

조합하중을 받는 단층 래티스 돔의 안정경계에 관한 연구

A Study on the Stability Boundaries for Single Layer Latticed Domes under Combined Loads

한 상 을* 이 갑 수**
Han, Sang Eul Lee, Kap Soo

ABSTRACT

The smallest value of the load when the equilibrium condition becomes to be unstable is defined as the buckling load. The primary objective of this paper is to analyse stability boundaries for star dome under combined loads and is to investigate the iteration diagram under the independent loading parameter. In numerical procedure of the geometrically nonlinear problems, Arc Length Method and Newton-Raphson iteration method is used to find accurate critical point(bifurcation point and limit point). In this paper independent loading vector is combined as proportional value and star dome was used as numerical analysis model to find stability boundary among load parameters and many other models as multi-star dome and arches were studied. Through this study we can find the type of buckling mode and the value of buckling load.

1. 서 론

구조물의 안정해석에서 외력의 공간분포와 하중의 크기를 나타내는 단일 하중 매개변수(single loading parameter)는 다양하며 평형이 안정을 잃을 때의 하중 매개변수의 최소값이 좌굴하중으로써 정의된다. 그러나 많은 실질적인 문제에서 단일 매개변수로 외력이 표현되는 경우는 매우 드물고, 구조물은 하중의 다양한 조합에 의하여 거동된다. 외력을 표현하기 위해선 다양한 독립적인 매개변수가 필요하며, 좌굴하중을 매개변수에 투영할 때 임계해의 위치를 안정경계라 한다.

하중이 하중경로를 따라가는 동안 불안정현상이 어느 특이점에서 발생하게되고, 하중공간에서 이 임계조합의 위치는 안정경계를 형성하며, 안정과 불안정으로 분리된다. 조합하중을 받는 구조물이 안정을 잃을 때 각기 다른 하중벡터 사이의 관계는 안정경계로 나타낼 수 있다. 스냅스루(snap through)나 분기좌굴과 같은 불안정 문제는 하중의 형태, 크기, 방향, 위치, 초기 구조물의 기하학적 불안전성, 재료 상수, 경계조건과 같은 외적 요소에 따라 달라진다. 이 모든 요소를 분리하여 고려한다면 정확하게 구조물의 거동특성 규명할 수 있다. 본 논문에서는 안정경계를 결정할 때 비례하중을 통해 조합하중을 만들어 전체 하중구성을 하나의 하중 매개변수로 줄여서 비례계수의 변화에 따른 임계점의 위치를 찾았다. 안정경계에 관한 해석알고리즘으로 정확한 임계점(분기점, 극한점)을 찾는 데 유리하고, 임계점 이후에도 다양한 형태의 평형 경로추적이 가능한 호장법(Arc Length Method)을 이용하였다.

* 인하대학교 건축공학과 교수

** (주) 정일구조 컨설턴트

2. 좌굴 판단 기준

안정경제 해석의 목적은 하중 매개변수에 따른 임계점의 위치를 알아내는 것이다. 조합하중을 받는 구조물은 극한점과 분기점의 두가지 임계점이 생기게 된다. 극한점과 분기점의 판단기준은 좌굴하중이 기본 평형곡선 위에 있는 처음의 임계점일 때에만 적용될 수 있다. 임계점의 형태를 확인하기 위해 본 논문에서는 다음과 같은 판정기준을 적용한다

2.1 극한점(Limit point)의 판단 기준
일반적으로 비선형 좌굴해석을 위한 수치계산상에 있어서 구조물의 강성 행렬의 행렬값이 영(零)이 되는 점을 좌굴점으로 간주한다. 그림 1에서 호장법에 의한 평형경로의 추적으로부터 k스텝까지의 기본경로의 호장을 a_k 로 하고, a_k 점의 접선강성행렬의 최소 고유치 $\omega = \omega(a_k)$ 를 구한다. 그래서

