

## 전단변형이 양단고정 변단면 기둥의 좌굴하중에 미치는 영향

### Effects of Shear Deformations on Buckling Loads of Tapered Columns with Both Clamped Ends

이 병 구\* · 이 태 은\*\* · 안 대 순\*\*

Byoung Koo Lee · Tae Eun Lee · Dae Soon Ahn

---

#### ABSTRACT

The nondimensional differential equations governing the buckling loads of tapered columns with both clamped ends and its boundary conditions are derived, in which the effects of shear deformations are included. These equations are solved numerically using a numerical integration technique and a bracketing method to obtain the buckling loads of columns.

Four types of cross-sectional shape are considered in the numerical examples. The parametric studies of shear deformation effects on the buckling loads such as cross-sectional shape factor, shear coefficient, ratio of modulus of elasticity, slenderness ratio and section ratio are reported in tables and figures.

---

#### 1. 서 론

기둥은 보와 더불어 구조공학 분야에서 가장 기본이 되는 부재단위이다. 구조물의 단면을 변단면으로 하는 경우에 재료가 절약되는 경제적 잇점이 있고 미적감각 또는 시공상의 이유 등으로 변단면 구조를 더욱 많이 이용할 전망이다.

구조물에서 전단변형 효과는 작용하중에 의한 구조물의 변위를 증가시키는 요인으로 작용하므로 구조해석시에 전단변형 효과를 고려하는 것이 구조안정상 더 좋다. 또한 기둥의 좌굴하중 등과 같이 구조물의 하중능력을 산정할 때에 전단변형 효과를 고려하면 구조물의 하중능력은 현저하게 감소될 수 있다.<sup>(1)</sup>

최근 재료역학의 발달로 여러 가지 새로운 구조재료가 개발되어 구조물에 이용되고 있으므로 구조해석에서 전단변형 효과를 고려하는 것이 바람직하다.

기둥의 좌굴하중에 관한 연구는 많은 문헌들<sup>(2-6)</sup>에 발표되고 있으며, 이 중에서 전단변형을 고려한 기둥의 좌굴하중에 관한 문헌을 고찰하면 다음과 같다. Bleich 등<sup>(3)</sup>은 전단변형을 고려하여 기둥의 좌굴형을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 고유치문제로 해석하여 좌굴하중을 산정하였다. Timoshenko 등<sup>(4)</sup>은 전

---

\* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

\*\* 원광대학교 대학원

단변형을 고려하여 일단고정 타단자유인 기둥의 좌굴하중을 Energy method로 산출하였다. Chen 등<sup>(5)</sup>은 단면깊이 지간길이비가 매우 큰 기둥에 대해서는 수직응력에 비하여 전단응력이 매우 작다는 일반적인 이론에 따라서 기둥의 해석에서 전단변형 효과는 무시할 만 하다고 하였다. Sheinman 등<sup>(6)</sup>은 전단변형을 고려한 적층판으로 된 기둥의 후좌굴거동에 관하여 연구하였다. 이 논문에서 후좌굴기둥의 좌굴형태를 정현곡선으로 가정하여 미분방정식을 유도하고 하중과 처짐의 관계를 그림에 나타내었다.

본 연구에서는 변단면 기둥의 좌굴하중 산정시 전단변형효과를 고려하므로서 전단변형효과의 제요인들이 좌굴하중에 미치는 영향을 분석하는 데 연구목적이 있다.

이 연구에서 기본가정은 다음과 같다.

- 1) 기둥은 선형탄성 이상기둥이다.
- 2) 기둥의 축은 비압축성이다.
- 3) 좌굴하중은 분기하중으로 정의한다.

