

## 유한요소 모델 검증 및 개선 Correlation and Update of Finite Element Model

왕 세 명\*  
Wang, Se-Myung

고 창 성\*\*  
Ko, Chang-Seong

---

### ABSTRACT

The finite element analysis (FEA) is widely used in modern structural dynamics because the performance of structure can be predicted in early stage. However, due to the difficulty in determination of various uncertain parameters, it is not easy to obtain a reliable finite element model. To overcome these difficulties, a updating program of FE model is developed by consisting of pretest, correlation and update. In correlation, it calculates modal assurance criteria, cross orthogonality, mixed orthogonality and coordinate modal assurance criteria. For the model updating, the continuum sensitivity analysis and design optimization tool(DOT) are used. The SENSUP program is developed for model updating giving physical parameter sensitivity. The developed program is applied to practical examples such as the BLDC spindle motor of HDD, and upper housing of induction motor. And the sensor placement for the square plate is compared using several methods.

---

### 1. 서 론

구조물을 최적화 하기 위해서는 그것의 동특성을 미리 예측할 수 있어야 한다. 실험과 해석의 여러 가지 방법이 사용되어 지고 있지만 그 중에서도 유한요소 해석 방법이 널리 쓰이고 있다. 신뢰할 만한 유한 요소 모델을 가지고 있으면 설계단계에서 구조물의 성능과약이 용이하지만 복잡한 시스템의 경우 불확실한 인자들에 의해 정확한 모델을 얻기란 그리 간단하지 않다. 따라서 체계적인 방법이 필요하다.

이를 위해서 많은 학자들이 활발한 연구가 진행되고 있으며, 상용화된 소프트웨어들도 많이 나와있다<sup>(1,2,3)</sup>. 또한 이런 프로그램들은 모듈단위로 개발되고 있으며 크게 세 가지로 나누어질 수 있다. 예비 실험(pretest), 검증(correlation), 개선(update)이 그것이다. 개선 과정을 보면 민감도를 요구하게 되는데 기존의 상용 소프트웨어들은 반해석적 (semi-analytical)<sup>(4)</sup> 방법이나 유한 차분법 (finite difference)을 이용하고 있다. 그리고 개선을 위해서 최적화 프로그램을 주로 이용하고 있다. 본 연구에서는 개발된 연속체 민감도(continuum sensitivity analysis)<sup>(5)</sup>를 이용하고 상용 최적화 프로그램인 DOT(design optimization tools)<sup>(6)</sup>을 이용한 개선 프로그램을 UNIX 환경에서 개발하였고 아울러 예비실험과 검증을 위해서 윈도우 환경의 GUI에 의한 프로그램을 개발하였다. 그리고 예비 실험과 검증을 위해 워크스테이션에 있는 MSC/NASTRAN을 제어하기 위해 WINSOCK library를 이용하였고 축약된 시스템 행렬을 얻기 위해 DMAP(direct matrix abstraction program) alter<sup>(7)</sup>가 자동으로 생성되게 하였다.

---

\* 광주과학기술원 기전공학과, 교수

\*\* 금호 타이어, 연구원

또한 본 프로그램을 이용하여 실제 HDD의 하판, BLDC 스피들 모터 그리고 유도 모터의 상부 하우징에 대해 적용해 보았고 사각 평판에 대해 센서 위치선정 방법을 비교해 보았다.

## 2. 상관관계 기법 (correlation technique)

가장 간단한 방법으로는 고유 주파수의 차를 비교하는 방법과 모드형상을 눈으로 비교해 보는 방법이 있다. 보다 정량화 해서 나타내기 위해서 크게 두 가지로 나뉘어 질 수 있는데 모드형상 상관관계와 자유도 상관관계가 그것이다.

### 2.1 모드 형상 상관관계법

#### 2.1.1 Modal Assurance Criteria (MAC)

MAC 값은 두 벡터간의 상관관계의 정도를 평가하는 것으로 가장 널리 쓰인다.

$$MAC^{a-x}(i, j) = \frac{|\{\Psi\}_i^T \{\Psi\}_j|^2}{(\{\Psi\}_i^T \{\Psi\}_i)(\{\Psi\}_j^T \{\Psi\}_j)} \quad (1)$$

여기서 a는 해석 그리고 x는 실험을 의미한다. MAC 값은 0과 1사이의 값을 가지며, 1에 가까울수록 높은 상관관계를 나타내며 벡터의 스케일에 영향을 받지 않는 특징이 있다.

