

정현상으로 Taper진 부재의 고유진동수 Natural Frequencies of Sinusoidally Nonsymmetrically Tapered Members

강명진* 안성기* 이수곤**
Kang, Myung-Jin Ahn, Seong-Ki Lee, Soo-Gon

ABSTRACT

It is generally known that the stress and displacement of a member or a system under dynamic load with frequency ω are magnified by the factor $1/[1-(\omega/\omega_0)^2]$. When the member assumes non-prismatic shape, the natural frequency, ω_0 is hard or impossible to determine if the conventional method are adopted. In these cases, the numerical methods are provide powerful tools for the solution of frequency problems.

In this paper, finite element method is applied to determine the natural frequencies of the non-symmetrically tapered members. The shape of the member is assumed to change sinusoidally along its axis. The results obtained by finite element method are expressed by some simple algebraic equations. The estimated frequencies calculated by the proposed equations coincide well with those by the finite element method.

1. 서론

축 방향으로의 형태가 곡선형(curved form)을 취하는 부재는 우리 주변에서 흔히 볼 수 있는 변단면 부재이다. 그러나 이들 부재의 고유치(예를 들어 탄성임계하중이나 고유진동수)문제를 고전적인 해석적방법으로 접근할 경우 정해치 산정은 불가능하거나 가능하더라도 대단히 복잡한 과정을 요하게 될 때가 많다. 정해치가 아닌 약산치 산정 또한 복잡한 과정을 거치기는 마찬가지이다. 이때에는 computer이용을 전제로한 수치해석법이 보다 편리하게 이용될 수 있다.

이번 연구에서는 부재축에 따른 부재형태가 비대칭 정현상으로 taper진 부재의 고유진동수를 유한요소법으로 산정하였다. 주요 매개변수는 taper parameter, α 와 단면적 및 단면 2차모멘트의 변화를 지배하는 매개변수(sectional property parameter),(m,n)으로 하였다. 수치해석결과를 일반화하기 위하여 유한요소법으로 산정된 진동수를 α 와 n 의 간단한 대수식으로 표시하였으며 이때 다항식에 포함된 α 와 n 의 계수들은

* 전남대학교 대학원 석사과정

** 전남대학교 건축학과 교수

회귀분석법에 의하여 결정하였다. 제안한 대수식에 의하여 추정된 고유진동수는 유한요소법에 의한 값들과 대단히 잘 일치한다. 따라서 구조물의 진동해석이나 동적 해석에 종사하는 기술자들에게 도움이 되겠다.

2. 운동방정식 및 연구의 범위

그림 1.과 같은 변단면 부재가 동하중(dynamic load) $q(x, t)$ 에 의하여 진동을 하게 되면 다음과 같은 운동방정식을 얻게 된다.

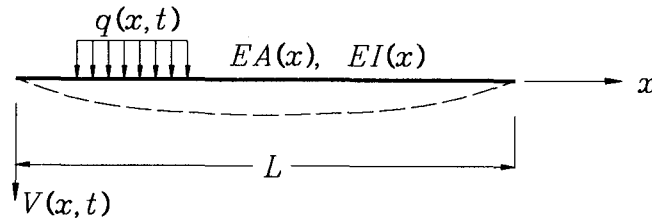


그림 1. 동하중을 받는 변단면 보

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}] + \frac{\gamma A(x)}{g} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (1)$$

여기서 $EI(x)$ 는 부재의 임의점 x 에서의 휨강성이고 $\gamma A(x)$ 는 단위길이당의 무게 (γ : 단위 체적당 재료의 중량)로 $\gamma A(x)/g$ 는 단위길이당의 밀도(mass)이다.

