

사장교의 구조해석을 위한 개선된 해석모델

An Improved Model for Structural Analysis of Cable-stayed Bridges

최창근¹⁾ 김선훈²⁾ 송명관³⁾
Choi, Chang-Koon Kim, Sun-Hoon Song, Myung-Kwan

ABSTRACT

In this study, an improved analysis model for the more efficient and accurate structural analysis of cable-stayed bridges is presented. In this model, beam elements, of which stability functions are stabilized by the use of Taylor's series expansions, are used to model space frame structures, and truss elements, of which equivalent elastic moduli are evaluated on the assumption that the deflected shape of a cable has a catenary function, are used to model cables. By using the proposed analysis model, nonlinear static analysis and natural vibration analysis of 2-dimensional and 3-dimensional cable-stayed bridges are carried out and are compared with the analysis results reported by other researchers.

1. 서론

사장교는 교각 위에 세운 주탑으로부터 비스듬히 뻗은 케이블로 주형 또는 트러스를 매단 교량구조물이다. 역학적으로는 단순보 또는 연속보인 주형을 사장재인 케이블로 지지시켜서 하중을 각 지점과 주탑의 기초를 통해 지반으로 전달하는 구조물이다¹⁾. 사장교는 설계 및 시공과정에서 고도의 기술을 요하는 구조물로서 특히 심한 비선형거동을 나타내기 때문에 다른 형식의 교량에 적용하는 해석이론과 상당히 다른 구조해석 및 설계기술을 필요로 하고 있다. 즉, 사장교의 구조설계 시에는 사하중 및 활하중에 대한 정적해석은 물론이고 고유진동해석, 이동차량해석, 지진하중해석 및 풍하중해석 등 동적하중에 대한 구조해석도 필수적이며, 아울러 시공 중에도 장기간에 걸쳐 전체 교량시스템의 거동변화에 대한 검토가 병행되어야 한다²⁾.

사장교는 재료적으로는 선형거동을 하지만 전체적인 하중-변위관계는 비선형거동을 나타내게 되는데, 특히, 사장교에서는 이러한 비선형성이 더욱 심하게 나타나므로 구조해석 시 반드시 반복적인 비선형해석이 필요하다. 이와 같은 비선형 거동은 크게 다음의 이유에 의해 기인한다³⁾. 첫째, 케이블의 비선형거동: 새그(sag)에 의한 케이블의 비선형 축력-축변형 거동, 즉, 장력증가에 따른 케이블의 강성 증가. 둘째, 휨부재의 비선형거동: 주탑(tower)이나 보강형에 작용하는 큰 압축력에 의한 휨강성의 저하, 즉, 보-기동 효과. 셋째, 대변위문제: 설계하중에 대해서 구조물의 변위가 크게 발생하여 변형 전후의 형상 차이를 무시할 수 없을 경우, 즉, 좌표계 변환행렬(transformation matrix)의 재구성 및 비보존력 문제 등. 따라서, 사장교의 구조해석을 위해서는 이러한 비선형거동의 영향을 충분히 고려할 수 있어야 한다.

1) 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수
2) 영동대학교 토목공학과 조교수
3) 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

본 연구에서는 사장교의 정적 및 동적거동의 해석을 위한 개선된 해석모델을 제안한다. 케이블 유한요소로는 현수선함수(catenary function)에 적합한 등가탄성계수를 유도하여 트러스요소를 적용시킨다. 보요소로는 주탑이나 보강형에 작용하는 압축력에 의한 휨강성의 저하를 고려하기 위한 안정함수(stability function)의 사용을 도입하며, 이러한 안정함수들을 안정화하기 위하여 Taylor의 급수전개를 이용한다.

2. 케이블의 모형화

케이블은 휨, 비틀림, 압축력 등에 대해서는 지지할 수 없고 오직 인장력에 대해서만 지지할 수 있는 부재이다. 따라서, 케이블은 외력을 받게 되면 대변형(large deformation)이 발생하게 되어서 심한 비선형거동을 나타내게 된다. 이러한 케이블의 비선형성을 고려하여 모델링하는 대표적인 방법으로는 Ernst 등가탄성계수(equivalent modulus of elasticity) 트러스요소를 사용하는 방법, 탄성현수선 케이블요소를 사용하는 방법⁴⁾⁵⁾ 등이 있다. 그러나, Ernst의 등가탄성계수 트러스요소를 사용하는 방법은 새그가 큰 경우에 많은 오차가 발생하며, 탄성현수선 케이블요소를 사용하는 방법은 유도가 복잡하고 사용이 까다로운 점이 있다.

