각각 압축파(dilatational wave)속도와 전단파 (shear wave)속도를 의미한다.

식 (7)의 계산상의 편의를 위해서 응력확대계수 K_I 과 K_{II} 를 분리하는 것이 바람직하며, 수식적으로 보조장(auxiliary field)를 도입함으로써 다음과 같이 분리된 K_I 과 K_{II} 를 얻을 수 있다^{9),10)}.

$$K_I = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{G_{int}^I}{2A_I} \right) \quad K_{II} = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{G_{int}^{II}}{2A_{II}} \right) \quad (10)$$

여기서, G_{int}^I 는 모드 I과 보조장의 결합으로 표현되는 에너지해방률, G_{int}^{II} 는 모드 II와 보조장의 결합으로 표현되는 에너지해방률을 의미한다.

4. 동적균열전파해석 알고리즘

본 연구에서는 무요소법에 의한, 그리고 무요소법과 유한요소법의 조합에 의한 동적 균열전파해석 프로그램을 개발하였다. 해석 알고리즘의 개략적인 흐름도는 그림 1과 같다.

이 때, 응력확대계수의 산정은 면적분 형태의 J적분을 사용하였으며, 균열의 성장방향을 결정하기 위해서 균열은 최대후프응력의 직각방향으로 진전한다는 maximum hoop stress criterion을 적용하였다.

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Initial Condition 2. Coupling of EFG and FEM <ol style="list-style-type: none"> 2.1 Calculate the shape functions and derivatives 3. Loop over the time step $n = 1, nsteps$ <ol style="list-style-type: none"> 3.1 Set up initial condition 3.2 Update velocities and displacements 3.3 Compute internal nodal forces 3.4 Compute external nodal forces 3.5 Calculate accelerations 3.6 Handle the dynamic crack propagation <ol style="list-style-type: none"> Calculate the stress intensity factors for all crack tips Check the crack propagation 3.7 Update the shape function and derivatives 4. end do ($n = n+1$) 5. Print output |
|--|

그림 1 무요소법과 유한요소법의 조합에 의한 explicit 동적균열전파해석 흐름도

5. 수치 예제

5.1 Edge crack을 지닌 반무한체에서의 동적균열문제

그림 2에 도시된 바와 같이 edge crack을 지닌 2차원 반무한체에, 일정한 속도 v_0 의 비대칭 동적하중을 받는 문제를 해석하였다. 본 해석예제에 대한 모드 I과 모드 II 응력확대계수의 이론해는 Lee와 Freund¹¹⁾에 의해 제시되어 있다. 해석대상은 유한한 평판으로 모형화하였다. 평판의 크기는 경계면에서 반사된 파가 이론해가 제시된 시간동안은 영향을 미치지 않도록 가로, 세로를 각각 균열길이 a_0 의 4배와 6배로 결정하였고 81×122개의 절점을 배치하여 무요소해석법에 의한 해석을 수행하였다(그림 3). 이 때 a_0 의 크기는 1m로 하였으며, 해석에 사용된 재료상수는 밀도 $\rho = 7833 \text{ kg/m}^3$, 탄성계수 $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 포아송비 $\nu = 0.25$ 이다.

시간이력해석을 위해서는 explicit 방법의 하나인 중앙차분법(Central Difference Method)을 적용하였다. 수치

적분은 균열 주변의 적분셀에서는 6 point Gauss Quadrature rule을 사용하였으며, 그 외의 영역에서는 1point Gauss Quadrature rule을 사용하였다.