#### 2.1.2 Cross and Mixed Orthogonalities (COM and MOM)

COM값과 MOM 값은 다음과 같이 정의 될 수 있으며 상관관계가 높으면 비대각 행렬이 대각 행렬에 비해 상대적으로 작은 값을 가지게 된다. 또한 실제의 경우 시스템 행렬의 축약이나 확장에 크게 영향을 받는다.

$$COM^{a-x} = [\Psi]^T [M] [\Psi]^x \quad (2)$$

$$MOM = [\Psi]^T [M] [\Psi]^x \quad (3)$$

### 2.2 자유도 상관관계법

#### 2.2.1 Coordinate Modal Assurance Criteria (CoMAC)

CoMAC은 주어진 모드쌍에 대한 MAC 값에 대한 각각의 자유도의 기여도를 나타낸다. 또한 CoMAC 값은 모드 형상의 스케일에 크게 영향을 받으므로 주의해야 한다.

$$CoMAC(j) = \frac{\left( \sum_{i=1}^m \Psi_i^a(j) \cdot \Psi_i^x(j) \right)^2}{\left( \sum_{i=1}^m \Psi_i^a(j) \cdot \Psi_i^a(j) \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^m \Psi_i^x(j) \cdot \Psi_i^x(j) \right)} \quad (4)$$

## 3. 연속체 설계 민감도 (continuum design sensitivity)

고유치나 탄성체의 좌굴 문제는 식 (5)와 같은 에너지 변분식으로 표현할 수 있다.

$$a_u(y, \bar{y}) = \zeta d_u(y, \bar{y}) \quad \text{for all } \bar{y} \in Z \quad (5)$$

이때 고유치  $\zeta$  와 고유 함수  $y$  는 미분 가능하며, 그 변분 결과를 식 (6)과 (7)에 나타내었다.

$$\zeta' = \zeta'(u, \delta u) \equiv \frac{d}{d\tau} [\zeta(u + \tau\delta u)] \Big|_{\tau=0} \quad (6)$$

$$y' = y'(x; u, \delta u) \equiv \frac{d}{d\tau} [y(x; u + \tau\delta u)] \Big|_{\tau=0} \quad (7)$$

주어진 변분 결과를 이용하여 식 (5)의 양변에 변분을 취하면 식 (8)을 얻을 수 있다.

$$a_u(y', \bar{y}) + a'_{\delta u}(y, \bar{y}) = 'd_u(y, \bar{y}) + \zeta d_u(y', \bar{y}) + \zeta d'_{\delta u}(y, \bar{y}) \quad (8)$$

가상 변위  $\bar{y}$ 를  $\bar{y} = y$ 로 하고, bilinear 형태의 대칭성( symmetric )을 이용하면 식 (8)은 식 (9)와 같이 정리된다.

$$\zeta' d_u(y, y) = a'_{\delta u}(y, y) - \zeta d'_{\delta u}(y, y) + [a_u(y, y') - \zeta d_u(y, y')] \quad (9)$$

여기서 고유 벡터의 정규조건( normalizing condition ), 식 (10)을 도입하자.

$$d_u(y, \bar{y}) = 1 \quad (10)$$

결국 식 (10)을 식 (9)에 대입하면 고유치의 설계 민감도식 (11)를 얻을 수 있다.

$$\zeta' = a'_{\delta u}(y, y) - \zeta d'_{\delta u}(y, y) \quad (11)$$

#### 4. 센서의 위치 결정

##### 4.1 센서 위치결정 방법

###### 4.1.1 Visual Inspection (VI)

가장 간단한 방법으로 눈으로 모드 형상을 보고, 높은 변위를 갖는 곳을 센서 위치로 선택한다.

###### 4.1.2 Guyan Reduction ratio (GR)

센서위치의 후보 자유도(candidate DOF)에 대해 Guyan 축약된 질량 행렬과 강성 행렬의 비를 계산한다.

$$GR = K_u / M_u \quad (12)$$

GR의 값이 큰 것을 차례로 줄여 나간다.

