

## Damage Tensor를 이용한 손상된 암반구조체의 거동해석

### Global Behavior Analyses of Rock Mass Structures with Defects Using Damage Tensor

이 상 호\*      이 형 기\*\*      허 용 학\*\*\*      김 재 철\*\*\*\*  
Lee, Sang-Ho    Lee, Hyung-Gi    Huh, Yong-Hak    Kim, Jae-Cheol

#### Abstract

The objective of this study is to develop a damage model based on damage mechanics that can be used to analyze the mechanical behavior of structures with defects and the global behavior of damaged structures. A modified second order damage tensor that can be applied to finite element analysis is used to reflect the effect of damage. The damage stress computed from the effective stress is considered as an additional loading term acting on nodes and can represent the effect of crack surface. The accuracy of the proposed algorithm is verified by comparing the analysis results with the experimental data from other studies and the analysis results based on transverse isotropic theory. The developed damage model is applied to the analyses of structures with cracks under linear elastic condition. Numerical results show that the developed model can effectively analyze the global behavior of damaged structures.

#### 1. 서    론

암반구조에 균열이 발생한 경우에는 그 구조물의 부피 변화와 관련하여 결함에 의한 불연속면의 영향을 고려해야 한다. 그러나 결함을 지닌 암반구조체의 경우 복잡한 불연속구조를 지니고 있어 연속체로 보기 어려울 뿐만 아니라 지하구조체의 경우 균열면의 영향을 고려해 주어야 하기 때문에 암반구조체의 수치해석모델은 여전히 풀기 어려운 문제중의 하나로 인식되고 있다.

이와 같은 불연속한 구조체를 효과적으로 해석하기 위한 방법으로 손상역학을 이용할 수 있다. 손상역학은 Kachanov<sup>1)</sup>가 금속의 크리프 파손을 모형화하면서 작용하는 하중으로 인해 발생한 균열이나 결함으로 인하여 하중에 저항하는 재료의 면적이 감소하기 때문에 실제로 재료가 받는 유효응력은 그 만큼 증가한다는 유효응력개념을 제안하면서 시작되었다. 이 후, Rabotnov<sup>2)</sup>는 Kachanov의 이론에 수정을 가하여 유효응력개념을 체계화하였다. 그러나, Kachanov와 Rabotnov의 기본개념을 다축의 손상상태로 일반화시키기 위해서는 손상의 방향특성을 표현하는 벡터형의 손상변수나 텐서형의 손상변수가 필요하게 되었다. 이에 Kachanov<sup>3)</sup>, Murakami와 Ohno<sup>4)</sup>, Betten<sup>5)</sup> 등은 텐서함수를 이용하여 손상의 이방성을 나타내었다. 이러한 손상역학의 개념은 복합재료, 콘크리트, 암반, 일반 금속 등과 같은 여러 분야에서 적용되어 왔으나, 지하구조체에 대한 적용사례는 많지 않은 편이다. Kyoya *et al.*<sup>6)</sup>은 임의로 분포된 불연속면이 있는 암반에 대한 손상역학이론을 제안하였으며, Kawamoto *et al.*<sup>7)</sup>은 손상이론을 도입하여 암반의 변위와 파괴거동을 연구하였다. 또한 Valliappan *et al.*<sup>8)</sup>은 손상텐서의 주 손상값을 이용하여 이방성 손상역학의 탄성구성방정식을 제시

\*    정회원, 연세대학교 토목공학과 조교수

\*\*   정회원, 건일엔지니어링 구조부 사원

\*\*\* 한국표준과학연구원 물질량 표준부 선임연구원, 공학박사

\*\*\*\* 삼주건설(주) 이사

하였으며, Swoboda와 Stumvoll<sup>9)</sup>은 암석의 거시적인 거동해석을 위해서 손상 크리프이론을 이용해 지하구조체에 적용하였다.

본 연구에서는 불연속균에 의한 손상을 지니고 있는 암반구조체의 전체거동을 규명해 보기 위하여 연속체 손상역학의 개념을 바탕으로 수정한 2차 손상텐서를 이용하고 균열면의 영향을 고려하여 구조체의 역학적 거동을 해석할 수 있는 유한요소 손상모델을 개발하였다.