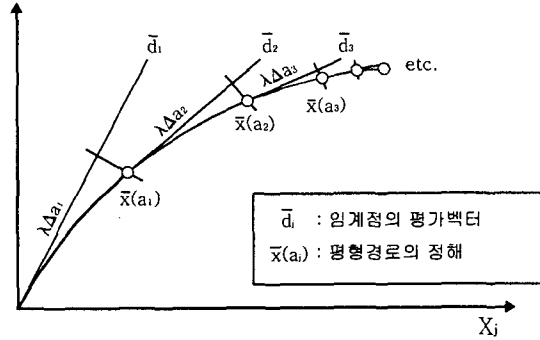


그림 1. 호장법에 의한 평형경로

$a_k = a^*$ (분기점 근방)의 경우 $\omega(a^*) = 0$ 이면 좌굴이 발생한 것으로 판단한다. 그러나, 실제적으로 수치계산상 정확하게 $\omega(a^*) = 0$ 가 되지는 않기 때문에 a_k 가 a^* 의 근방에 있다고 가정하여 a^* 을 중심으로 테일러급수 전개를 하면 다음식과 같다.

$$\omega(a^*) = \omega(a_k) + da_k \cdot \dot{\omega}(a_k) = 0 \quad (1)$$

식 (1)로부터

$$\begin{aligned} da_k &= -\omega(a_k) / \dot{\omega}(a_k) \\ &\approx -\omega(a_k) \cdot da_{k-1} / \{\omega(a_k) - \omega(a_{k-1})\} \end{aligned} \quad (2)$$

$a_k \rightarrow a^*$ 에 접근함에 따라 $da_k \rightarrow 0$ 가 되므로 다음식으로부터 좌굴점을 판단한다.

$$da_k < \gamma \cdot da_1 \quad (\gamma: 임의의 상수) \quad (3)$$

본 논문에서는 γ 는 0.05로 하여 해석하였다. 또한, $\omega(a_k) \approx \omega(a_{k-1})$ 의 경우에는 $da_k \rightarrow \infty$ 가 되기 때문에 증분매개변수의 제한치를 설정하지 않으면 안된다.

2.2 분기점(Bifurcation point)의 판단 기준

기본경로를 추적해 나가는 과정에서 하나 이상의 임계점이 발생하는 경우에는 극한점 이전의 특이현상을 판단할 수 있는 판단기준이 필요하게 된다. 다음의 식은 비선형 방정식을 나타낸다.

$$[K]\{d\} - \Lambda\{q_e\} = \{0\} \quad (4)$$

$\{d\}$ 는 증분변위이고, Λ 는 하중 매개변수이며 $\{q_e\}$ 는 입력데이터에서 주어진 하중모드이다. 위 식의 양변에 임계점에서의 고유벡터 $\{\phi_1\}$ 을 곱하고, $\{K\}\{\phi_1\} = \{0\}$ 이라는 것을 고려하면 식 (4)는 다음과 같이 된다.

$$\Lambda\{\phi_1\}^T\{q_e\} = \{0\} \quad (5)$$

식 (5)로 다음의 두 가지 가능성을 예상할 수 있다.

$$\{\phi_1\}^T\{q_e\} \neq \{0\} \quad , \quad \Lambda = 0 \quad (6)$$

$$\{\phi_1\}^T\{q_e\} = \{0\} \quad (7)$$

위의 두 식은 각각 극한점과 분기점이 일어남을 의미하며, 호장법에서의 또 다른 분기 판정식은 다음과 같다.

$$|K_{n+1}| = 0 \quad (8)$$

$$|K_n| = 0 \quad (9)$$

위의 식에서 K_{n+1} 은 호장강성을 의미하며, K_n 은 일반강성을 의미한다.

3. 조합하중

안정경계를 해석하기 위해서는 여러 개의 하중벡터를 조합하는 과정이 필요하다. 본 논문에서는 여러 개의 하중벡터를 상호간의 비례적인 임의 값에 의해 조합한다. 식 (10)은 비례하중을 통해 조합하중을 만드는 식이다.

$$P_z = \Lambda^1 P_z^1 + \Lambda^2 P_z^2 + \Lambda^3 P_z^3 + \Lambda^4 P_z^4 \quad (10)$$

위의 식에서 4개의 하중벡터 중에 하중벡터 1과 4가 0이라면 식(11)과 같이 두 개의 하중에 의해 전체 하중이 구성된다. 그러나, 비례하중을 사용하면 식 (12)와 같이 하나의 매개변수만을 갖게 된다.