2.1. 등가탄성계수

기존의 여러 문헌을 통하여 가장 많이 이용되는 방법은 케이블의 등가탄성계수를 이용하는 방법이다. 해석의 기본 개념은 곡선형으로 처진 케이블을 등가탄성계수를 갖는 트러스요소를 사용하여 선형화하는 방법이다. 본 연구에서는 Ernst(1965)가 제안한 등가탄성계수 트러스요소 개념을 이용하되, 케이블에 대한 해석의 정확성을 개선시키기 위하여 케이블의 처짐형상을 현수선함수라고 가정하여 케이블의 등가탄성계수에 관한 식을 유도하여 사용한다. 따라서, 각도 α 만큼 경사진 케이블의 할선탄성계수에 대한 식(1)을 유도할 수 있다.

$$E_{sec}^c = \frac{E_e}{(1 + C_1 + C_2)/2 \cosh\left(\frac{wL_c \cos \alpha}{2T_f}\right)} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } C_1 &= \frac{1}{wL_c \cos \alpha (T_f - T_i)} \left[T_f^2 \sinh\left(\frac{wL_c \cos \alpha}{T_f}\right) - T_i^2 \sinh\left(\frac{wL_c \cos \alpha}{T_i}\right) \right] \\ C_2 &= \frac{4E_e A}{wL_c \cos \alpha (T_f - T_i)} \left[T_i \sinh\left(\frac{wL_c \cos \alpha}{2T_i}\right) - T_f \sinh\left(\frac{wL_c \cos \alpha}{2T_f}\right) \right] \end{aligned}$$

여기서, E_e 는 케이블부재 재료의 탄성계수, w 는 케이블부재의 단위길이 당 자중, A 는 케이블부재의 단면적, L_c 는 모델링하는 케이블부재의 길이, T_i 는 하중증가 전의 케이블 인장력, T_f 는 하중증가 후의 케이블 인장력이다. 또한, 케이블의 접선탄성계수(tangent modulus of elasticity)에 대한 식(2)을 유도할 수 있다.

$$E_{tan}^c = \frac{E_e}{(1 + C_1 + C_2)/2 \cosh\left(\frac{wL_c \cos \alpha}{2T}\right)} \quad (2)$$

$$\text{여기서, } C_1 = \frac{1}{wL_c \cos \alpha} \left[2T \sinh\left(\frac{wL_c \cos \alpha}{T}\right) - wL_c \cos \alpha \sinh\left(\frac{wL_c \cos \alpha}{T}\right) \right]$$

$$C_2 = \frac{-4E_e A}{wL_c \cos \alpha} \left[\sinh\left(\frac{wL_c \cos \alpha}{2T}\right) - \frac{wL_c \cos \alpha}{2T} \sinh\left(\frac{wL_c \cos \alpha}{2T}\right) \right]$$

2.2. 강성도행렬

앞절에서의 등가탄성계수를 이용하여 트러스요소의 탄성요소강성도행렬과 유사하게 케이블부재의 탄성요소강성도행렬의 구성이 다음과 같이 가능하다.

$$[K_e]_c = \frac{AE_{eq}}{L_c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서, E_{eq} 는 E_{sec}^c 또는 E_{tan}^c 이다.

케이블부재의 기하강성도행렬도 트러스요소의 기하강성도행렬과 동일하게 구성되며, 하중증분에 따른 케이블부재의 강성도행렬은 탄성요소강성도행렬과 기하강성도행렬의 합으로 구성된다⁶⁾.

3. 프레임 부재의 모형화

3.1. 강성도행렬

축력과 휨모멘트를 동시에 받는 보에 대한 평형관계(equilibrium relationship)와 운동학적 관계(kinematic relationship)를 고려하여 축력의 영향을 고려한 보의 탄성강성도행렬의 유도가 가능하다. 안정함수 개념을 도입함으로써 이러한 축력과 휨모멘트 사이의 상호작용(interaction)의 고려가 가능하다⁷⁾. 축력과 휨모멘트의 상호작용에 의한 강성도행렬의 변화 이외에 구조물 전체의 대변형에 의한 기하학적인 변화에 의해 강성도행렬은 변화하게 된다. 이를 고려하기 위하여 보요소의 기하강성도행렬을 구성하여 해석에 포함시키게 된다⁶⁾.