## 2. 이방성 손상이론

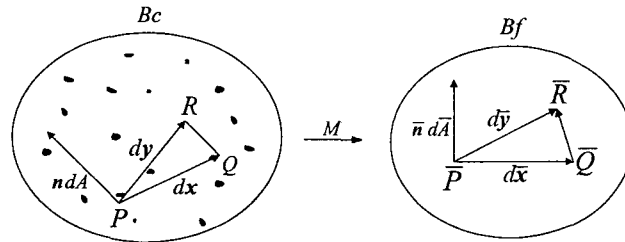
### 2.1 2차손상텐서

이방성을 나타내는 재료에 대한 2차손상텐서를 정의하기 위하여 Murakami와 Ohno<sup>4)</sup>는 현재의 손상된 상태를 가상의 손상되지 않은 상태의 요소로 가정하는 관례로부터 다음과 같이 손상의 이방성을 설명하였다. Fig. 1과 같이 손상된 재료에서 임의의 위치에 있는 면적요소  $\Delta PQR$ 을 선택하고 이 요소를 현재의 손상된 상태 Bc라고 하자. 역학적으로 상태 Bc와 등가인 가상의 손상되지 않은 상태 Bf를 가정하면 순면적  $\Delta PQR$ 은 Bf에서의 등가의 면적인  $\overline{\Delta PQR}$ 로 된다. 또한 Bf의 선요소  $\overline{PQ}$ 와  $\overline{PR}$  및 면적  $\overline{\Delta PQR}$ 은 벡터영역에서 각각  $\overline{dx}$ ,  $\overline{dy}$ ,  $\overline{ndA}$ 가 된다. 공칭면적과 유효저항면적과의 관계식으로부터 상태 Bc의  $ndA$ 와 Bf의  $\overline{ndA}$ 사이의 변형관계를 규정하면 일반적인 손상상태에 대한 손상변수  $D$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\overline{ndA} = (I - D)(ndA) \quad (1)$$

위 식의 2차텐서  $D$ 는 재료의 일반적인 손상상태인 이방성 손상을 나타내는 내부상태변수이며, 현재의 손상된 상태 Bc에 대한 손상텐서로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D = \sum_{i=1}^3 D_i n_i \otimes n_i \quad (2)$$



(a) Current damaged configuration (b) Fictitious undamaged configuration

Fig. 1 Transformation from damaged state to undamaged state

### 2.2 2차손상텐서의 수정

Fig. 2에서처럼 내부 셀 요소의 부피는 균열의 평균 간격으로부터 결정된다.  $v$ 와  $V$ 를 각각 셀요소와 구조체의 부피라 하고, 셀 요소를 동일한 부피를 가진 동등한 입방체라고 하면, 전체유효면적은 다음과 같다.

$$S = 3V^{2/3} \left( \frac{V}{v} \right)^{1/3} = 3 \frac{V}{l} \quad (3)$$

전체부피  $V$ 에  $N$ 개의 균열이 존재하고  $k$ 번째 균열의 면적을  $a^k$ , 단위수직벡터를  $n^k$ 라고 한다면  $k$ 번째 균열에 대해서 균열의 면적밀도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Omega^k = \frac{a^k}{S/3} \quad (4)$$

또한, 이 균열의 손상텐서는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathcal{Q}^k = \frac{l}{V} a^k (\mathbf{n}^k \otimes \mathbf{n}^k) \quad (5)$$

따라서,  $N$ 개의 균열에 대해서, 전체 부피  $V$ 에서의 손상텐서는 다음과 같다.

$$\mathcal{Q} = \frac{l}{V} \sum_{k=1}^N a^k (\mathbf{n}^k \otimes \mathbf{n}^k) \quad (6)$$

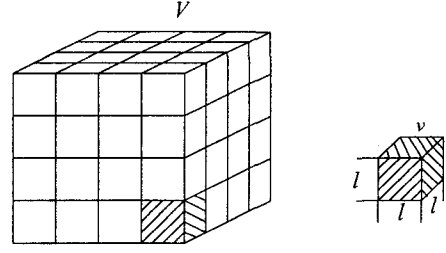


Fig. 2 Intrinsic cell element

### 3. 불연속 구조체의 유한요소 손상모델

#### 3.1 균열면의 성질을 고려한 유효응력

구조체 내부에 존재하는 모든 결합들이 하중에 저항할 수 없게 되어 힘이 결합의 면적에 작용하지 못한다면, 하중에 저항할 수 있는 면적은 감소하게 된다. 이 감소된 면적에 대한 유효응력은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{I} - \mathcal{Q})^{-1} \quad (7)$$