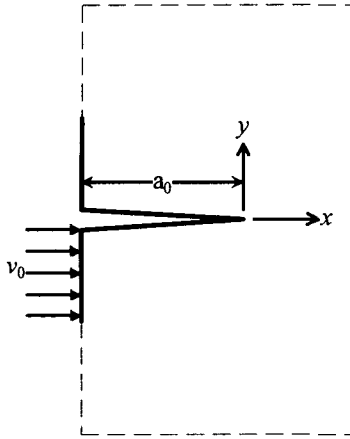


그림 2 Edge crack을 지닌 반무한체

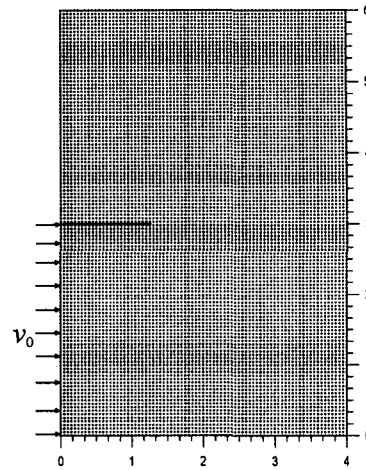


그림 3 무요소법을 이용한 반무한체의 수치해석모형

J-영역의 크기 및 위치에 따른 결과 그림 4에 도시된 바와 같이 J-영역의 크기를 $d=0.5a_0$ 일 때를 기준으로 하여 2배, 1/2배, 1/4로 그 크기를 조절하여 해의 결과를 비교하였다. 그림 5에는 시간이력에 따른 정규화된 모드 I과 모드 II 응력확대계수값의 변화를 이론해와 비교하였다. 이 때 응력확대계수는 $-(Ev_0\sqrt{a_0/\pi})/[2(1-\nu^2)c_d]$ 에 의해서 정규화되었다. 그림 6에 도시된 바와 같이 1/4배 크기의 J-영역을 제외하고는 J-영역의 크기에 관계없이 모드 I 과 모드 II 응력확대계수값이 이론해와 잘 일치함을 알 수 있다. 1/4배 크기의 J-영역의 경우에 모드 II 응력확대계수값에서의 오차 발생은 J-영역크기에 따른 해의 변화라기 보다는 J-영역의 크기가 줄어들어 인해서 수치적분점의 수가 부적절하게 배치되는데서 기인한다고 보여진다. 이를 검증하기 위해서 1/4배 크기의 J-영역에 대해서 적분점 수를 24×24 개로 증가시켜 재해석을 실시한 결과, 이론해에 접근하는 것을 확인 할 수 있었다(그림 5a참조). 이를 통해서 균열선단이 J-영역의 중앙에 있는 경우 적분영역의 크기에 상관없이 응력확대계수값은 일정하다는 것을 확인할 수 있었다.

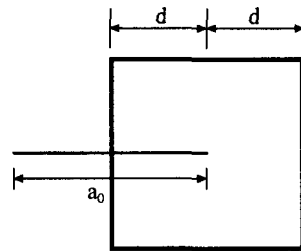


그림 4 응력확대계수 산정을 위한 J-영역의 크기

영향영역의 크기에 따른 결과 영향영역의 크기에 따른 해의 정도를 비교하기 위해서 d_{max} 값을 1.51, 2.51, 3.51로 변화시키면서 해석을 수행하였다. 그림 6에 도시된 바와 같이 영향영역의 크기에 따라서 응력확대계수가 민감하게 변화하지는 않지만, d_{max} 가 1.51인 경우에는 모드 II 응력확대계수가 이론해에 비해서 과대평가되는

경향이 있으며, 3.51인 경우에는 모드 II 응력확대계수가 이론해에 비해서 과소평가되는 경향이 있다. 따라서 그림 6의 결과로부터 해의 정도가 영향영역의 크기에 비례하는 것은 아님을 알 수 있다.