3.2. 안정함수(stability function)

Nazmy(1990)가 사용한 안정함수, $S_{1z} \sim S_{4z}$ 와 $S_{1y} \sim S_{4y}$ 는 μ 가 0에 가까운 값일 때, R_c 와 R_t 가 0에 가까운 값을 가지므로 수치적으로 매우 불안정한 값을 가지게 된다. 따라서, 본 연구에서는 이러한 안정함수를 Taylor 급수 전개를 하고 고차항을 생략한 식(4)와 (5)를 사용한다⁸⁾. 여기서, 보요소의 축력과 휨모멘트는 그림 1과 같이 정의된다.

인장력인 경우(P가 양(+))

$$S_{1z} = \left(1 + \frac{\omega^2}{6} + \frac{\omega^4}{120} + \frac{\omega^6}{5040} + \frac{\omega^8}{362880}\right) / R_t ; \quad S_{2z} = \left(1 + \frac{\omega^2}{12} + \frac{\omega^4}{360} + \frac{\omega^6}{20160} + \frac{\omega^8}{1814400}\right) / R_t ;$$

$$S_{3z} = \left(1 + \frac{\omega^2}{10} + \frac{\omega^4}{280} + \frac{\omega^6}{15120} + \frac{\omega^8}{1330560}\right) / R_t ; \quad S_{4z} = \left(1 + \frac{\omega^2}{20} + \frac{\omega^4}{840} + \frac{\omega^6}{60480} + \frac{\omega^8}{6652800}\right) / R_t \quad (4)$$

여기서, $R_t = 1 + \frac{\omega^2}{15} + \frac{\omega^4}{560} + \frac{\omega^6}{37800} + \frac{\omega^8}{3991680}$, $\omega = \mu L$, $\mu^2 = P/EI_z$

압축력인 경우(P가 음(-))

$$S_{1z} = \left(1 - \frac{\omega^2}{6} + \frac{\omega^4}{120} - \frac{\omega^6}{5040} + \frac{\omega^8}{362880}\right) / R_c ; S_{2z} = \left(1 - \frac{\omega^2}{12} + \frac{\omega^4}{360} - \frac{\omega^6}{20160} + \frac{\omega^8}{1814400}\right) / R_c ;$$

$$S_{3z} = \left(1 - \frac{\omega^2}{10} + \frac{\omega^4}{280} - \frac{\omega^6}{15120} + \frac{\omega^8}{1330560}\right) / R_c ; S_{4z} = \left(1 - \frac{\omega^2}{20} + \frac{\omega^4}{840} - \frac{\omega^6}{60480} + \frac{\omega^8}{6652800}\right) / R_c \quad (5)$$

$$\text{여기서, } R_c = 1 - \frac{\omega^2}{15} + \frac{\omega^4}{560} - \frac{\omega^6}{37800} + \frac{\omega^8}{3991680}$$

안정함수 $S_{1y} \sim S_{4y}$ 는 식(4)와 (5)에서 I_z 를 I_y 로 대치시킴으로써 같은 방법으로 정의된다. 그리고, S_5 는 그림 1에서의 축력과 휨모멘트값을 이용하여 Nazmy(1990)가 사용한 식을 그대로 사용한다⁷⁾. 그림 2에 보이는 바와 같이 사용되는 안정함수는 안정된 형태로 수정되었음을 알 수 있다.

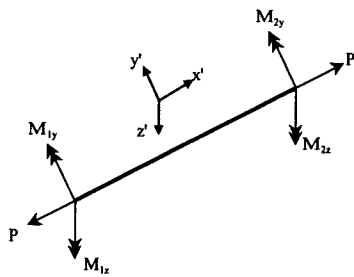


그림 1. 보요소의 축력과 휨모멘트

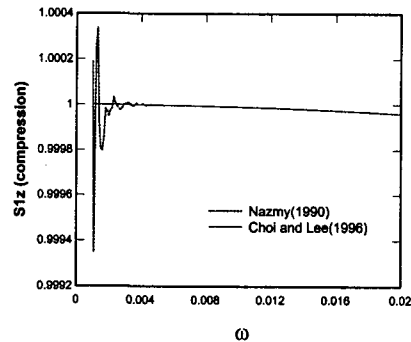


그림 2. 수정된 안정함수(압축력 작용시)

3.3. 부재의 질량행렬

고유진동해석을 위한 프레임부재의 질량행렬은 보요소의 일관질량행렬(consistent mass matrix)을 구성하여 모델링하며, 케이블부재의 질량행렬은 트러스요소의 집중질량행렬(lumped mass matrix)로 구성하여 모델링한다⁹⁾.