## 2. 기둥의 변단면

본 연구에서 기둥의 변단면은 일반적으로 널리 이용되고 있는 선형단면을 채택하였다. 그림.1은 기둥길이  $l$  이고, 기둥의 고정단의 단면적과 단면2차모멘트가 각각  $A_c$ ,  $I_c$ 이며 기둥의 중앙 부분은 직선적으로 변화하는 선형변단면을 나타내고 있다. 기둥의 좌측 고정단으로 부터 도심축을 따라서 측정된 기둥의 임의점  $s$ 에서 단면적  $A$  및 단면2차모멘트  $I$ 는 다음과 같다.<sup>(7)</sup>

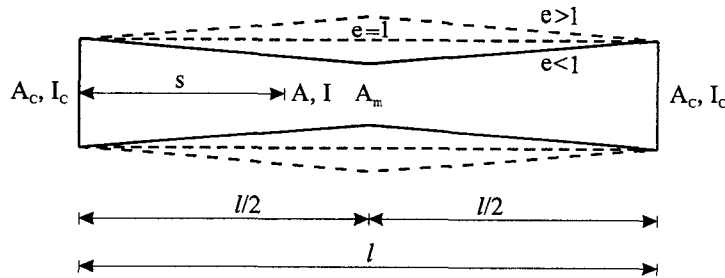


그림 1. 본 연구에서 변단면의 정의

$$A = A_c [1 + 2(e^{1/m} - 1)s/l]^m, \quad 0 \leq s \leq l/2 \quad (1)$$

$$I = I_c [1 + 2(e^{1/m} - 1)s/l]^n, \quad 0 \leq s \leq l/2 \quad (2)$$

여기서,

$$e = A_m/A_c \quad (3)$$

위의 (3)식에서  $A_m$ 은 그림 1에서와 같이 기둥 중앙의 단면적이다. 따라서  $e$ 는 고정단에 대한 기둥 중앙의 단면적비이며 단면비로 정의한다. 또한  $m, n$ 은 기둥의 단면상태에 따라서 결정되는 단면형상계수이며 본 연구에서는 다음의 3가지 단면형상계수 값들을 이용한다.

- (1) 변화폭 구형단면 :  $m=1, n=1$  (4.1,4.2)
- (2) 변화높이 구형단면 :  $m=1, n=3$  (5.1,5.2)
- (3) 정방형 단면 또는 원형단면 :  $m=2, n=4$  (6.1,6.2)

### 3. 미분방정식 유도

그림. 2와 같이 양단이 고정지지 되어있고 길이가  $l$ 인 기둥에 축하중  $P$ 가 작용하고 있다. 이 기둥은 좌굴하중  $B$ 보다 작은 하중을 받으면 점선과 같이 직선상태를 유지하나 좌굴하중보다 큰 하중을 받으면 좌굴하여 실선과 같은 정확탄성곡선(elastica)을 이루게 된다. 후좌굴 기둥의 고정단에는 수직반력  $P$ 와 반력모멘트  $M_c$ 가 작용하며, 기둥의 축은 비압축성이므로 정확탄성곡선에서의 길이는 기둥의 길이  $l$ 과 같다. 기둥의 좌측 고정단으로부터 축방향을 따라서 측정된 거리  $s$ 에서 제변수는  $(s, x, y, \theta, A, I, M, Q)$ 이다. 여기서,  $(x, y)$ 는 정확탄성곡선을 정의해 주는 직교좌표계,  $\theta$ 는 단면회전각,  $A$ 는 단면적,  $I$ 는 단면 2차모멘트,  $M$ 은 휨모멘트,  $Q$ 는 전단력이다. 전단변형을 고려한 3차이론에 의한 기둥축상의 제변수  $(s, x, y, \theta, A, I, M, Q)$ 사이의 관계식은 다음과 같다.<sup>(8)</sup>

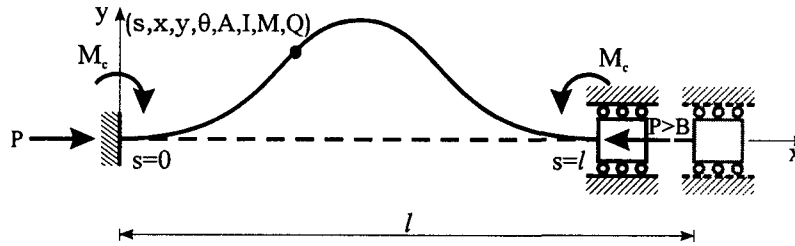


그림 2. 좌굴된 기둥의 제변수

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI} + \frac{\alpha}{GA} \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (7-9)$$

