

워핑과 회전관성을 고려한 원호형 수평 곡선보의 자유진동

Free Vibrations of Horizontally Circular Curved Beams with Warping and Rotatory Inertia

이 병 구* · 박 광 규** · 오 상 진***

Byoung Koo Lee · Kwang Kyou Park · Sang Jin Oh

ABSTRACT

This study explores the free, out-of-plane vibrations of horizontally circular curved beams. The differential equations governing the free vibration of such beams, including the effects of warping and rotatory inertia, are derived and solved numerically. The Runge-Kutta method and the Determinant Search method combined with Regula-Falsi method are used to integrate the differential equations and to obtain the natural frequencies, respectively. The lowest three natural frequencies are calculated over a wide range of non-dimensional system parameters: the horizontal rise to span length ratio, the slenderness ratio, the stiffness parameter, and the warping parameter. It is expected that the results obtained herein can be used practically for the design of curved member systems.

1. 서 론

현대사회의 산업발전으로 교통량이 급증하고 있어 교통수단의 원활한 흐름을 위하여 유기적인 교통시설들을 필요로 하고 있다. 특히 지역이 협소한 도심지역이나 고속도로에서는 고가교를 이용한 입체교차로의 축조가 요구되고 있다. 이러한 구조물의 축조시 곡률반경이 매우 큰 경우에는 직선부재를 사용하여 곡선부의 구간을 축조하기도 하지만, 곡률반경이 작은 경우 또는 구조물의 미적 요인 등을 고려하는 경우에 곡선교의 축조가 필요하다.

교량과 같이 이동하중을 받는 구조물의 설계시 이동하중의 진행에 따른 구조물의 동적인 영향을 파악하는 것은 필수적이다. 특히 자유진동은 구조물의 고유한 특성이며 동적 거동 해석의 지표가 되므로 가장 먼저 선행되어야 할 연구과제이다. 곡선부재의 진동문제에 대한 연구는 많은 문헌들⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾에 발표되고 있으며 최근

* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

** 대전대학교 토목공학과 교수

*** 담양대학 토목과 교수

에도 이 분야에 대한 활발한 연구가 진행되고 있다. 이러한 관점에서 본 연구는 원호형 수평 곡선보의 자유진동 특성을 규명하는 데 연구목적이 있다. 이를 위하여 곡선부재가 자유진동할 때 곡선보의 미소요소에 작용하는 합용력과 관성력의 동적 평형방정식을 이용하여 워핑(warping)과 회전관성을 고려한 원호형 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 유도된 지배미분방정식을 이용하여 곡선보의 고유진동수를 효율적으로 산출할 수 있는 수치해석 기법을 개발하고, 이를 컴퓨터 프로그램화하였다.

2. 수학적 모형

그림 1은 공간좌표계 (x, y, z) 에서 (x, y) 평면상에 정의되어 있는 원호형 수평 곡선보의 기하학적 형상과 자유진동시에 발생하는 변위를 나타낸 것이다. 이 원호형 수평 곡선보에서 ρ 는 곡률반경, α 는 중심각, l 은 지간길이, h 는 수평높이를 나타낸다. 곡선보의 축상 임의점에서 곡률중심 방향과 수평축이 이루는 각도는 θ 이다. 또한 v 는 z 축과 평행한 수직처짐, ψ 는 힘에 의한 단면회전각, ϕ 는 비틀림 각을 나타낸다.