###### 4.1.3 Modal Kinetic Energy (MKE)

주어진 관심 모달 행렬에 대해서 MKE는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$MKE = \Psi_m \otimes M \Psi_m \quad (13)$$

여기서,  $\otimes$ 는 요소와 요소의 곱이다. 모든 관심 모드에서 큰 운동에너지를 갖는 후보 자유도를 센서위치로 선정하는 것이다. Average Modal Kinetic Energy (AMKE)는 MKE의 행을 평균한 것이다.

###### 4.1.4 Driving Point Residue (DPR)

$$DPR = \Psi_m \otimes \Psi_m \Omega_m \quad (14)$$

여기서  $\Omega_m$ 는 관심 주파수의 mm 행렬이다. 센서 위치는 DPR값이 큰 곳을 선택한다. Average Driving Point Residue (ADPR)도 AMKE와 마찬가지로 행을 평균한 것이다.

##### 4.2 적합도 판정

실제로 이런 방법에 의해 결정된 것은 완전히 정확하지 않다. 왜냐하면, 초기 생성된 유한 요소 모델이

실제 모델과 차이가 있기 때문이다. 그렇지만 이런 방법들을 이용해서 결정된 것과 실험자의 경험이 합쳐진다면 보다 정확한 선택을 할 수 있을 것이다. 선택된 센서 위치에 대해서 적당한 적합도를 평가해 볼 필요가 있다. 여러 가지 적합도 방법이 제공되긴 하지만 본 논문에서는 MAC 값과 COM값만 사용하였다. 원래 이 값들은 실험과 해석간의 상관관계를 나타내는 것이지만 여기서는 적합도 판정에 쓰인다. 그렇기 때문에 실험 모드 대신 해석 모드들만을 가지고 계산한다.

## 5. 적용 과정

### 5.1 예비 실험 설계 및 검증

그림 1 과 그림 2는 예비 실험 설계와 상관관계 순서를 나타낸 것이다.

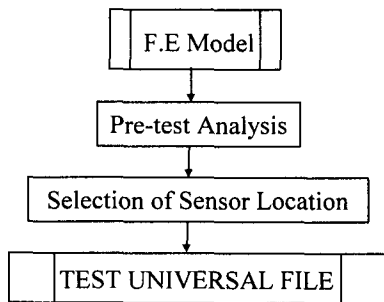


그림 1. 실험 설계 과정

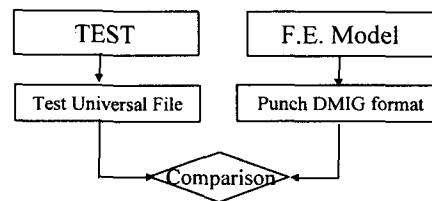


그림 2. 자료 교환 및 비교

그림 1 을 보면 유한 요소 모델로부터 예비 실험을 해석한 후 센서위치를 결정하게 된다. 그런 후 결정된 센서 위치를 Universal File Format(UFF)로 Export시켜 모드 실험 및 해석기인 LMS CADA-X로 보낸다. CADA-X에서는 이 UFF를 Import시켜 실험을 수행한다. 시험 결과를 그림 2 에서 보는 바와 같이 UFF형식으로 다시 Export시켜 준다. 그리고 MSC/NASTRAN의 유한 요소 모델로부터 해석 결과를 얻기 위해 bulk section에 ASET/OMIT 카드에 실험 절점을 집어넣고, 축약된 시스템 행렬을 얻기 위해 DMAP alter가 자동으로 들어간다. 나온 결과는 Direct Matrix Input Generation (DMIG) 형식의 punch 파일로 나온다. Universal File Format는 진동 실험 분야에서는 많이 쓰이는 형식으로 U15는 가속도계 위치, U82는 연결성, U55는 구조 응답 등을 제공한다.

### 5.2 모델 개선

그림 3의 개선 과정을 보면 최적화는 DOT를 이용하고 민감도 계산을 위해서 SENSUP 프로그램을 만들었다.