또한 균열면의 성질을 반영하여 손상에 의해 추가된  $\mathcal{Q}$ 의 주축 방향에서의 유효응력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{*'} &= \boldsymbol{\sigma}'_i (\mathbf{I} - C_i \mathcal{Q}')^{-1} \\ &+ \boldsymbol{\sigma}'_n [H \langle \boldsymbol{\sigma}'_n \rangle (\mathbf{I} - \mathcal{Q}')^{-1} + H \langle \boldsymbol{\sigma}'_n \rangle (\mathbf{I} - C_n \mathcal{Q}')^{-1}] \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $\mathcal{Q}'$ 와  $\boldsymbol{\sigma}'$ 는 각각 손상텐서의 대각선텐서와 공칭응력  $\boldsymbol{\sigma}$ 를  $\mathcal{Q}$ 의 주축 방향으로 전환시킨 응력을 의미한다.  $C_i$ 는 균열면에서 전단응력이 미치는 영향을 나타내는 변수로서 0에서 1사이의 값을 가짐으로서 충전상태에 따른 전단저항 상태를 표현할 수 있다. 마찬가지로  $C_n$ 은 균열에 수직인 압축응력이 미치는 영향을 나타내는 변수로서  $C_n = 0$ 이면 충전물이 균열면을 가득 채우는 경우,  $C_n = 1$ 이면 균열면은 충전물에 의해 영향을 받지 않는 것을 의미한다. Step function  $H \langle \cdot \rangle$ 는 균열면에 작용하는 수직응력의 상태를 정의하는 함수로서 압축과 인장상태를 구분하기 위하여 다음과 같이 정의된다.

$$H_{ij} \langle X_{ij} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } X_{ij} > 0 \\ 0 & \text{if } X_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad (i, j; \text{ not summed}) \quad (9)$$

#### 3.2 유한요소 손상모델

유효응력과 공칭응력 사이의 차이를 손상응력 항으로 가정하게 되면 공칭응력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\phi} \quad (10)$$

위 식을 가상일의 원리에 의한 식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega = \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\phi} d\Omega \quad (11)$$

또한 정적손상해석을 위한 선형 계방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^* \quad (12)$$

여기서

$$\mathbf{f}^* = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\phi} d\Omega \quad (13)$$

$f^*$ 는 손상에 의한 영향을 나타내는 것으로서 손상으로 인해 절점에 추가적으로 작용하는 힘을 의미한다. 손상을 지닌 구조체의 전체거동을 해석하기 위해 본 연구에서 개발한 손상해석 알고리즘의 흐름도는 Fig. 3과 같다.