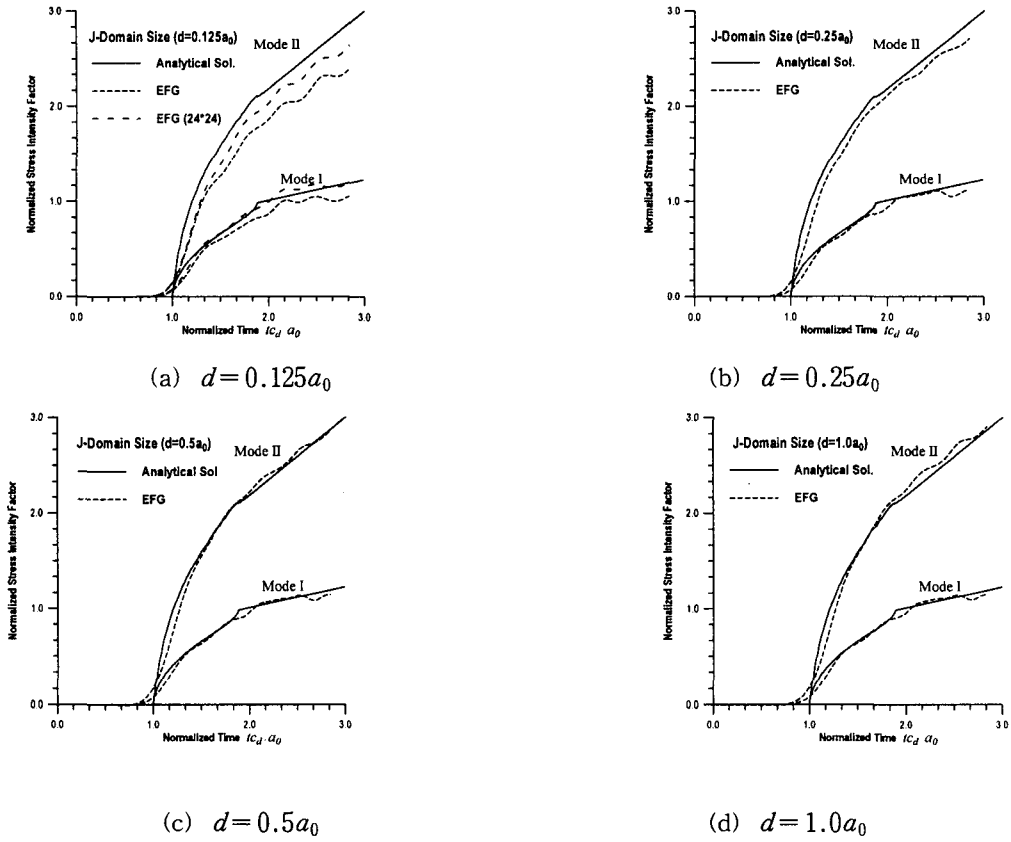


그림 5 J-영역의 크기변화에 따른 정규화된 응력확대계수의 비교

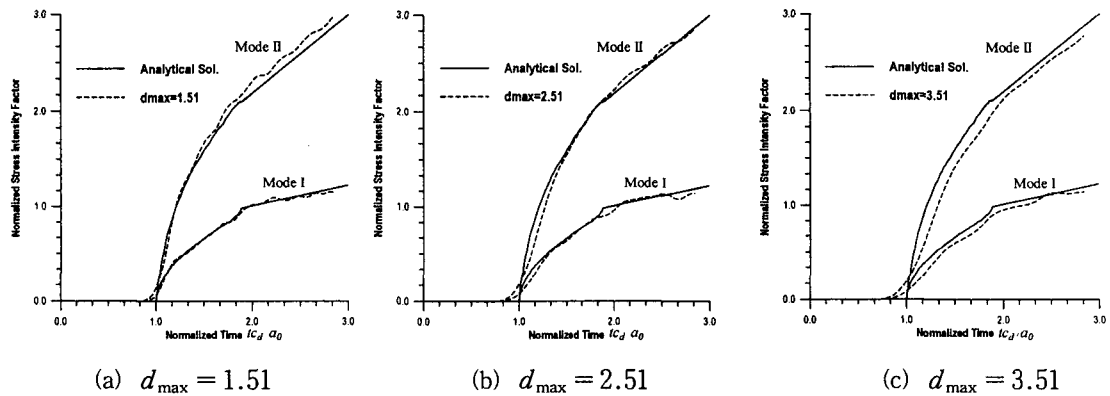


그림 6 영향영역 크기의 변화에 따른 응력확대계수의 비교

5.2 동적 혼합모드 하중상태의 균열전파문제

본 절에서는 동적 하중상태하에서 혼합모드에 의해 균열이 임의의 방향으로 성장하는 과정을 본 연구에서 제안한 방법에 의해 해석하기 위해서 Kalthoff와 Winkler¹²⁾에 의해서 실험이 이루어진 문제를 해석대상예제로 선정하였다. 그림 7에 제시된 바와 같이 두 개의 edge crack을 지닌 평판에 일정한 속도 v_0 로 하중을 가하는 문제로서, 해석대상의 대칭성에 의해서 해석대상의 상부만을 모형화하였다. 이 때 해석대상의 하단에는 $u_y = 0$ 의 경계조건을, 균열면에 작용하는 충격속도는 원래의 분출속도 $32m/s$ 의 1/2값으로 주고 해석을 수행하였다. 그림 8은 무요소법만의 수치해석모형을 나타내며, 101×101 개의 절점이 사용되었다.

그림 9는 그 부분모형을 나타내며 그림 9에 나타낸 바와 같이 균열이 성장하는 영역만을 무요소법에 의해 해석함으로써 해석의 효율성을 증진시키며 균열 전과경로해석을 수행할 수 있었다. 해석된 결과의 타당성을 검증하기 위해서 Kalthoff와 Winkler¹²⁾가 수행한 실험치와 비교한 결과 실험에서의 균열진전각은 70도 해석상의 초기균열진전각은 78도, 평균 균열진전각은 76.5도를 나타냄으로써 해석결과의 정확성을 입증할 수 있었다. 이 때 조합방법에 의한 해석결과는 본 예제에 경우 그 계산시간에 있어 무요소법만에 의한 해석시간에 비해 3배 정도의 효율을 보여주었다.