여기서 $q(x, t) = 0$ 즉 동하중이 없게되면 식 (1)은 자유진동을 지배하는 식으로 된다. 외력이 없는 상태에서 부재가 횡방향으로 진동수 ω 를 가지고 조화 진동할 때는

$$V(x, t) = v(x) \sin \omega t \quad (2)$$

로 변수분리할 수 있으며 이때 식 (1)은 다음형태를 취한다.

$$\frac{d^2}{dx^2} [EI(x) \frac{d^2 v}{dx^2}] - \frac{\omega^2 \gamma A(x)}{g} \cdot v = 0 \quad (3)$$

식 (3)은 고유진동수를 지배하는 미분방정식으로 그 적분이 가능하면 진동수 방정식(frequency equation)의 유도도 가능하게 된다. 그러나 이번 연구에서 택한 다음의 그림 2와 같은 부재에서는 미분 방정식의 해(solution)또는 적분이 불가능하다.

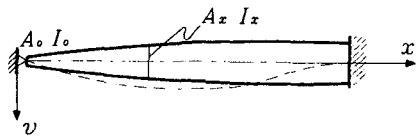
실제로 그림 2.와 같은 변단면 부재는 공학의 전 분야에 걸쳐 광범위하게 이용되고 있으나 그 고유치해석(eigenvalue analysis)은 간단하지 않다. 진동수 산정 대상으로 택한 부재에서 단면적 $A(x)$ 와 단면2차모멘트 $I(x)$ 의 변화는 각각 식 (4)의 형태로 변하는 것으로 한다. 여기서 taper parameter α 와 sectional property parameter, (m,n)의 조합은 식 (5)의 경우로 국한한다.

$$A_x = A_0 \left(1 + \alpha \sin \frac{\pi x}{2L}\right)^m, \quad I_x = I_0 \left(1 + \alpha \sin \frac{\pi x}{2L}\right)^n \quad (4)$$

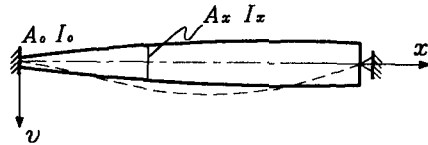
taper parameter, $\alpha = 0.0, 0.1, 0.2, \dots, 2.0$

sectional property parameter, $(m, n) = (0, 2), (1, 3), (2, 4)$ (5)

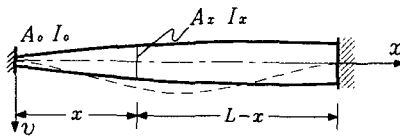
sectional property parameter의 식 (5)와 같은 조합이 기하학적으로 어떤 의미를 갖는지는 타 문헌을 참고하기로 한다. 부재의 경계조건은 그림 2의 (a),(b) 및 (c)와 같고 양단 단순지지 상태가 제외되어 있는 것은 이미 다른 논문에서 다루었기 때문이다.



(a) 단순지지-완전고정 부재



(b) 완전고정-단순지지 부재



(c) 완전고정-완전고정 부재

그림 2. 비대칭 정현상으로 taper진 부재

3. 유한요소법

그림 2와 같은 변단면 보의 고유진동수 산정을 위하여 택한 유한요소는 절점의 자유도(degree of freedom)가 2인 선형요소로서 그림 8과 같이 나타낼 수 있다. 이러한 요소의 처짐함수는 절점의 자유도가 4 개인 점을 고려하여 식 (6)과 같은 3차 다항식을 가정할 수 있다.

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (6)$$

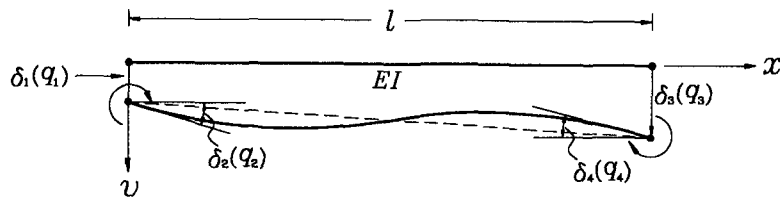


그림 3. 요소의 절점변형과 절점력

여기에 각 절점에서의 경계조건($x=0 \Rightarrow v = \delta_1, \frac{\partial v}{\partial x} = \delta_2; x=L \Rightarrow v = \delta_3, \frac{\partial v}{\partial x} = \delta_4$)을 대입하면, 처짐함수를 다음과 같은 형상함수, $[N]$ 과 절점변형벡터, $\{\delta\}$ 의 결합으로 표시할 수 있다.