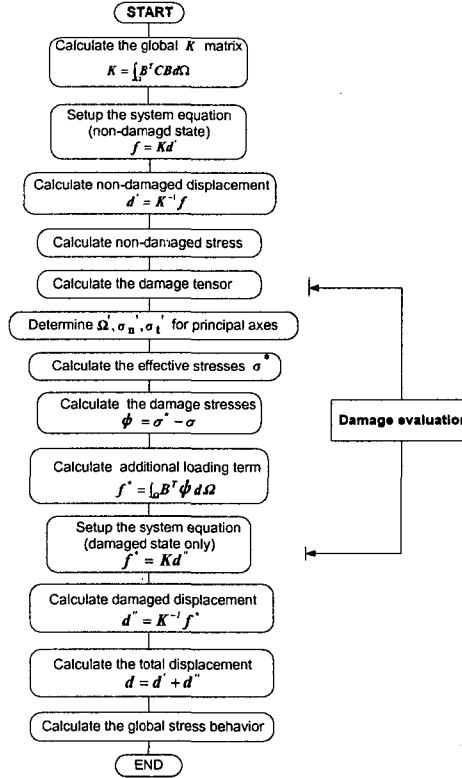


Fig. 3 Flowchart of finite element analysis algorithm for damaged structure

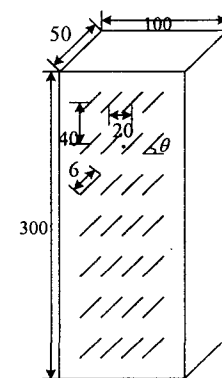
#### 4. 개발된 수치해석모형의 검증

##### 4.1 실험치와의 비교

개발된 손상해석 알고리즘의 정확성을 검증하기 위하여 Kawamoto *et al.*<sup>7)</sup> 이 균열을 지닌 시편의 탄성계수 변화치를 Fig. 4와 같이 plaster mortar와 cement mortar에 대해 실험적으로 구한 결과와 본 연구의 해석결과를 서로 비교·검증하였다. 손상을 받지 않은 상태의 재료물성치는 Table 1과 같다. Fig. 5로부터 두 경우 모두  $C_n$ 이 1일 때 실험치와 해석치가 잘 일치하고 있음을 보이고 있다. 반면  $C_n$ 이 감소함에 따라 즉, 균열내부가 충전물로 채워짐에 따라 정규화된 탄성계수는 증가하는 현상을 보이고 있다.

Table 1 Material properties of specimens

	Plaster mortar	Cement mortar
Elastic modulus $E$ (t/m <sup>2</sup> )	113,190	1,429,650
Poisson's ratio $\nu$	0.17	0.125



Unit: mm

Fig. 4 Specimen under uniaxial loading

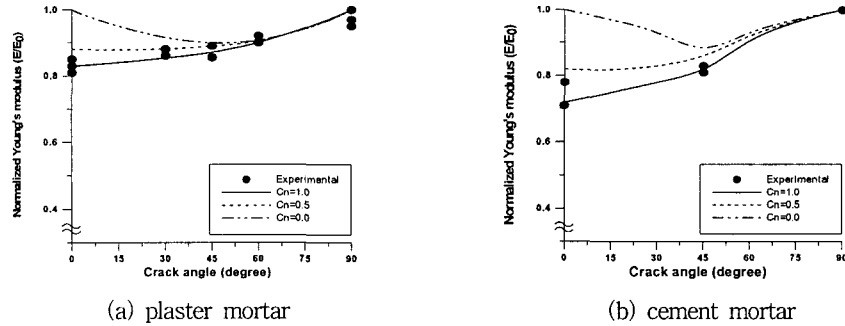


Fig. 5 Comparison of normalized Young's modulus by experiments and damage analysis

4.2 횡등방성 이론에 의한 검증

개발된 손상해석 알고리즘을 검증하기 위한 다른 방법으로서 횡등방성 이론<sup>10)</sup>을 이용한 이론치와 해석에 의한 결과치를 비교·검증하였다. Fig. 6(a)는 압축을 받고 있는 손상된 시편의 형상이며, Fig. 6(b)는 횡등방성 모델을 나타낸다. Fig. 6(b)에서 직교방향의 탄성계수  $E_1$ 과  $E_2$ 의 비는  $n = E_2/E_1$ 로 정의된다. 이때  $n = 1.0$ 은 손상이 없는 등방성 물질을 의미한다.

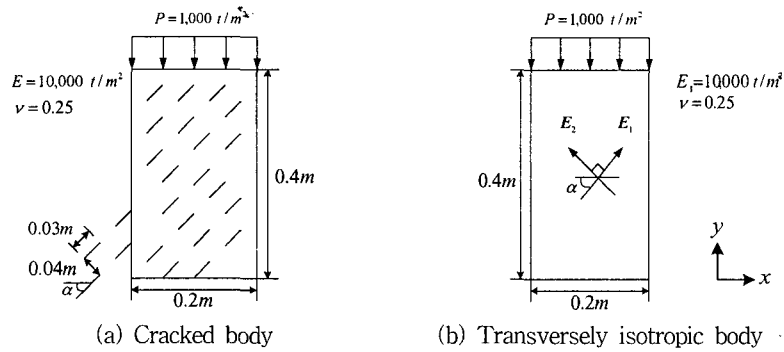


Fig. 6 Cracked body and transversely isotropic body under uniaxial compression

Fig. 7은 손상해석과 횡등방성 이론에 의한  $x$ ,  $y$ 방향의 최대변위를 손상이 없을 때의 최대변위로 정규화한 값을 비교한 것으로, 균열의 각도가  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ 의 경우 각각 횡등방성 이론의  $n = 0.65$ ,  $n = 0.71$  그리고  $n = 0.75 \sim 0.8$ 의 경우와 가까운 값을 나타내고 있어, 손상해석 결과의 분포가 횡등방성 이론과 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