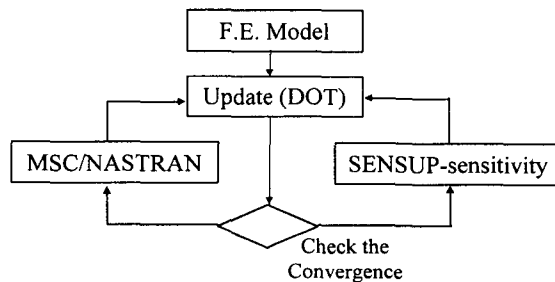


그림 3. 모델 개선 과정

모델 개선은 일반적인 최적 설계문제로 나타낼 수 있는데 목적함수로는 고유주파수의 차의 합으로 표현할 수 있으며 제한조건으로는 총중량을 선택할 수 있다. Side Constraint로는 불확실한 인자의 상/하한 값을 놓을 수 있다. 개선될 인자로는 유한 요소 모델의 스프링 상수, 판의 두께, 보의 경우 너비와 높이이다. 보의 경우 민감도가 보 단면계수(i.e.,  $A$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$ ,  $I_{zy}$ ,  $J$ )에 대해 나오기 때문에 체인 룰을 이용하여 보의 설계 인자에 대해 계산되었다.

## 6. 예제

### 6.1 HDD의 BLDC 스피들 모터

#### 6.1.1 유한 요소 모델

그림 4는 BLDC 모터와 베어링 모델을 나타낸다. 베어링을 모델링 할 때 각 볼을 스프링 요소 2개를 가지고 모델링 했는데 하나는 반경반향 다른 하나는 축방향으로 물성치를 주었다.

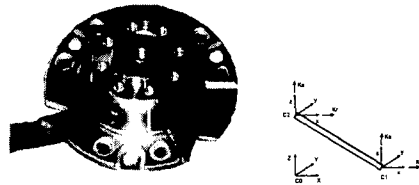


그림 4. BLDC 스피들 모터 모델

#### 6.1.2 모드 해석

모드의 유한요소 해석 결과는 그림 5와 같다.



1차모드(2210 Hz)

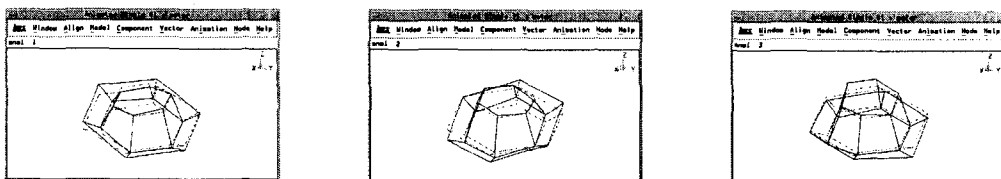
2차모드(2458 Hz)

3차모드(3772 Hz)

그림 5. BLDC 모터 해석 결과

#### 6.1.3 모드 실험

모드 실험을 수행한 결과는 그림 6과 같다.



1차모드(2308 Hz)

2차모드(2767 Hz)

3차모드(3732 Hz)

그림 6. BLDC 모터 실험 결과

### 6.1.4 Correlation

표 1에는 이 모터의 상관관계를 나타내었고 그림 7에는 CoMAC값을 나타내었다. MAC값은 비교적 좋게 나오나 고유주파수의 오차가 10%를 넘어 만족스럽지 못하다.

표 1. Comparison

Mode No	FEM	EMA	error (%)	MAC(%)
1	2210	2308	4.4343	0.962949
2	2458	2767	12.6525	0.908920
3	3772	3732	1.0604	0.754565

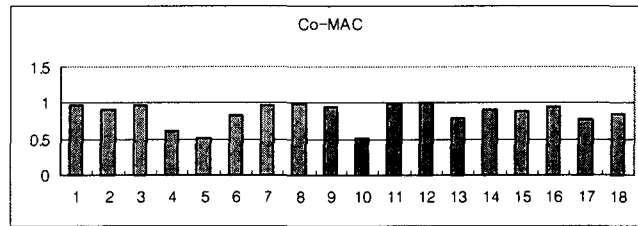


그림 7. CoMAC correlation

### 6.1.5 모델 개선

고유 주파수의 차이에 가장 크게 영향을 미치는 것은 스프링 요소의 상수 값이다. 따라서 스프링 상수를 파라미터로 선택하여 모델 개선을 수행한다. 스프링 물성치는 크게 4부분으로 나누어져 있어 표 2에 그 초기 값과 개선 후의 최종 파라미터 값을 나타낸다. 표 3을 보면 개선후의 오차는 상당히 줄어 든 것을 볼 수 있으며 MAC 값도 그대로 유지되는 것을 확인 할 수 있다.