$$v = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\} \quad (7)$$

여기서 형상함수 성분 N_i 는 각각

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_2 &= x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \\ N_3 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_4 &= \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right) \end{aligned} \quad (8)$$

자유진동에 있어서 요소의 total potential energy Π 는

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - \frac{\gamma\omega^2}{2g} \int_0^l A(x) \cdot v^2 dx - \frac{1}{2} \{\delta\}^T \cdot \{q\} \quad (9)$$

로 나타낼 수 있다. 요소의 강성행렬을 구하기 위해 Π 를 일차변분하면 다음과 같이 강성행렬이 주어진다.

$$\{q\} = [k]\{\delta\}, \quad [k] = [k]_b - \omega^2[m]_c \quad (10)$$

여기서 휨 강성행렬 $[k]_b$ 는 식 (11,a)와 같이 되고 consistent mass matrix $[m]_c$ 는 식 (11,b)와 같이 나타낼 수 있다.

$[k_b]$ (=flexural stiffness matrix)

$$\begin{aligned} &= \int_0^l EI(x) \left\{ \frac{d^2 N}{dx^2} \right\}^T \cdot \left\{ \frac{d^2 N}{dx^2} \right\} dx \\ &= \frac{EI(e)}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & \text{symm.} \\ -6l & 4l^2 & & & \\ -12 & 6l & 12 & & \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11,a)$$

$[m_c]$ (=consistent mass matrix)

$$\begin{aligned} &= \int_0^l \frac{\gamma}{g} A(x) \{N\}^T \cdot \{N\} dx \\ &= \frac{\gamma A(e)l}{420g} \begin{bmatrix} 156 & & & & \text{symm.} \\ 22l & 4l^2 & & & \\ 54 & 13l & 156 & & \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11,b)$$

변단면 보에서는 단면 2차모멘트와 단면적이 상수가 아니므로 강성행렬을 구하는 과정이 대단히 복잡하게 된다. 따라서, 본 연구에서는 요소의 중앙에서 산정한 단면 2차모멘트 $I(e)$ 와 단면적 $A(e)$ 로 $I(x)$ 와 $A(x)$ 를 대신하여 강성행렬을 구하였다. 예를 들어 그림 2(a)의 변단면 보를 20등분($L=20l$) 할 경우 $(m, n)=(2, 4)$, $\alpha=2.0$ 이면, 10번째 요소의 휨 강성행렬 중 $(k_{11})_b$ 의 정확한 수치적분 결과는 $445.9303EI_0/l^3$ 이고 적분중의 $I(x)$ 를 $I(e)$ 로 치환하였을 때의 $(k_{11})_b$ 는 $445.6725EI_0/l^3$ 이다. 같은 방법으로 20번째 요소의 consistent mass matrix 중 $(m_{11})_c$ 의 정확한 수치적분 결과는 $3.3344\gamma A_0 l/g$ 이며, $A(x)$ 를 $A(e)$ 로 치환한 후 적분결과 얻어지는 $(m_{11})_c$ 는 $3.3394\gamma A_0 l/g$ 로 어느 경우에도 오차는 대단히 작다.

4. 고유진동수 산정

요소의 절점력 vector와 절점변형 vector와의 관계식을 보 전체의 모든 요소에 관하여 조합한 후 경계 조건을 처리하면 보의 외력 vector $\{Q\}$ 와 변형 vector $\{\Delta\}$ 는 다음 식의 형태를 취한다.

$$\{Q\} = ([K]_b - \omega_0^2 [M]_c)\{\Delta\} \quad (12)$$

자유진동에서는 $\{Q\} = \{0\}$ 이므로 위 식은 다음과 같이 된다.