(7)식에서  $\alpha/GA \cdot dQ/dx$ 항이 전단변형의 항이며,  $E, G$ 는 각각 기둥재료의 탄성계수 및 전단탄성계수를 나타낸다.  $\alpha$ 는 단면형상에 따라 결정되는 전단계수이며 구형단면과 원형단면에 대한 전단계수  $\alpha$ 값은 다음과 같다.<sup>(9)</sup>

$$\text{구형단면 : } \alpha=1.2 \quad (10.1)$$

$$\text{원형단면 : } \alpha=1.11 \quad (10.2)$$

(7)식의 미분방정식을 양단고정인 변단면 기둥에 적용시키기 위하여 그림. 2에서 기둥축상의 임의거리  $s$ 에서 휨모멘트  $M$ 과 전단력  $Q$ 를 구하면 다음과 같다.

$$M = -M_c + Py, \quad Q = P \sin \theta \quad (11,12)$$

또한, (8)식과 (12)식을 이용하여  $dQ/dx$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{dQ}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} = P \frac{d\theta}{ds} \quad (13)$$

미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\lambda = s/l, \quad \xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \Gamma = G/E, \quad \kappa = l/(I_c/A_c)^{1/2} \quad (14-18)$$

윗 식에서  $(\lambda, \xi, \eta)$ 는  $(s, x, y)$ 를 기둥길이  $l$ 로 정규화 시킨 것이며  $\Gamma$ 는  $E$ 에 대한  $G$ 의 탄성계수비,  $\kappa$ 는 기둥의 고정단부를 기준으로 한 세장비이다. 또한 압축하중  $P$ , 반력모멘트  $M_c$ 와 휨모멘트  $M$ 을 다음과 같이 무차원화하여 무차원 하중변수로 이용한다.

$$p = P l^2 / \pi^2 EI_c, \quad m_c = M_c l / \pi^2 EI_c, \quad m_\xi = -(M_c + Py) l / \pi^2 EI_c = -m_c + p\eta \quad (19-21)$$

이제 (7)식에서 (1), (2)식 및 (11), (13)식을 대입하고 무차원 변수 (14)-(20)식을 이용하여 정리하면 (22)식의 무차원 미분방정식을 얻을 수 있다. 또한 (8), (9)식은 (14)~(16)식을 이용하면 (23), (24)식의 무차원 미분방정식으로 유도된다.

$$\frac{dQ}{d\lambda} = \frac{\pi^2(m_c - p\eta)}{[1 + 2(e^{1/m} - 1)\lambda]^n} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\Gamma \kappa^2} \frac{\pi^2 p}{[1 + 2(e^{1/m} - 1)\lambda]^m} \right\}^{-1}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1/2 \quad (22)$$

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \cos \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 1/2 \quad (23)$$

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = \sin \theta, \quad 0 \leq \lambda \leq 1/2 \quad (24)$$

단면이 등단면( $e=1$ )이면 (22)식의 미분방정식은  $d\theta/d\lambda = \pi^2(m_c - p\eta)(1 - \alpha \pi^2 p / \Gamma \kappa^2)^{-1}$ 로 간단해지고, 단면형상계수  $m, n$ 은 기둥의 후좌굴 거동에 영향을 미치지 못한다. 또한 전단변형항을 무시하면 (22)식의 미분방정식은  $d\theta/d\lambda = \pi^2(m_c - p\eta) / [1 + 2(e^{1/m} - 1)\lambda]^n$ 으로 간단해진다. 좌측고정단 ( $s=0$ )에서  $x=y=\theta=0$ 이므로 (14)-(16)식의 무차원 변수를 이용하면 다음의 무차원 경계조건이 유도된다.

$$\xi = 0, \quad \lambda = 0 \text{에서} \quad (25)$$

$$\eta = 0, \quad \lambda = 0 \text{에서} \quad (26)$$

$$\theta = 0, \quad \lambda = 0 \text{에서} \quad (27)$$

기둥의 중앙( $s=l/2$ )에서 회전각  $\theta=0$  이므로 (14)식을 이용하면 다음의 무차원 경계조건이 얻어진다.

$$\theta = 0, \quad \lambda = 1/2 \text{에서} \quad (28)$$

이상에서 양단고정인 변단면 기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식은 (22)-(24)식과 같고, 고정단의 경계조건은 (25)-(27)식, 기둥 중앙의 경계조건은 (28)식과 같다.