$$P_z = \Lambda^2 P_z^2 + \Lambda^3 P_z^3 \quad (11)$$

$$P_z = \Lambda^2 (P_z^2 + m P_z^3) \quad (12)$$

4. 수치해석 결과

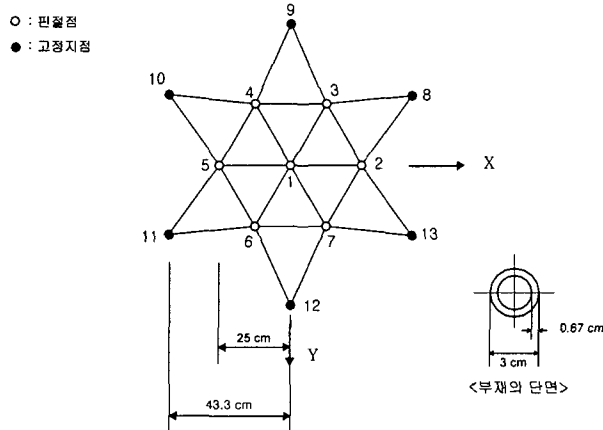


그림 2. 스타 돔의 해석 모델

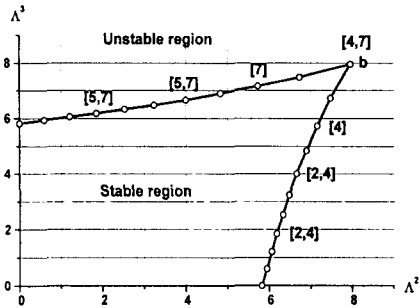
위의 그림은 본 논문에 사용된 스타 돔(Star Dome)이다. 이 모델은 비선형 수치 해석법에 관한 논문에서 자주 다루어지는 모델로서 계산이 비교적 용이할 뿐만 아니라 스냅스루 좌굴, 분기좌굴이 명확한 모양으로 나타나며 좌굴형식의 분류에 적당한 해석모델이다. 다음은 조합하중을 받는 스타돔의 안정경계 해석을 수행

$$P_z^1 = 10^{-4}EA \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad P_z^2 = 10^{-4}EA \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (13)$$

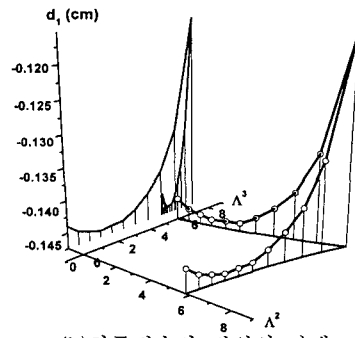
$$P_z^3 = 10^{-4}EA \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad P_z^4 = 10^{-4}EA \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

하기 위해 식 (13)과 같은 하중조합을 고려하였다. 식 (13)에서 Λ^1 은 절점 1에서의 수직하중이고, Λ^2 는 절점 2, 3, 4에서 동일한 수직하중을 의미한다. 또, Λ^3 는 절점 5, 6, 7에서의 수직하중을 의미하며, Λ^4 는 7개

의 모든 절점에 수직하중이 등분포로 작용함을 의미한다.



(a) 안정경계 해석결과



(b) 하중변수와 변위의 관계

그림 3. $\Lambda^1 = \Lambda^4 = 0$ 일 경우의 안정경계

$\Lambda^1 = \Lambda^4 = 0$ 인 경우의 안정경계는 그림 3 과 같다. $\Lambda^2 - \Lambda^3$ 하중평면에서 초기 임계점(극한점 또는 분기점)이 결정되어지고 이 임계점을 연결하면 안정경계가 만들어진다. 안정경계 위의 모든 점들은 극한점이 된다. 단, 예외적으로 $\Lambda^2 = \Lambda^3$ 인 b점은 분기점에 의한 임계점으로 나타났다. 그리고, []안에 있는 숫자는 대응하는 임계점에서 좌굴된 절점을 나타낸다. 그림 3 에서의 안정경계는 단위 기울기의 하중벡터에 대해 대칭이다. 분기가 일어나는 b점에서 하중조합은 대칭이고, 6개의 주변절점에서 같은 수직하중을 갖는다. 안정경계가 b점을 지남에 따라 지배적인 하중조합에서 변화가 일어난다. 반면에 b점에서 두 개의 하중구성이 평형이 일어난다. 그래프 (b)는 하중조합에 의한 임계점에서의 1번 절점의 변위를 고려하여 3차원으로 나타내었다.