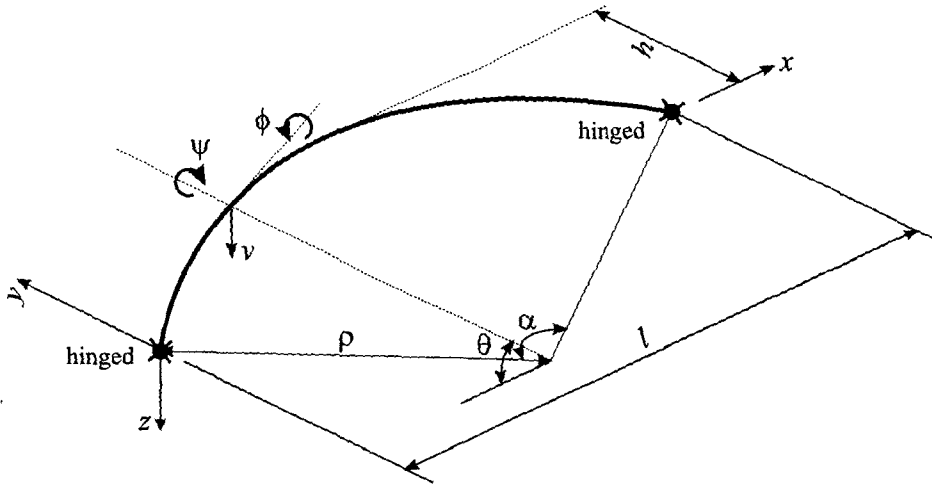


그림 1. 원호형 수평 곡선보의 기하학적 형상 및 진동변위

수평 곡선보가 면의 자유진동을 하는 경우에 곡선보의 미소요소에는 휨 모멘트 M , 전단력 Q 및 비틀림 모멘트 T 의 합용력이 발생하며, 질량을 갖는 부재의 미소요소에는 면외방향의 수직방향 관성력 F_v , 회전 관성우력 C_ψ 및 비틀림 관성우력 C_ϕ 가 발생한다. 부재의 미소요소에 발생하는 이 힘들의 동적평형 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$Q' - \rho F_v = 0, \quad M' - \rho Q + T + \rho C_\psi = 0, \quad M - T' + \rho C_\phi = 0 \quad (1-3)$$

부재단면에 발생하는 워핑 τ , bimoment B_i , 휨 모멘트 M , 비틀림 모멘트 T 및 단면 회전각 ϕ 는

다음 식과 같다.⁽⁶⁾

$$\tau = -a^{-1}(\phi' + a^{-1}v'), \quad B_i = -EI_w a^{-2}(\phi'' + a^{-1}v'') \quad (4,5)$$

$$M = EI\rho^{-1}(\phi - \rho^{-1}v''), \quad T = -EI_w a^{-3}(\phi''' + a^{-1}w'''), \quad \psi = \rho^{-1}v' \quad (6-8)$$

위의 식들에서 E 및 G 는 각각 탄성계수와 전단탄성계수이며, I 와 J 는 각각 휨축에 대한 단면 2차 모멘트와 Saint-Venant 비틀림상수이며, I_w 는 워핑상수이다.

수평 곡선보가 조화진동을 한다고 가정하면, 단위길이당 수직방향 관성력 F_v , 회전관성우력 C_ψ 및 비틀림관성우력 C_ϕ 는 다음 식들과 같다.

$$F_v = -\gamma A \omega_i^2 v, \quad C_\psi = -\gamma I \omega_i^2 \psi = -\rho^{-1} \gamma I \omega_i^2 v', \quad C_\phi = -\gamma I_p \omega_i^2 \phi \quad (9-11)$$

(2)식을 전단력 Q 에 대하여 정리하고, (6)식, (7)식 및 (10)식을 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} Q &= \rho^{-1}M' + \rho^{-1}T + R_e \cdot C_\phi \\ &= EI\rho^{-2}(\phi' - \rho^{-1}v''') + GJ\rho^{-2}(\phi' + \rho^{-1}v') - EI_w \rho^{-4}(\phi''' + \rho^{-1}v''') \\ &\quad - R_e \cdot \rho^{-1} \gamma I \omega_i^2 v' \end{aligned} \quad (12)$$

(12)식에서 R_e 는 회전관성의 고려여부를 나타내는 지표로서 그 내용은 다음과 같다.