$$([K]_b - \omega_0^2 [M]_c)\{\Delta\} = \{0\} \quad (13)$$

여기서 변형 vector $\{\Delta\} \neq \{0\}$ 이므로 $\{\Delta\}$ 의 계수행렬(premultiplied matrix)이 행렬식(determinant)으로 0이 되어야 한다는 식으로부터 구하여 진다. 즉,

$$\det([K]_b - \omega_0^2 [M]_c) = 0 \quad (14)$$

computer를 이용한 반복법(iteration method)으로 기본진동수를 구하기 위하여 식 (14)를 식 (15)와 같이 변

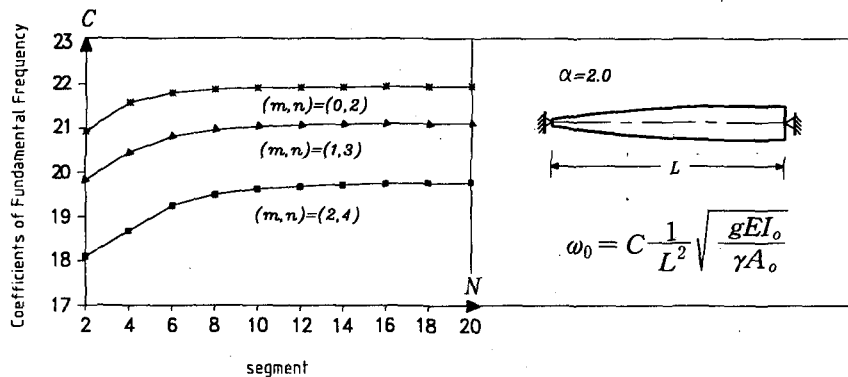


그림 4. 요소수의 증가와 수렴도

형 시킨다.

$$\det([K]_b^{-1}[M]_c - \frac{1}{\omega_0^2} [I]) = 0 \quad (15)$$

위에서 $[I]$ 는 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

이와 같이 구한 고유진동수는 요소수가 증가할수록 일정값에 수렴하게 되는데, 그림 4.가 이를 보여주고 있다. 대체로 $N=16$ 이상부터 일정값에 수렴하므로 여기서는 주어진 보를 20등분하여 고유진동수를 구하였으며 그 결과는 다음의 표 1.의 C_{fem} 란에 나타나 있다.(지면 관계상 그림 2.(b)의 고정-단순인 경우는 생략)

5. 회귀식

유한요소법에 의한 결과는 비교적 근사치에 가까운 고유진동수를 구할 수 있으나, 그 결과가 taper parameter α 와 sectional property parameter (m,n)에 따라 구해야 하는 번거로움이 있다. 본 연구에서는 유한요소법의 결과를 일반화 할 수 있는 α 와 n에 관한 회귀식을 다음과 같이 제안하였다.

$$\omega_0 = C(\alpha, n) \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{gEI_0}{\gamma A_0}} \quad (16)$$

$$C(\alpha, n) = (A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2) + (B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2)n + (C_0 + C_1\alpha + C_2\alpha^2)n^2$$

표 1. 비대칭 변단면 보의 고유진동수

(a)단순지지-고정 보(그림 2(a))