#### 4. 수치해석 방법

이상에서 유도한 미분방정식과 경계조건을 이용하면 변단면 기둥의 좌굴하중을 얻을 수 있다. 좌굴하중은 서론에서 언급한 바와 같이 분기하중으로 정의하였으며 기둥 고정단에 반력모멘트  $M_c$ 가 야기되는 순간의 하중이 좌굴하중이 된다. 이 좌굴하중은 고정단의  $M_c$ 값을 충분히 작게 취하므로서 산정할 수 있다. 본 연구에서 무차원 좌굴하중  $b$ 는 (19)식에 의하여 다음과 같이 정의되며  $B$ 는 기둥의 좌굴하중이다.

$$b = B l^2 / \pi^2 EI_c \quad (29)$$

주어진 기둥의 제원( $m, n, e, \kappa, \alpha, \Gamma$ )에 대한 좌굴하중을 찾는 수치해석 방법을 설명하면 다음과 같다.  $m_c$ 가 충분히 작을 때 무차원 하중  $p$ 가 무차원 좌굴하중  $b$ 가 되므로 (22)식의 미분방정식에  $p=b$ 를 대입하고 정리하면 다음 식과 같이 무차원 좌굴하중  $b$ 를 미지수로 하는 미분방정식이 된다.

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\pi^2(m_c - b\eta)}{[1 + 2(e^{1/m} - 1)\lambda]^n} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\Gamma \kappa^2} \frac{\pi^2 b}{[1 + 2(e^{1/m} - 1)\lambda]^m} \right\}^{-1}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1/2 \quad (30)$$

이제 미분방정식 (30), (23), (24)식과 경계조건 (25)-(27)식을 이용하면 미지수인 좌굴하중  $b$ 를 찾을 수 있다. 이를 위하여 미분방정식의 수치해는 Runge-Kutta method<sup>(10)</sup>를 이용하고 미지수인 무차원 좌굴하중  $b$ 값은 bracketing method 중의 하나인 Regula-Falsi method<sup>(11)</sup>를 이용하여 찾았다. 이상의 수치해석 방법을 FORTRAN 77언어로 컴퓨터 프로그램 하였으며, 실행은 제도(graphics)가 지원되는 대우 Work station System을 이용하였다.

#### 5. 수치해석 예 및 고찰

실제의 수치적용 예를 실행하기 전에 수렴해석을 실시하여 무차원 좌굴하중  $b$ 를 산정하기 위한 고정단 반력  $M_c$ 를 산정하여야 한다. 표 1값은  $M_c$ 값을 변화시키면서  $b$ 값을 계산하여  $M_c$ 와  $b$ 사이의 관계를 수록한 수렴해석 결과이다. 이 표에서 처럼  $b$ 값은  $M_c$ 값을  $1 \times 10^{-3}$ 이하가 되도록 함으로서 유효숫자 5자리 정도의 수렴된 무차원 좌굴하중  $b$ 값을 얻을 수 있었다. 본 연구에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여  $M_c = 1 \times 10^{-8}$ 에서의 하중을 무차원 좌굴하중  $b$ 로 계산하였다.

미분방정식 (22)식 또는 (30)식에서 알 수 있듯이 전단변형을 고려한 변단면 기둥의 좌굴하중에서 전단 변형효과는 단면형상( $m, n, \alpha$ ), 탄성계수비  $\Gamma$  및 세장비  $\kappa$ 로 구성되어 있으므로 이들 요소들이 무차원 좌굴하중  $b$ 에 미치는 영향을 분석한다.