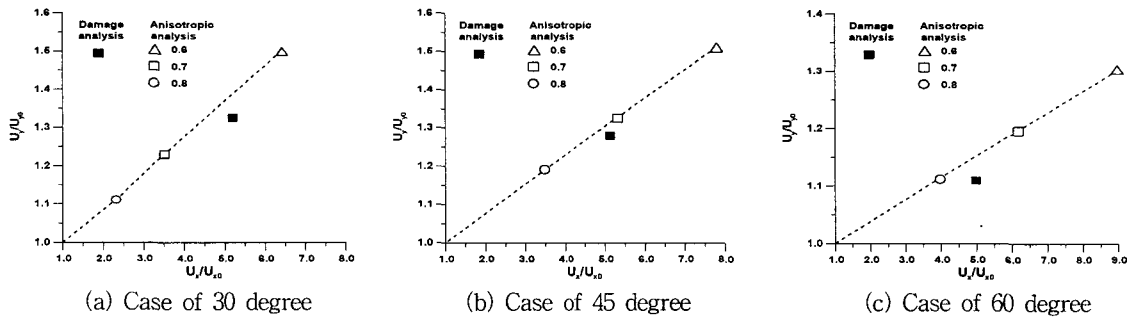


Fig. 7 Comparison of normalized displacements by anisotropic theory and damage analysis

## 5. 암반구조체에의 적용

### 5.1 균열을 지닌 암반의 굴착에 의한 거동분석

본 절에서는 Fig. 8처럼 일정한 간격의 균열을 지닌 암반 해석 대상체를 굴착함으로써 새로이 발생한 불평형력을 고려하여 균열에 의해 손상을 지닌 구조체의 거동을 균열각도와 충전물의 정도에 따라 분석하였다. 균열길이  $l = 2.0\text{ m}$ , 균열간격  $s = 1.4\text{ m}$ 로 설정하였으며 균열면의 영향을 나타내는 변수  $C_t$ 는 1.0 그리고  $C_n$ 은 0.0, 0.5, 1.0의 값에 대해 균열각  $\theta$ 를  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$ 로 변화시키며 암반 굴착면의 거동변화를 분석하였다.

Fig. 9는 굴착면 P의 수평거동형상을 나타낸 것으로, 비손상 상태 즉, 균열이 없는 경우에 비해 존재하는 균열의 방향에 따른 손상에 의한 영향은 크게 달리 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 굴착면의 수평변위는 상단에서부터 계속적으로 증가하여 8m지점에서 가장 큰 변위가 발생하고 굴착하단에서는 다시 감소하는 거동을 보임으로서 전체적으로 비슷한 형상을 띄고 있음을 확인할 수 있으며 균열의 방향이  $45^\circ \sim 60^\circ$ 인 경우에 굴착면의 수평변위가 가장 크게 발생함을 알 수 있다. 충전물의 정도를 기준으로 살펴보면 균열내부가 충전물로 채워진 경우에는 균열의 방향이  $45^\circ$ 일 때 최대변위가 발생한 반면 균열내부가 비어있을 경우에는  $60^\circ$ 에서 최대변위가 발생하였다.