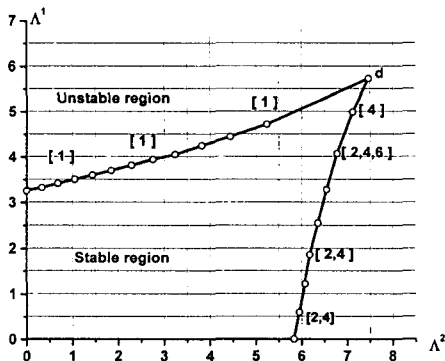


그림 4. $\Lambda^3 = \Lambda^4 = 0$ 일 경우의 안정경계

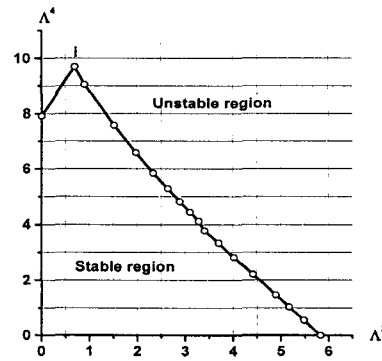
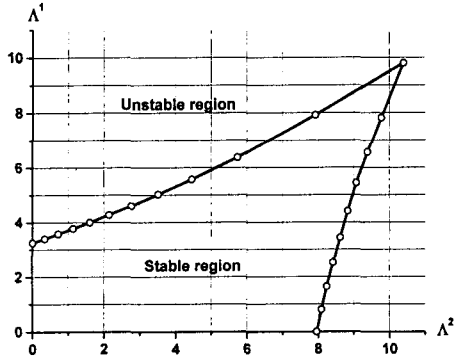


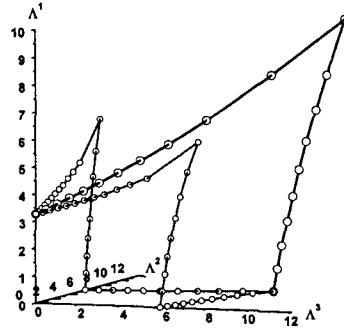
그림 5. $\Lambda^1 = \Lambda^3 = 0$ 일 경우의 안정경계

$\Lambda^1 - \Lambda^2$ 하중 평면에서 안정경계는 그림 4에 나타나 있다. 안정경계의 특성은 그림 3과 같으나 d점을 통과하는 하중구성이 정확히 대칭이 되는 위치에 놓이지 않음을 알 수 있다. $\Lambda^1 = \Lambda^3 = 0$ 인 경우는 그림 5와 같다. i점에서 단일의 분기점이 나타났다.

$\Lambda^2 = \Lambda^3$ 이고 Λ^4 인 경우의 안정경계는 그림 6과 같다. 여기서, Λ^1 은 정점에서 하중의 크기를, Λ^2 는 주변절점에서 똑같은 하중이 작용함을 의미한다. 그림 6 (a)의 그래프에서 왼쪽 그래프 안정경계는 하중조합이 만나는 방향으로 갈수록 분기점에 의한 임계점의 형태로 안정경계가 나타났고 오른쪽의 안정경계는 모두 분기점의 형태에 의한 안정경계로 나타났다.



(a) 안정경계 해석결과

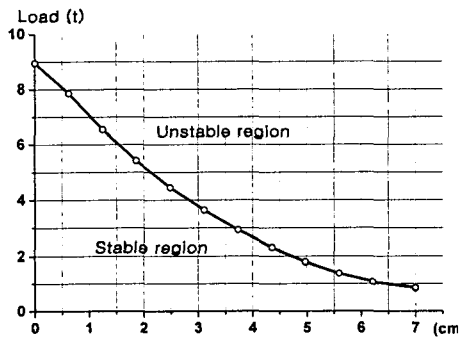


(b) 3차원 안정경계

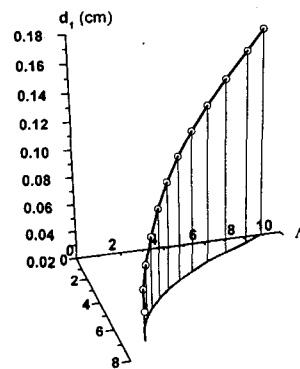
그림 6. $\Lambda^2 = \Lambda^3$ 이고 $\Lambda^4 = 0$ 일 경우의 안정경계

만나는 방향으로 갈수록 분기점에 의한 임계점의 형태로 안정경계가 나타났고 오른쪽의 안정경계는 모두 분기점의 형태에 의한 안정경계로 나타났다.