$$R_e = 0 : \text{회전관성을 무시하는 경우} \quad (13.1)$$

$$R_e = 1 : \text{회전관성을 고려하는 경우} \quad (13.2)$$

지배 미분방정식을 무차원 식으로 유도하고, 해석결과들을 무차원양으로 분석하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \delta = y/l, \quad \zeta = \rho/l, \quad f = h/l, \quad \eta = v/l \quad (14-18)$$

$$s = \sqrt{I/A}/l, \quad s_p = \sqrt{I_p/A}/l \quad (19,20)$$

$$\epsilon = GJ/(EI), \quad D = EI_w/(EI^2) \quad (21,22)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\gamma A/(EI)} \quad (23)$$

(14), (15)식의 ξ 와 δ 는 직교좌표계 (x, y) 를, (16)식의 ζ 는 곡률반경 ρ 를 지간길이 l 로 정규화한 것이다. (17)식의 f 는 곡선보의 수평높이 h 를 지간길이 l 로 정규화한 수평높이 지간길이 비(horizontal rise to span length ratio)이다. 또한 (18)식의 η 는 수직방향 변위 v 를 지간길이 l 로 정규화한 것이다.

(19), (20)식의 s 와 s_p 는 세장비(slenderness ratio)관련 변수이고, (21), (22)식에서 ϵ 과 D 는 각각 강성계수(stiffness parameter)와 워핑계수(warping parameter)이다. 마지막으로 (23)식의 C_i 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)이다.

동적 평형방정식 (1)식에 (9)식과 (12)식을 대입하고 (14)식-(23)식의 무차원 변수를 이용하여 정리하면 (24)식의 상미분방정식을 얻을 수 있으며, 동적 평형방정식 (3)식에 (6)식, (7)식 및 (11)식을 대입하고 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 (25)식의 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$(1 + D\xi^{-2})\eta'''' = (\epsilon - R_e \cdot \xi^2 s^2 C_i^2)\eta'' + \xi^4 C_i^2 \eta - D\xi^{-1}\phi'''' + \xi(1 + \epsilon)\phi'' \quad (24)$$

$$\phi'''' = \xi^2 \epsilon D^{-1}\phi'' - \xi^2 D^{-1}(1 - \xi^2 s_p^2 C_i^2)\phi - \xi^{-1}\eta'''' + \xi D^{-1}(1 + \epsilon)\eta'' \quad (25)$$

본 연구에서는 그림 1과 같이 수평 곡선보의 단부조건으로 회전-회전을 고려하였으며, 회전단에서 경계조건을 다음과 같이 구한다. 회전단 ($x=0$ 또는 $x=l$)에서 수직방향 변위 v , 비틀림각 ϕ , (6)식에 나타난 휨 모멘트 M 및 (5)식의 bimoment가 발생하지 않으므로 무차원 변수들을 이용하면 무차원 경계조건식들을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\eta=0, \quad \phi=0, \quad \eta'=0, \quad \phi'' - \xi^{-2}\xi'\eta' = 0 \quad (26-28)$$

3. 형상함수

전 절에서 유도한 미분방정식들은 θ 에 관한 상미분방정식으로 유도되었지만, 원호형 곡선보의 선형은 직교좌표계 (x, y)에서 정의되는 것이 편리하다. 따라서 위에서 유도한 미분방정식들의 θ 에 관한 형상함수를 x 에 관한 함수로 나타내는 것이 편리하다. 그림 1에서 좌단을 원점으로 하는 (x, y) 좌표계 위에 놓인 곡률반경 ρ , 수평높이 h 및 지간길이 l 인 원호형 수평 곡선보의 기하학적 형상을 (15)-(17)식을 이용하여 무차원 선형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\delta = \xi \sin \theta + f - \xi \quad (29)$$

(29)식을 이용하면 θ 를 다음 (30)식과 같이 무차원 좌표 ξ 에 관한 함수로 나타낼 수 있고, 무차원 곡률반경 ξ 를 무차원 변수 f 로 나타내면 다음 (31)식과 같다.