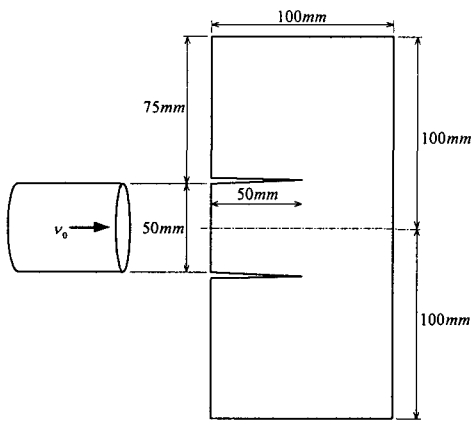


그림 7 동적혼합모드 하중상태의 균열전파문제

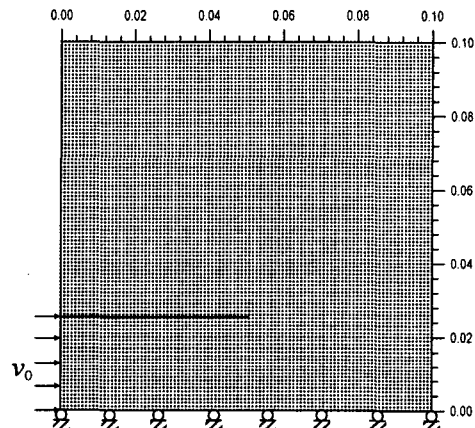


그림 8 Two edge crack 문제의 1/2 해석모형

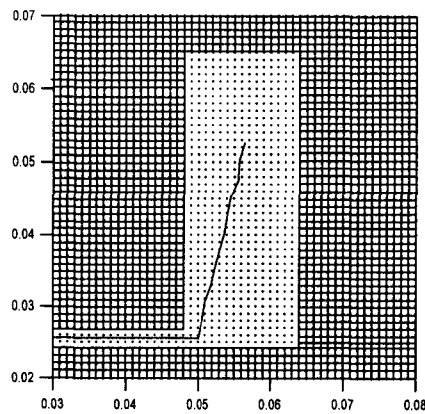


그림 9 무요소법과 유한요소법의 조합에 의해 균열전과경로 해석

6. 결론

본 연구에서는 무요소법과 유한요소법의 조합에 의해 선형 탄성 동적균열전파문제를 효율적이고 정확히 해석할 수 있는 수치해석 알고리즘을 개발하였다. 개발된 알고리즘의 정확성 및 효율성을 검증하기 위해서 이론 해와 실험결과가 주어진 benchmark 문제들에 적용해 본 결과 본 연구에서 제안한 알고리즘은 혼합모드상태하의 동적균열전파경로를 예측하는 문제에 효과적으로 적용할 수 있음을 입증하였다. 또한, 무요소법과 무요소법-유한요소법의 조합방법에 의한 해석결과를 비교해 본 결과 해의 정도에는 많은 차이가 없었지만 해석시간이 단축되는 효과를 거두었다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구지원사업 핵심전문연구(981-1204-004-2)지원을 받아 이루어졌으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Nishioka, T. and Atluri, S. N., (1984), "Path-Independent Integral and Moving Isoparametric Elements for Dynamics Crack Propagation", *AIAA Journal* Vol. 22, pp. 409-414.
2. Swenson, D. V. and Ingraffea, A. R., (1988), "Modeling Mixed-Mode Dynamic Crack Propagation Using Finite Elements: Theory and Applications", *Computational Mechanics*, Vol. 3, pp. 381-397.
3. Du, J., Yon, J. H., Hawkins, N. M., Arakawa, K., and Kobayashi, A. S., (1992), "Fracture Process Zone for Concrete for Dynamic Loading", *ACI Materials Journal*, Vol. 89, pp. 252-258.
4. Lancaster, P. and Salkauskas, K., (1981), "Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods", *Mathematics of Computation*, Vol. 37, pp. 141-158.
5. Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L., (1994), "Element-free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256.
6. Belytschko, T., Chang, H. S., and Lu, Y. Y., (1989), "A Variationally coupled Finite Element-Boundary Element Method", *Computers and Structures*, Vol. 33, pp. 17-20.
7. Moran, B. and Shih, C. F., (1987), "Crack Tip and Associated Domain Integrals From Momentum and Energy Balance", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, pp. 615-642.
8. Freund, L. B., (1990), *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press.
9. Yau, J. F., Wang, S. S. and Corten, H. T., (1980), "A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 335-341.
10. Shih, C. F. and Asaro, R. J., (1988), "Elastic-Plastic Analysis of Crack on Bimaterial Interface: Part I-Small Scale Yielding", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 299-316.
11. Lee, Y. J. and Freund, L. B., (1990), "Fracture Initiation Due to Asymmetric Impact Loading of An Edge Cracked Plate", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 104-116.
12. Kalthoff, J. F. and Winkler, S., (1987), "Failure Mode Transition at High Rates of Shear Loading", *International Conference on Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials*, Vol. 1, pp. 185-195.