그림 7은 지점 13의 높이의 변화에 따른 안정경계해석을 수행한 것이다. 해석결과 지점의 높이가 높아질수록 이에 대응하는 임계하중은 작게 나타났다. 절점 1의 변위를 고려해서 안정경계 곡선을 3차원으로 나타낸 것은 그림 7 (b)와 같다. 그림 7은 지점 13의 높이의 변화에 따른 안정경계해석을 수행한 것이다. 해석결과 지점의 높이가 높아질수록 이에 대응하는 임계하중은 작게 나타났다. 절점 1의 변위를 고려해서 안정경계 곡선을 3차원으로 나타낸 것은 그림 7 (b)와 같다.



(a) 안정경계 해석결과



(b) 하중변수, 지점 13의 높이와 변위의 관계

그림 7. 지점 13의 높이의 변화에 따른 안정경계

그림 8은 스타돔을 편집합일 때와 강접합일 경우의 안정경계를 비교한 것이다. 해석 결과 강접합일 경우의 안정경계에서 임계하중이 3배~4배정도 더 높게 나타났다.

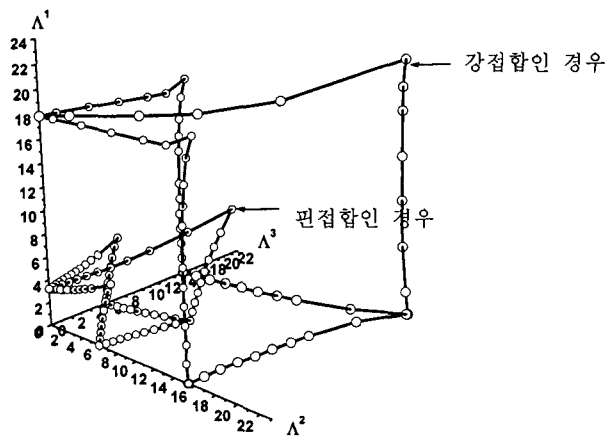


그림 8. 편집합 스타 돔과 강접합 스타 돔의 안정경계 해석결과 비교

5. 결 론

본 논문에서 여러 개의 독립하중을 받는 래티스 돔의 안정경계는 하중공간에서 하중 매개변수의 상호작용에 영향을 받는다. 안정경계를 결정할 때 비례하중을 통해 조합하중을 만들어 전체 하중구성을 하나의 하중 매개변수로 줄여서 비례계수의 변화에 따른 임계점의 위치를 찾았다. 두 개의 독립하중 매개변수를 가진 안정경계는 하중평면에서 곡선을 이루는 반면, 3차원 공간에서 세 개의 독립하중 매개변수를 고려하면 안정경계는 평면으로 나타났다.

본 연구결과는 아래와 같이 요약할 수 있다.

- (1) 래티스 돔의 안정경계를 결정할 때 비례하중을 통해 조합하중을 만들어 비례계수의 변화에 따른 정확한 임계점의 위치를 찾을 수 있어서 래티스 돔 및 아치의 설계시 하중의 분포 및 크기를 결정할 수 있는 지표가 된다.
- (2) 하중구성이 등분포 하중으로 조합되었을 경우 좌굴의 형태는 극한좌굴 이전에 분기좌굴이 일어났고 비례하중과 비례계수의 변화에 따라 임계점의 형태가 변하여 래티스 돔과 아치의 극한좌굴 및 분기좌굴은 적용된 하중조합과 이 하중조합 사이의 비례하중에 의해 지배되었다.
- (3) 래티스 돔의 안정경계 해석에 있어서 하중구성을 비례하중을 사용하여 조합하면 하중 매개변수를 하나의 하중 매개변수로 감소시켜 해석을 단순화할 수 있고 시간을 절약할 수 있었다.