$$\theta = \pi/2 - \sin^{-1}[(1 - 2\xi)/(2\xi)], \quad \xi = (4f^2 + 1)(8f)^{-1} \quad (30,31)$$

또한 (30)식을 이용하면 원호형 수평 곡선보의 중심각 α 는 (32)식과 같이 구할 수 있다.

$$\alpha = 2 \tan^{-1}[4f/(1 - 4f^2)] \quad (32)$$

이상의 (30), (31)식을 이용하면 θ 에 관한 상미분방정식으로 유도되어 있는 (25), (26)식들을 (ξ, δ) 의 무차원 직교좌표계에서 수치해석할 수 있다.

4. 수치해석 에 및 토의

유도된 미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다. 미분방정식을 수치적분하기 위하여 Runge-Kutta법을 이용하였고, 무차원 고유진동수 C_i 를 산출하기 위하여 Regula-Falsi법과 결합한 행렬 값 탐사법을 이용하였다. 이 연구에서는 회전-회전 보의 최저차 3개 모드의 C_i 값을 산출하였다.

표 1은 회전-회전 원호형 수평 곡선보에 대한 문헌 [1], [4]의 결과와 본 연구결과를 비교한 것이다. 여기서 문헌 [1]의 결과는 엄밀해이며, 문헌 [4]의 결과는 미분구적법을 이용하여 산출한 근사해이다. 표 1에서 처럼 본 연구결과와 문헌들의 결과는 매우 우수하게 근접하여 본 연구결과의 타당성을 검증할 수 있었다.

표 1. 본 연구와 타문헌의 무차원 고유진동수 비교($\epsilon=0.05$)

Geometry	Data source	Frequency parameter, C_i		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
$f = 0.03277$	Ref. [1]	18.94	51.84	82.34
$s_p = 0.0192$	Ref. [4]	20.83	58.03	114.2
$D = 1.467$	This study ($R_e = 1.$)	20.90	58.08	114.2
$f = 0.1340$	Ref. [1]	19.17	54.43	109.6
$s_p = 0.005$	Ref. [4]	20.84	58.04	114.2
$D = 0.1$	This study ($R_e = 1.$)	20.91	58.09	114.3

표 2는 회전-회전 원호형 수평 곡선보에 대한 최저차 3개 모드의 무차원 고유진동수를 수록한 것이다. 이 표에서는 문헌 [4]와의 결과비교를 위해 문헌 [4]에 정의되어 있는 무차원 변수들과 앞 절에서 도입한 무차원 변수들 사이의 관계를 (33)식-(35)식에 표시하였다.

$$s_{pa} = [2 \sin(\alpha/2)]s_p, D_a = [4 \sin^2(\alpha/2)]D, C_{ai} = [4 \sin^2(\alpha/2)]C_i \quad (33-35)$$

본 연구에서 강성계수 ϵ 은 개략적으로 강제 박판 I형 단면에 해당하는 0.05, $s=0.8$ 로 택하였으며, 문헌 [4]에 정의되어 있는 무차원 변수 s_{pa} 는 0.02와 0.005, D_a 는 0, 0.05 및 0.50을 택하였다. 표 2에서 맨 오른쪽 행에 수록한 값은 Kang 등⁽⁴⁾이 미분구적법을 이용하여 산출한 근사해이다. 이 표들에서도 본 연구결과와 문헌의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다. 또한, 중심각 α 와 세장비 s_{pa} 가 작을수록 무차원 고유진동수가 큼을 알 수 있다. 또한 D_a 가 증가하는 경우에 무차원 고유진동수 C_{ai} 는 항상 증가하며, 세장비가 작을수록 증가율이 큰 것을 알 수 있다. 한편 곡선보의 중심각 α 가 동일한 경우 D_a 가 충분히 크면 ($D_a=0.1$), 세장비 s_{pa} 에 관계없이 거의 일정한 C_{ai} 값을 나타냄을 알 수 있다.