4. 수치해석법

4.1. 비선형방정식의 해법

재료비선형 또는 기하학적 비선형을 고려하여 구조해석을 수행하는 경우, 강성도행렬에 비선형항이 포함되기 때문에 일반적으로 반복해석을 통하여 구조물의 응답을 구하게 된다. 본 연구에서는 하중을 작용시킬 때는 증분법을 사용하고, 전체 하중이 다 작용되면 불평형하중(unbalanced force)을 반복법으로 구하여 다시 이 불평형하중을 증분으로 나누어 작용시키는 혼합법을 사용한다⁷⁾.

4.2. 고유진동해석

구조물의 사하중에 대한 정적비선형해석을 수행하고 그 변형상태에서의 구조물 전체의 강성도행렬과 질량행렬을 구성하고, 이러한 시스템 행렬에 대한 고유진동해석(natural vibration analysis)을 수행하게 된다. 본 연구에서는 주요한 몇 개의 저차 모드를 구할 경우에 유용하게 사용할 수 있는 Subspace iteration method를 사용한다.

5. 예제 해석

검증예제해석을 수행하여 제안된 해석모델의 정확성 및 효율성을 검증하며, 2차원 및 3차원 사장교에 대해서 해석하고 그 결과를 다른 연구자들의 연구결과와 비교한다.

5.1. 검증예제해석

제안한 케이블요소의 검증을 위해서 그림 3과 같이 자중과 양단 수평하중을 받는 케이블의 해석한다⁹⁾. 초기인장력 T_0 가 작용되고 있으며, 양단에서의 수평하중의 증가에 의하여 지점에서 수평변위 및 케이블 중앙에서 새그의 변화가 발생하게 된다. Karoumi(1999)가 제시한 현수케이블요소(catenary cable element)와 본 논문에서 제시한 등가탄성계수 식을 이용한 케이블요소에 의하여 각각 해석하고, 그 결과를 비교해 보았다. 그림 4와 5와 같이 수평하중의 증가에 따른 수평변위와 새그의 변화를 비교해 볼 때 본 논문에서 제시한 케이블요소에 의한 해석결과는 현수케이블요소의 해석결과와 근사한 결과를 주고 있으며, 보요소에 의한 근사모델링의 해석결과보다 효율적이면서 정확한 해석결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