표 1.  $M_c$ 와  $b$ 사이의 수렴해석

$M_c$	buckling load parameter, $b$	
	$m=1, n=3, e=0.5,$ $\alpha/\Gamma \kappa^2=0.02$	$m=2, n=4, e=1.5,$ $\alpha/\Gamma \kappa^2=0.03$
$1 \times 10^{-1}$	1.0832	2.4337
$1 \times 10^{-2}$	1.0606	2.4214
$1 \times 10^{-3}$	1.0604	2.4213
$1 \times 10^{-4}$	1.0604	2.4213
$1 \times 10^{-5}$	1.0604	2.4213

먼저 단면형상( $m, n, \alpha$ )가  $b$ 에 미치는 영향을 분석하기 위하여  $b$ 값을 전단변형별로 표 2에 나타내었다. 이 표에서 알 수 있듯이  $e=0.5$ 인 경우의  $b$ 값은 (1, 1, 1.2), (2, 4, 1.11), (2, 4, 1.2), (1, 3, 1.2)의 전단변형 순서로 큰 것을 알 수 있다. 그러나  $e$ 값이 1보다 큰 경우에는 위의 순서와 달라진다(그림 3 참조).

표 2. ( $m, n, \alpha$ )가  $b$ 에 미치는 영향( $\Gamma=0.4, \kappa=100$ )

$m$	$n$	$\alpha$	$b$	
			$e=0.5$	$e=1.5$
1	1	1.2	2.8703	4.8858
1	3	1.2	1.5133	7.4044
2	4	1.2	2.0305	5.9620
2	4	1.11	2.0318	5.9684

세장비  $\kappa$ 가  $b$ 에 미치는 영향을 분석하기 위하여  $\kappa$ 의 변화에 따른  $b$  값을 표 3에 나타내었다. 이 표에서 전단변형 효과를 고려하는 경우에  $\kappa$ 는  $b$ 를 증가시키는 요인이며 세장비  $\kappa$ 가 작은 경우에 그 영향은 비교적 큰 것을 알 수 있다. 즉  $\kappa=30$ 일 때  $b$ 값은  $\kappa=\infty$ 의  $b$ 값과 비교하여 약 8%~12%의 비교적 큰 차이로 감소하였음을 알 수 있다.  $\kappa=\infty$ 이면 전단변형 효과를 무시하는 경우이므로 전단변형효과를 고려하여 좌굴하중을 산정하는 것이 구조설계상 안전측에 든다.

표 3.  $\kappa$ 가  $b$ 에 미치는 영향( $e=0.5, \Gamma=0.4$ )

( $m, n, \alpha$ )	$\kappa$	$b$	effect(%)
$m=1, n=1,$ $\alpha=1.2$	30	2.5562	-12.02
	50	2.7696	-4.67
	100	2.8703	-1.21
	150	2.8897	-0.54
	$\infty$	2.9054	-
$m=2, n=4,$ $\alpha=1.11$	30	1.8783	-8.30
	50	1.9838	-3.15
	100	2.0318	-0.81
	150	2.0409	-0.36
	$\infty$	2.0483	-

앞에서 언급한 바와 같이 전단변형 효과는  $(m, n, \alpha, \Gamma, \kappa)$ 로 구성되어 있으며 이들 요인 중에서  $\alpha, \Gamma, \kappa$ 의 상호작용효과를  $\beta$ 로 정의하면,  $\beta$ 는 다음 식과 같이 표시된다.

$$\beta = \frac{\alpha}{\Gamma \kappa^2} \quad (31)$$

그림. 3은 전단변형효과를 무시한  $\beta=0$ 의 경우와 전단변형효과를 고려한  $\beta=0.003$ 의 경우에 대하여 b-e의 관계를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림에서 e가 클수록 b도 증가함을 알수 있고 e=1에서 세 개의 곡선이 각각 한 점에서 만나 e=1인 등단면인 경우에는 단면형상계수 (m, n)이 무차원 좌굴하중 b에 영향을 미치지 못한다. 또한 e가 클수록  $\beta=0$ 의 점선과  $\beta=0.003$ 의 실선의 두 곡선은 그 차이가 더욱 커지는 것을 알 수 있다.