표 2. 회전-회전 원호형 수평 곡선보의 무차원 고유진동수 ($\epsilon=0.05$)

$\alpha(\text{deg.})$	s_{pa}	D_a	Frequency parameter, C_{ai}				
			This study ($R_e=1.$)			Ref. [4]	
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	
15	0.02	0	114.3	167.9	266.4	114.3	
		0.001	139.2	271.5	573.0	139.2	
		0.01	142.6	574.7	734.5	-	
		0.1	142.9	574.9	1295.	142.9	
	0.005	0	133.4	561.4	575.3	133.4	
		0.001	140.4	574.2	1076.	140.4	
		0.01	142.7	574.9	1295.	-	
		0.1	143.0	575.0	1295.	143.0	
	30	0.02	0	26.99	87.00	114.3	26.99
			0.001	29.84	103.2	139.2	29.84
			0.01	33.80	142.6	198.9	-
			0.1	34.86	142.9	322.9	34.86
0.005		0	28.00	133.4	311.7	28.00	
		0.001	30.39	140.4	321.6	30.39	
		0.01	33.87	142.7	322.8	-	
		0.1	34.87	143.0	323.0	34.87	
45		0.02	0	9.827	51.57	68.27	9.827
			0.001	10.60	58.07	72.70	10.60
			0.01	13.12	62.22	104.8	-
			0.1	14.72	62.91	142.9	14.72
	0.005	0	9.989	54.81	133.4	9.989	
		0.001	10.74	59.03	140.4	10.74	
		0.01	13.16	62.29	142.7	-	
		0.1	14.72	62.92	143.0	14.72	
	60	0.02	0	4.419	26.99	60.72	-
			0.001	4.675	29.84	62.35	-
			0.01	5.949	33.80	75.48	-
			0.1	7.564	34.86	79.92	-
0.005		0	4.454	28.00	71.38	-	
		0.001	4.709	30.39	76.42	-	
		0.01	5.972	33.87	79.43	-	
		0.1	7.569	34.87	79.94	7.569	
90		0.02	0	1.222	9.827	26.99	-
			0.001	1.261	10.60	29.84	-
			0.01	1.540	13.12	33.80	-
			0.1	2.403	14.72	34.86	-
	0.005	0	1.225	9.989	28.00	-	
		0.001	1.264	10.74	30.39	-	
		0.01	1.543	13.16	33.87	-	
		0.1	2.405	14.72	34.87	-	

5. 결 론

이 논문은 원호형 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구이다. 워핑과 회전관성효과를 고려한 원호형 수평 곡선보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고, 수치적분기법과 행렬값 탐사법을 이용하여 유도된 지배방정식으로부터 곡선보의 무차원 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 작성하였다.

감사의 글

이 논문은 한국과학재단의 연구비 지원(과제번호: KOSEF 981-1201-001-1, 과제명: 워핑과 회전관성을 고려한 수평 곡선보의 자유진동 해석)에 의하여 이루어진 연구의 일부이며, 연구비를 지원해주신 과학재단 당국에 감사드립니다.

참고문헌

1. C.G Culver, "Natural Frequencies of Horizontally Curved Beams," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 93, No. ST2, 1967.
2. T.M. Wang, R.H. Nettleton and B. Keita, "Natural Frequencies for Out-of-Plane Vibrations of Continuous Curved Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 68, No. 3, 1980, pp. 427-436.
3. 강영중, 최영준, "Free Vibration of Thin-Walled Horizontally Curved Beams," 한국강구조 학회논문집, 제 7권 제 4호, 1995, pp. 243-258.
4. K.J. Kang, C.W. Bert and A.G. Striz, "Vibration Analysis of Horizontally Curved Beams with Warping using DQM," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 122, No. 6, 1996, pp. 657-662.
5. 모정만, *변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구*, 원광대학교 대학원, 1998, 박사학위논문.
6. C.P. Heins, *Bending and Torsional Design in Structural Members*, D.C. Heath and Company, 1975.