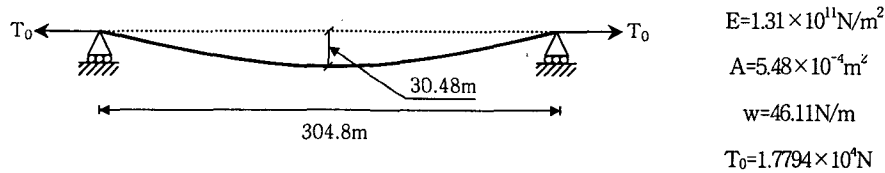


그림 3. 양단 수평하중을 받는 케이블

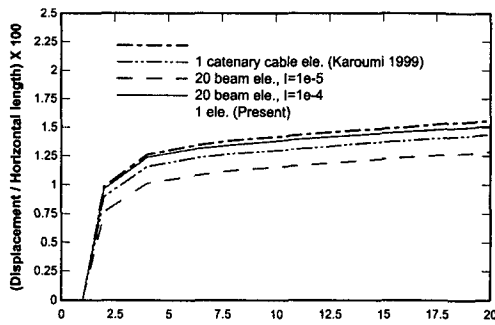


그림 4. 수평변위/수평길이-수평하중 그래프

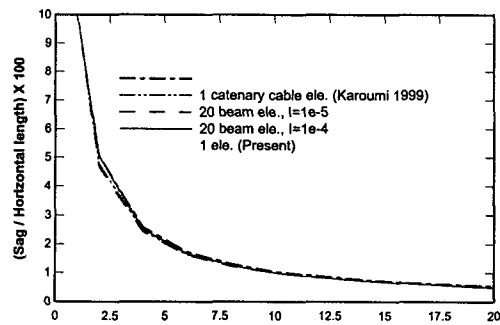


그림 5. 새그/수평길이-수평하중 그래프

또한, 본 연구에서 구현된 보요소에 의한 기하비선형 해석의 정확성을 검증하기 위해서 연직하중을 받는 외팔보를 해석하여 이론해와 비교해 보았다. 외팔보는 10개의 보요소에 의하여 모델링되었고, 안정함수는 사용되지 않았다. 우측단에서의 수직변위, 수평변위, 회전변위와 이론해를 비교하였으며, 이론해와 거의 일치하는 해석 결과를 보여주고 있음을 확인하였다. 이와 같이 제안한 케이블요소와 보요소에 대해서 검증하였으며, 이러한 검증된 요소에 의해 케이블, 주형, 주탑 등을 모델링한 사장교의 해석모델에 대한 해석결과는 신뢰할 수 있을 것이다.

5.2. 2차원 사장교의 해석 예

본 연구에 의하여 고유진동해석을 수행하고, Karoumi(1999)의 해석결과와 비교하였다⁹⁾. 이 Karoumi가 해석한 사장교 해석 모델은 Nazmy(1990)⁷⁾의 3차원 해석 Model I를 2차원 해석을 위해 구성한 해석모델이다. 케이블부재들은 120개의 케이블요소, 즉, 각 케이블부재를 5개의 요소로 분할하여 모델링하였으며, 주형 및 주탑은 총 44개의 보요소로 모델링하였고, 총 144개의 절점을 사용하여 모델링하였다. 그림 6에서는 연직휨 모드에 대한 고유진동수와 고유진동모드를 보여주고 있으며, Karoumi(1999)의 해석결과(괄호안)와 근접한 결과를 얻고 있음을 알 수 있다. 이러한 연직휨모드들 사이에는 케이블의 거동에 의한 고유진동모드들이 존재하게 되며, 이러한 고유진동모드들의 해석을 위해서는 케이블의 요소 세분화에 의한 해석이 필요하게 된다.

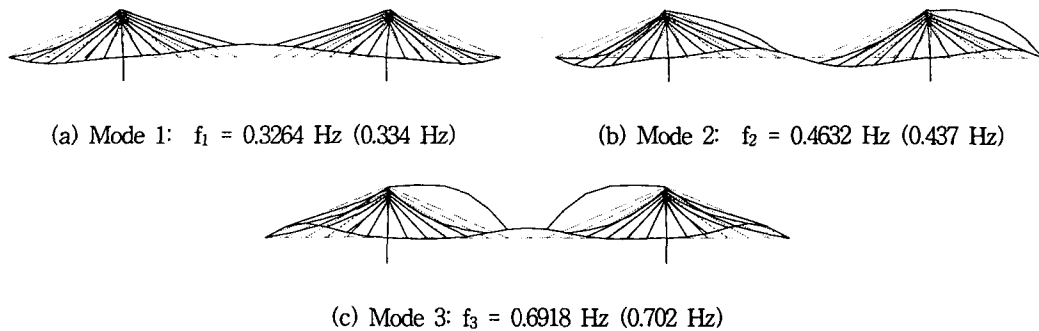


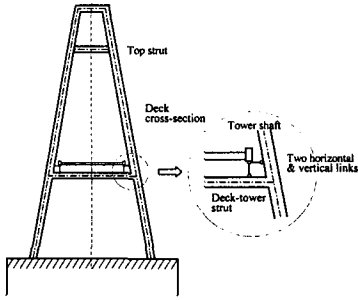
그림 6. 연직휨모드(vertical bending mode)에 대한 고유진동수와 고유진동모드

5.3. 3차원 사장교의 해석 예

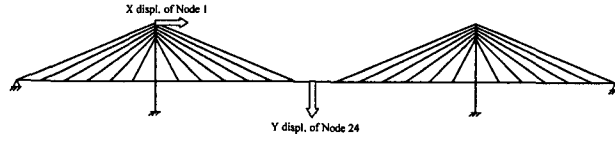
본 연구에 의하여 그림 7에 보이는 바와 같은 Nazmy(1990)가 해석한 3차원 사장교 모델(Model I)에 대하여 사하중에 대한 정적비선형해석 및 고유진동해석을 수행하였다⁷⁾. 해석 대상 사장교의 중앙경간은 1,100ft 이고 양측경간은 480ft이다. 48개의 케이블 요소, 주형을 모델링하기 위해서 52개의 보요소, 횡형(가로보)을 모델링하기 위한 27개의 보요소, 주탑을 모델링하기 위해 42개의 보요소, 주탑과 상판의 연결부를 모델링 하기 위해서 8개의 보요소, 총 177개의 요소를 사용하여 모델링하였으며, 요소 연결(connectivity)을 정의하기 위해 94개의 절점, 보요소의 관성모멘트의 주축을 정의하기 위해 60개의 절점, 총 154개의 절점을 사용하여 모델링하였다.