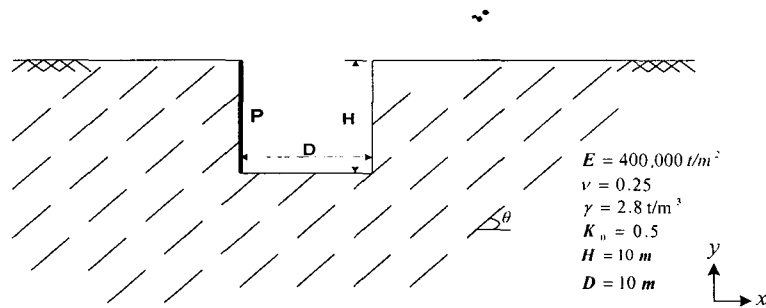


Fig. 8 Rock mass configuration after excavation

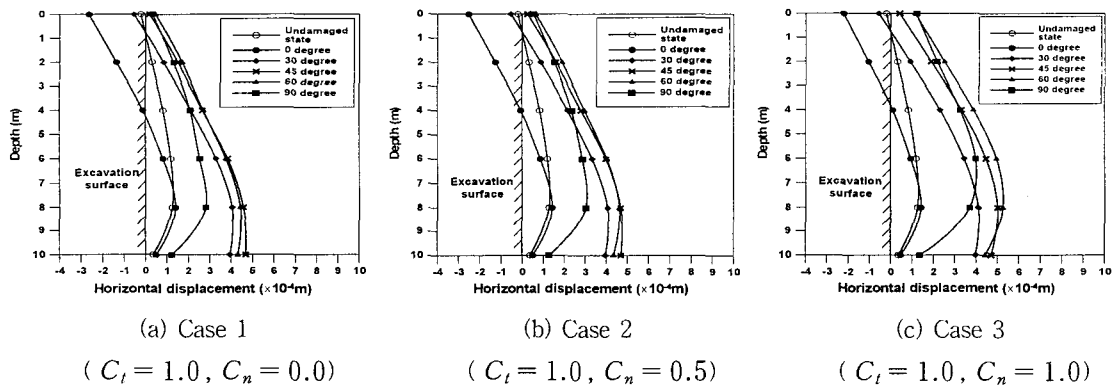


Fig. 9 Horizontal displacements at excavation surface

### 5.2 파쇄대를 지니고 있는 지하구조체의 거동해석

터널공이나 암반굴착을 실시할 때 파쇄대가 존재한다면 구조체의 거동에 미치는 영향은 매우 크기 때문에 본 절에서는 일정한 폭을 가지고 분포하는 파쇄대가 구조체에 미치는 영향을 분석하였다. Fig. 10은 폭 2m

로 70°의 경사각을 이루며 존재하는 파쇄대를 지닌 암반해석 대상체에 마제형 터널을 굴착한 모습을 나타낸다. 본 연구에서는 국부적으로 손상된 파쇄대의 영향을 반영하기 위하여 파쇄대 영역 내부에 일정한 방향을 갖는 균열들을 분포시키고 해석을 수행하였으며 해석시 터널굴착으로 인해 발생한 불평형력을 고려하였다. 이때 파쇄대 영역에 분포시킨 균열들은 균열길이  $l=2.0\text{ m}$ , 균열간격  $s=0.6\text{ m}$ , 균열각도는 60°로 배치된 것으로 가정하였다. 균열면의 성질을 나타내는 변수  $C_l$ 와  $C_n$ 은 각각 1.0으로 가정하였다.

Fig. 11은 손상 상태와 비손상 상태에서의 터널 라이닝의 변형 형상을 비교하여 나타낸 것이다. Fig. 12는 파쇄대가 존재하지 않는 비손상 상태에서의 주응력과 파쇄대의 영향을 고려한 손상상태에서의 주응력을 도시한 것이다. 비손상 상태의 경우 주응력의 분포는 좌우 대칭형상을 보이고 있으나 손상상태의 경우 파쇄대가 위치하는 면을 따라 응력이 집중되어 있음을 확인할 수 있다.