α	(m,n)=(0,2)		(m,n)=(1,3)		(m,n)=(2,4)	
	C_{fem}	$C(\alpha, n)$	C_{fem}	$C(\alpha, n)$	C_{fem}	$C(\alpha, n)$
0.0	15.4178	15.4583	15.4178	15.4641	15.4178	15.4823
0.1	16.4856	16.4993	16.5554	16.5699	16.6236	16.6448
0.2	17.5374	17.5332	17.6715	17.6667	17.8056	17.7964
0.3	18.5776	18.5601	18.7742	18.7545	18.9639	18.9370
0.4	19.6024	19.5798	19.8576	19.8333	20.0996	20.0668
0.5	20.6157	20.5925	20.9276	20.9031	21.2209	21.1856
0.6	21.6185	21.5981	21.9892	21.9639	22.3248	22.2934
0.7	22.6106	22.5966	23.0340	23.0156	23.4166	23.3903
0.8	23.5968	23.5879	24.0675	24.0583	24.4932	24.4763
0.9	24.5768	24.5722	25.0957	25.0920	25.5566	25.5513
1.0	25.5455	25.5495	26.1121	26.1167	26.6085	26.6155
1.1	26.5117	26.5196	27.1191	27.1323	27.6527	27.6686
1.2	27.4694	27.4826	28.1250	28.1389	28.6874	28.7109
1.3	28.4183	28.4385	29.1203	29.1365	29.7165	29.7422
1.4	29.3670	29.3874	30.1039	30.1251	30.7328	30.7625
1.5	30.3098	30.3291	31.0800	31.1047	31.7410	31.7720
1.6	31.2515	31.2638	32.0593	32.0753	32.7467	32.7704
1.7	32.1837	32.1913	33.0272	33.0368	33.7446	33.7580
1.8	33.1194	33.1118	33.9900	33.9893	34.7393	34.7346
1.9	34.0328	34.0252	34.9510	34.9328	35.7196	35.7003
2.0	34.9606	34.9315	35.8976	35.8673	36.6983	36.6551

(b) 고정-고정 보(그림 2(c))

α	(m,n)=(0,2)		(m,n)=(1,3)		(m,n)=(2,4)	
	C_{fem}	$C(\alpha, n)$	C_{fem}	$C(\alpha, n)$	C_{fem}	$C(\alpha, n)$
0.0	22.3725	22.4388	22.3725	22.4289	22.3725	22.4086
0.1	23.7167	23.7383	23.6283	23.6476	23.5454	23.5583
0.2	25.0338	25.0262	24.8630	24.8561	24.7032	24.7003
0.3	26.3297	26.3026	26.0766	26.0543	25.8489	25.8348
0.4	27.6036	27.5674	27.2720	27.2423	26.9796	26.9615
0.5	28.8577	28.8207	28.4512	28.4200	28.0972	28.0807
0.6	30.0951	30.0624	29.6170	29.5875	29.2115	29.1921
0.7	31.3165	31.2925	30.7658	30.7447	30.3119	30.2960
0.8	32.5247	32.5111	31.9036	31.8916	31.4032	31.3921
0.9	33.7245	33.7181	33.0335	33.0283	32.4843	32.4807
1.0	34.9054	34.9136	34.1493	34.1548	33.5594	33.5616
1.1	36.0848	36.0975	35.2547	35.2709	34.6234	34.6348
1.2	37.2489	37.2698	36.3595	36.3768	35.6851	35.7004
1.3	38.3991	38.4306	37.4488	37.4725	36.7432	36.7583
1.4	39.5506	39.5798	38.5330	38.5579	37.7858	37.8086
1.5	40.6878	40.7175	39.6043	39.6330	38.8339	38.8513
1.6	41.8203	41.8436	40.6774	40.6979	39.8728	39.8862
1.7	42.9452	42.9581	41.7417	41.7525	40.9081	40.9136
1.8	44.0674	44.0611	42.7984	42.7969	41.9355	41.9333
1.9	45.1677	45.1525	43.8514	43.8310	42.9563	42.9453
2.0	46.2817	46.2324	44.8934	44.8549	43.9745	43.9498

표 2. 회귀상수 (식(16))

단순-고정	$A_0=15.4839$	$A_1=8.8860$	$A_2=-0.1600$	$r \approx 1.0$
	$B_0=-0.0252$	$B_1=0.8613$	$B_2=-0.0979$	
	$C_0=0.0062$	$C_1=-0.0407$	$C_2=0.0003$	
고정-단순	$A_0=15.4527$	$A_1=11.4282$	$A_2=-0.4862$	$r \approx 1.0$
	$B_0=0.0129$	$B_1=-1.6140$	$B_2=0.0631$	
	$C_0=-0.0039$	$C_1=0.0490$	$C_2=-0.0106$	
고정-고정	$A_0=22.4274$	$A_1=15.0126$	$A_2=-0.5120$	$r \approx 1.0$
	$B_0=0.0161$	$B_1=-1.0905$	$B_2=-0.0984$	
	$C_0=-0.0052$	$C_1=0.0553$	$C_2=0.0327$	