표 2. Parameter value

Part	xl	X initial	xu	X final
1	4.00E+06	6.50E+06	6.00E+08	1.4768E+07
2	4.00E+05	6.50E+06	6.00E+08	6.6375E+06
3	6.00E+06	6.50E+06	8.30E+07	1.4988E+07
4	5.00E+06	6.50E+06	6.40E+06	6.4000E+06

표 3. 개선후의 Correlation

Mode No	FEM	EMA	Error (%)	MAC(%)
1	2321	2308	0.56326	0.946828
2	2596	2767	6.1755	0.902981
3	3813	3732	2.17042	0.751769

## 6.2 Upper Housing of Induction Motor

### 6.2.1 유한 요소 모델

유도 모터의 상부 하우징은 그림 8과 같이 모델링 되었으며 리브 파트는 CBAR 요소를 사용하여 강성을 주게

하였다.

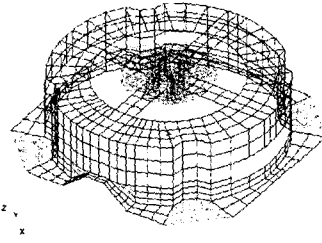
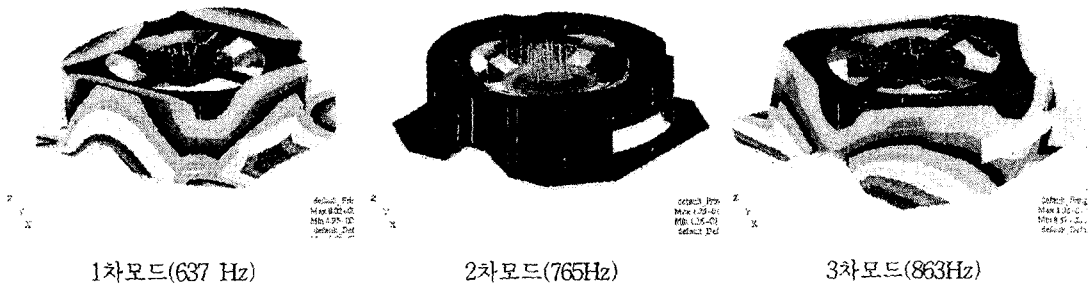


그림 8. 상부 하우징의 유한요소 모델

### 6.2.2 모드 해석

모드 해석결과를 보면 그림 9와 같이 첫째 모드와 셋째 모드는 판에서 일어나고 둘째 모드는 축방향으로 움직이는 것을 알 수 있다.



1차모드(637 Hz)

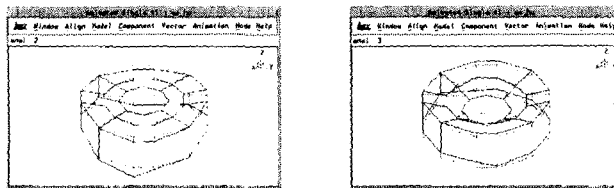
2차모드(765Hz)

3차모드(863Hz)

그림 9. 상부하우징 해석 결과

### 6.2.3 모드 실험

모드 실험 결과를 보면 그림 10과 같다. 해석과 비교했을 때 2번째 모드와 3번째 모드가 바뀐 것을 확인 할 수 있다.



2차모드(865Hz)

3차모드(937Hz)

그림 10. 상부하우징 모드 실험 결과

### 6.2.4 Correlation

표 4에서 상관 관계를 보면 MAC 값은 2번째 모드와 3번째 모드가 바뀌었기 때문에 대각 행렬이 0에 가깝고 비대각 행렬이 1에 근접한다. 그림 11의 CoMAC 값을 보면 저차 절점에서 거의 상관성을 보여 주지 못하고 있다.