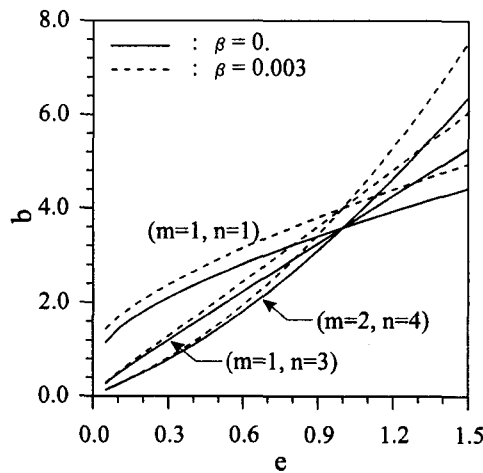


그림 3. e와 b사이의 관계곡선

예로서 그림. 3에서  $(m=2, n=4)$ 인 단면형상에 대하여 몇 개의 e값을 선택하여  $\beta=0$ 와  $\beta=0.003$ 의 b값을 표 4에 나타내었다. 이 표에서  $e=0.5$ 에서  $\beta=0$ 와  $\beta=0.003$ 의 b값의 차이는 -8.08%인데 비하여  $e=1.5$ 에서는 -12.86%를 보이고 있다. 따라서 단면비 e가 클수록 전단변형의 영향은 더욱 크게 나타나고 있다. 더욱이 전단변형효과는 b값을 감소시키는 요인이기 때문에 e가 큰 경우에는 전단변형을 고려하는 것이 구조설계상 더 안전측에 든다.

표 4.  $\beta$ 가 b에 미치는 영향( $m=2, n=4$ )

e	$\beta$	b	effect(%)
0.5	0.	2.0483	-8.08
	0.003	1.8827	
1.0	0.	4.0000	-10.59
	0.003	3.5764	
1.5	0.	6.0498	-12.86
	0.003	5.2717	

## 6. 결 론

이 논문은 전단변형을 고려한 변단면 기둥의 좌굴하중에 관한 연구이다. 이 연구에서 좌굴하중을 지배하는 양단고정인 변단면 기둥의 미분방정식과 경계조건을 유도하였다. 이 미분방정식을 Runge-Kutta method와 Regula-Falsi method를 이용하여 수치해석하고 무차원 좌굴하중을 산출하였다. 또한, 일련의 수치해석 예를 고찰하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 전단변형은 좌굴하중을 감소시키는 요인이므로 전단변형 효과를 고려하는 것이 구조설계상 안전측에 든다.
2. 전단변형을 고려할 때 세장비( $\kappa$ )는 좌굴하중을 증가시키는 요인이며  $\kappa < 50$  일 때 그 영향은 비교적 크다.
3. 전단변형을 고려할 때 단면비( $e$ )가 클수록 좌굴하중에 미치는 영향은 더 크다.
4. 전단변형을 고려할 때 단면형상에 따른 전단변형의 효과는  $e < 1$ 인 경우에는 ( $m=1, n=1$ ), ( $m=2, n=4$ ), ( $m=1, n=3$ )의 순서로,  $e > 1$ 인 경우에는 그 역순으로 좌굴하중에 대한 영향이 크다.

## 참고문헌

1. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. 1961, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, pp. 132-135
2. 이병구 모정만, 1992 동적개념에 의한 변단면 기둥의 좌굴하중, 한국농공학회지, 제34권 제4호, pp. 97-105.
3. Bleich, F. and Bleich, H. H., 1952. Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, pp. 187-188.
4. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. : ibid
5. Chen, W. F. and Atsuta, T., 1977, Theory of Beam-Columns( I ), McGraw-Hill, pp. 101-104.
6. Sheinman, I. and Adam, M., 1987, The Effect of Shear Deformation of Post-Buckling Behavior of Laminated Beams, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.54, pp. 558-562.
7. Gupta, A. K., 1985, Vibration of Tapered Beams, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 11, No. 1, pp.19-36.
8. Theocaris, P. S. and Panayotounakos, D. E., 1982, Exact Solution of the Non-Linear Differential Equation Concerning the Elastic Line of a Straight Rod due to Theminal Loading, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 17, No. 5/6, pp. 395-402.
9. Gere, J. M. and Timoshenko, S. P., 1984, Mechanics of Materials, Brooks/Cole Engineering Division, pp. 660-666.
10. Al-Khafaji, A. W. and Tooley, J. R., 1986, Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston.
11. Maron, M. J., 1982, Numerical Analysis, Macmillan.