식 (16)의 상수들은 회귀법으로 구하였으며 이때의 결과가 유한요소법에 의한 고유진동수를 얼마나 오차없이 반영하는가를 나타내는 상관계수가 표 2의 r 이다. 상관계수 r 은 식 (17)로 계산된 값이며 \overline{C}_{fem} 과 $\overline{C}(\alpha, n)$ 은 각각 C_{fem} 과 $C(\alpha, n)$ 의 산술 평균값이다.

$$r = \frac{\Sigma\{(C_{fem} - \bar{C}_{fem}) \cdot (C(\alpha, n) - \bar{C}(\alpha, n))\}}{\sqrt{\{\Sigma(C_{fem} - \bar{C}_{fem})^2\}\{\Sigma(C(\alpha, n) - \bar{C}(\alpha, n))^2\}}} \quad (17)$$

6. 결 론

정현상으로 변하는 변단면 보의 고유진동수를 구하기 위해 여러 가지 방법을 이용하였다. 그러나, 결과치를 얻기 까지의 과정이 대단히 복잡하여 실무에 적용하기는 곤란하므로, 유한요소법 결과를 토대로한 2차 회귀식을 제안하였는데 그 결과는 다음과 같다.

- 1) 회귀식의 고유진동수값과 유한요소법으로 구한 결과와의 상관계수가 거의 1.0에 가까웠다. 이것은 제안된 식을 이용하더라도 비교적 오차없이 변단면 부재의 고유진동수를 구할 수 있음을 보여준다.
- 2) 일반적으로 taper parameter α 가 증가할수록 고유진동수 값이 크게 나타났다.
- 3) sectional property parameter (m,n)의 변화에는 경계조건에 따라 고유진동수의 증가가 상이하게 나타났다. 즉, 단순-고정인 경우는 n이 증가 할수록, 고정-단순, 고정-고정일때는 n이 감소할수록 고유진동수가 크게 된다.
- 4) 위 결과는 단순히 유한요소법에 의한 결과만을 비교한 것이므로 실제 실험을 통하여 타당성 검토가 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

- (1) Demeter G. Fertis, *Dynamics and Vibration of Structures*, John Wiley & Sons, 1973.
- (2) Daniel J. Gorman, *Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*, John Wiley & Sons, 1975.
- (3) Mario Paz, *Structural Dynamics; Theory and Application*, Van Nostrand Reinhold, 1991.
- (4) W.C. Hurty and M.F. Rubinstein, *Dynamics of Structures*, Prentice Hall, 1964.
- (5) Cyril M. Harris, *Shock and Vibration Handbook*, McGRAW-HILL, 1961.
- (6) M. A. De Rosa and N. M. Auciello, "Free Vibration of Tapered Beams with Flexible Ends", *Computers & Structures*, Vol. 60. No. 2, pp. 197~202, 1995.
- (7) R. O. Grossi and R. B. Bhat, "A Note on Vibrating Tapered Beams", *Journal of Sound and Vibration*, No. 147, pp. 174~178, 1991.
- (8) S. K. Jang and C. W. Bert, "Free Vibration of Stepped Beams; Exact and Numerical Solutions", *Journal of Sound and Vibration*, No. 130, pp. 342~346, 1989.
- (9) M. Gürgöze, K. Özgür and H. Erol, "On the Eigenfrequencies of a Cantilevered Beam with a Tip Mass and In-span Support", *Computers*, Vol. 56. No. 1, pp. 85~92, 1994.
- (10) 사 중 엽, Professor's Analysis Home Page, ch.4 회귀분석. ch.5 수치적분, 1998.
- (11) 안 성 기, 김 순 철, 이 수 곤 "단순지지 변단면보의 고유진동수 산정", *한국전산구조공학회 춘계 학술 발표회 논문집*, pp137~144, 1999.