표 4. MAC correlation

PostTest MAC	FSET Mode 1	FSET Mode 2	FSET Mode 3
TEST Mode 1	0.94408836411750330000	0.00194316000551293670	0.00013445422764404860
TEST Mode 2	0.00110305357504196660	0.00031087909405394819	0.85213582969223345000
TEST Mode 3	0.00990607823898543950	0.80996132029397205000	0.00005573899479820838

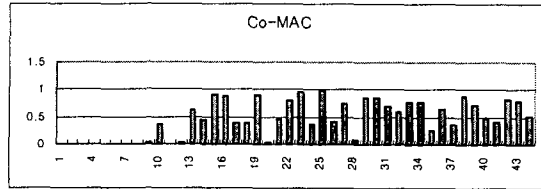


그림 11. CoMAC correlation

6.2.5 모델 개선

이 모델에 대해서 2번째 모드가 3번째 모드로 가기 위해서는 리브 파트의 강성이 추가 되어야 한다. 표 5는 보 요소의 초기 값과 모델 개선 후 최종 값을 나타내고 표 6은 개선 후 상관관계를 나타낸다. MAC 값은 대각행렬로 나오고 그림 12에서 보여지듯이 CoMAC 값도 저차 절점에서 많은 상관관계를 나타낸다.

표 5. CBAR 요소의 물성치

	xi	X initial	xu	X final
B1 [m]	0.000001	0.0001	1	0.001099
H1 [m]	0.000001	0.0001	1	0.001099
B2 [m]	0.000001	0.0001	1	0.000100052
H2 [m]	0.000001	0.0001	1	0.000100052

표 6. 개선 후의 Correlation

Mode No	FEM	EMA	error (%)	MAC(%)
1	674	673	0.14	0.955897
2	863	765	12.8	0.852426
3	909	863	5.33	0.802957

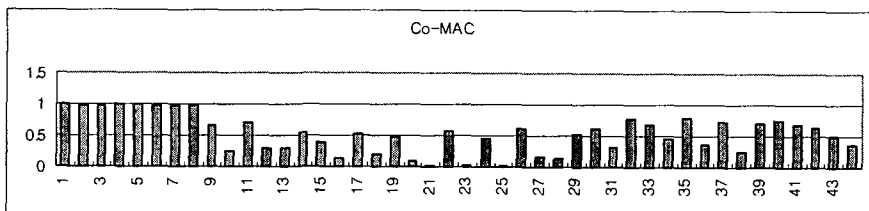


그림 12. CoMAC correlation

6.3 Square Plate

6.3.1 유한 요소 모델 해석 결과



사각 평판을 169개의 절점과 144개의 셀 요소로 모델링한 후 해석결과는 그림 13과 같다.

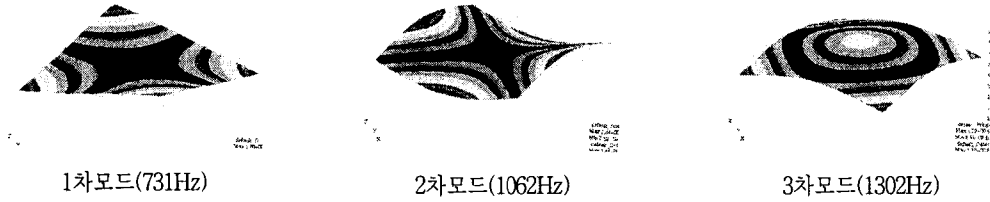


그림 13. 사각 평판 모드 해석 결과

### 6.3.2 센서 위치 결정

VI에 의한 센서 위치 결정은 그림 14와 같이 처음에 25개를 선택해보고 다음으로 9개를 선택해 보았는데 표 7과 같이 적합도를 모두 만족하였다. 그리고 AMKE, ADPR, GR ratio에 의한 센서 위치는 그림 15에 도시하였다. 여기서 AMKE, ADPR은 후보 DOF를 전 절점으로 하였고 GR ratio는 그림 14와 같이 25개를 후보 DOF로 하였다. 결과를 보면 비슷하게 8개정도 선택할 수 있다. 표 7에 적합도를 보면 MAC 값은 좋으나 COM값은 3차 모드에 대해 좋지 않은 것을 확인 할 수 있다.