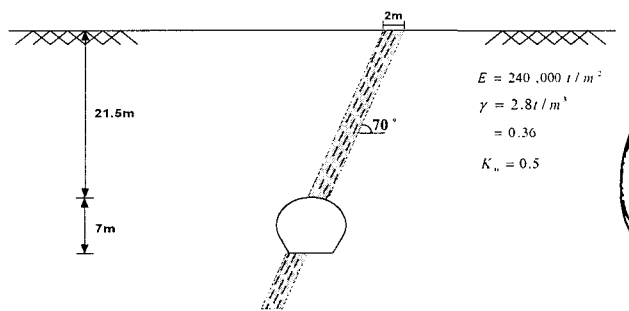


Fig. 10 Underground structure with fault zone

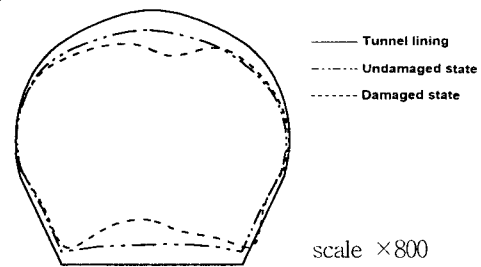


Fig. 11 Deformed shapes of tunnel lining

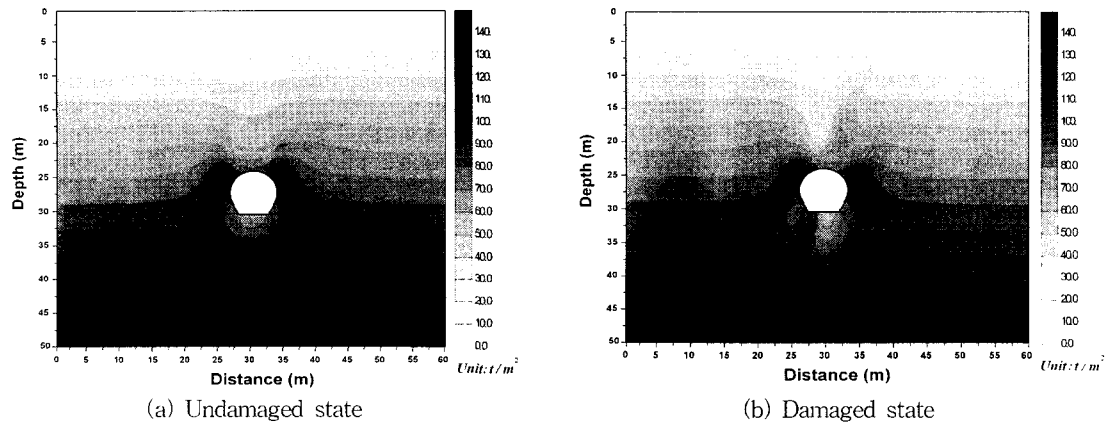


Fig. 12 Comparison of principal stress distribution in undamaged and damaged states

## 6. 결론

본 연구에서는 손상을 입은 구조체의 손상정도를 정량화하기 위하여 유한요소법에 적용가능한 수정된 2차 손상텐서를 이용하여 결함을 지닌 구조체의 전체적인 거동을 파악할 수 있는 손상해석 알고리즘을 개발하였다. 개발된 알고리즘의 정확성을 실험치 및 행동방성 이론에 의한 결과치와 비교·검토하여 그 정확성을 입증하고 손상을 지닌 구조체 문제에 적용하여 손상에 따른 구조물의 거동변화를 파악해 본 결과, 본 연

구에서 개발된 알고리즘은 균열의 방향성 그리고 균열면의 영향을 고려할 필요가 있는 손상된 구조체의 전체적인 거동을 합리적으로 파악할 수 있는 수단으로 이용될 수 있음을 확인하였다.

## 감사의 글

본 연구는 한국표준과학연구원 시설안전계측센터와 삼주건설(주)의 부분적인 지원을 받아 이루어졌으며, 이에 감사를 드립니다.

## 참고 문헌

1. Kachanov, L.M., *The Theory of Creep*, English translation (A. J. Kennedy Ed.), Ch. IX, X, National Lending Library, Boston, 1958.
2. Rabotnov, Y.N., *Creep Problems of Structural Members*, North-Holland, Amsterdam, 1969.
3. Kachanov, L.M., "Continuum model of medium with cracks", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 107, 1980, pp. 1039-1051.
4. Murakami, S. and Ohno, N., "A continuum theory of creep and creep damage", *Creep in Structures*, Springer, Berlin, 1980, pp. 422-444.
5. Betten, J., "Applications of tensor functions to the formulation of constitutive equations involving damage and initial anisotropy", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 25, 1986, pp. 573-584.
6. Kyoya T., Ichikawa, Y. and Kawamoto, "A damage mechanics theory for discontinuous rock mass", *Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, 1985, pp. 469-480.
7. Kawamoto T., Ichikawa, Y. and Kyoya, T., "Deformation and fracturing behavior of discontinuous rock mass and damage mechanics theory", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 12, 1988, pp. 1-30.
8. Villiappan, S., Murti, V. and Zhang, W., "Finite element analysis of anisotropic damage mechanics problems", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 35, 1990, pp. 1061-1071.
9. Swoboda, G. and Stumvoll, M., "Damage tensor theory and its application to tunnelling", *Mechanics of Jointed and Faulted Rock*, 1990, pp. 51-58.
10. Zienkiewicz, O.C. and Talyor, R.L., *The Finite Element Method*, McGRAW-HILL, London, 1989.