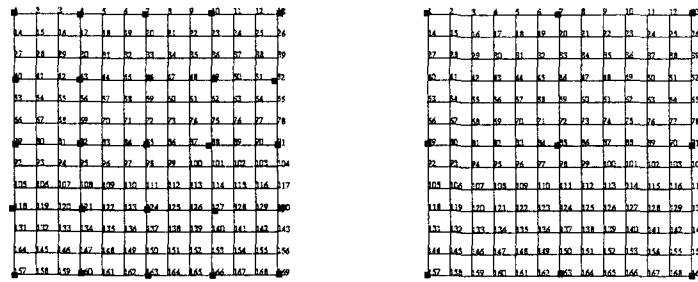
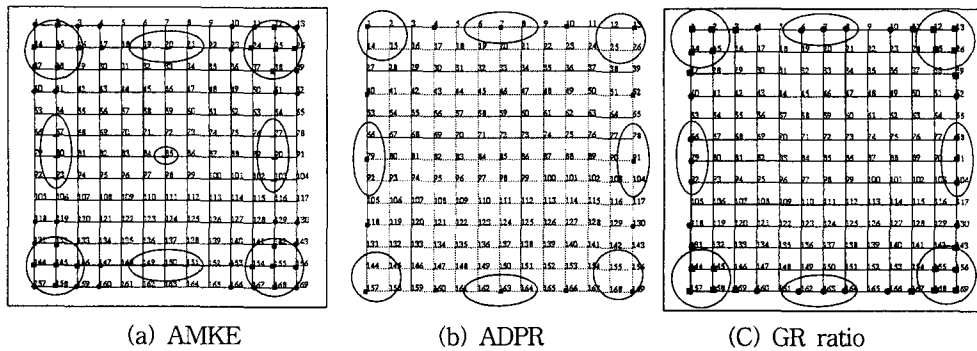


그림 14. VI에 의한 센서 위치 결정



(a) AMKE

(b) ADPR

(c) GR ratio

그림 15. 센서 위치 결정

표 7. 적합도 판정

Mode	25 pts		9 pts		8 pts	
	MAC	COM	MAC	COM	MAC	COM
1	0.999	1	0.999	1	0.999	1
2	0.999	1	0.999	0.999	0.999	0.999
3	0.999	0.999	0.999	0.999	0.927	0.616

## 7. 결론

본 연구에서는 예비 실험과 검증을 위한 프로그램을 개발하였고 또한 개선 프로그램을 연속체 민감도를 사용하여 개발하였다. 개발된 프로그램을 이용하여 실제 모드 실험을 하고 유한 요소 모델을 개선하는데 적용해 보았다. 본 프로그램을 이용하여 유한 요소 모델의 검증 시간을 단축시킬 수 있었고 개선된 모델을 얻을 수 있었다.

## 후 기

이 논문은 1999년도 두뇌한국21 사업에 의하여 지원되었음.

## 참 고 문 헌

- (1) M. I. Friswell and J. E. Mottreshead. Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, Kluwer Academic Publishers, 1995
- (2) 1991M. Imregun and W. J. Visser A review of model updating Techniques, Shock and Vibration Digest Vol. 23(10), pp. 9-20,
- (3) J. E. Mottershead and M. I. Frishwell Model updating in structural dynamics: a survey, Journal of Sound and Vibration, Vol 167(2), pp.347-375, 1993
- (4) M. Brughmans, K. Wyckaert MSC/NASTRAN Solution 200, Tightly Integrated to the test environment within LMS LINK: A Power Approach to Dynamic Analysis and Test Integration, Proc. 16th IMAC, pp. 26-29, 1998
- (5) S. M. wang, K. K. Choi and H. T. Kulkani, Application of Continuum Sensitivity Analysis and Optimization to Automobile Structures, IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical System, Kluwer Academic Publishers, pp. 317-324, 1996
- (6) DOT Users Manual, Ver 4.20, Vanderplaats Research & Development, Inc., 1995.
- (7) D. Bella and M. Reymond MSC/NASTRAN DMAP Modulus Dictionary