그림 8에서는 정적비선형해석의 결과로서 주탑 상부(절점1)의 횡방향변위와 중앙경간(절점24)의 연직변위 해석결과를 도시하고 있는데, Nazmy(1990)의 해석결과와 비교해 볼 때 근접한 결과를 얻고 있음을 알 수 있다. 그림 9에서는 저차 4개의 고유진동모드를 보여주고 있으며, Nazmy(1990)의 해석결과와 근접한 결과들을 보여주고 있다. 2차원 해석에서는 볼 수 없는 비틀림 회전 진동 모드형상을 3차원 해석모델을 이용한 고유진동해석을 통하여 형상화 할 수 있음을 알 수 있다. 따라서, 동적해석을 통한 사장교의 거동을 예측하는 데에 있어서 보다 정확한 해석이 가능함을 예상할 수 있다.

그림 10에서는 교대부 지지조건에 따른 3가지 해석모델에 대한 고유진동주기를 비교하고 있다. 3가지 지지조건은 각각 힌지-힌지, 힌지-롤러, 롤러-롤러이다. 5번째 모드까지의 저차모드의 경우 지지조건에 의한 차이가 확실히 나타나고 있다. 힌지-힌지 지지조건일 경우 각 모드에 대한 고유진동주기들이 전체적으로 가장 짧아지며, 롤러-롤러 지지조건인 경우 고유진동주기들이 가장 길어짐을 알 수 있다.



(a) 단면도



(b) 측면도

그림 7. 3차원 사장교 해석모델(Nazmy(1990)의 해석 Model I)

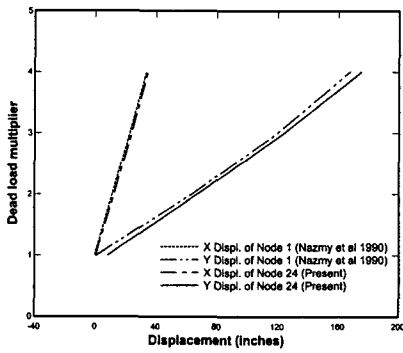


그림 8. 해석 결과 비교

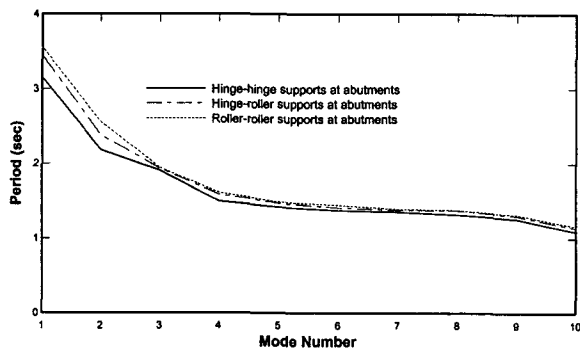
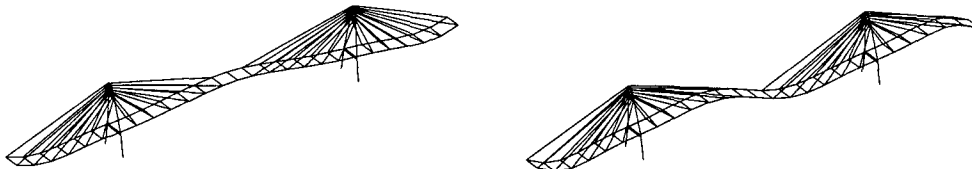
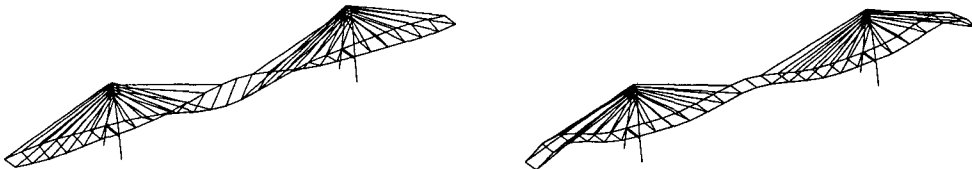


그림 10. 교대부 지지조건에 따른 3가지 해석모델의 고유진동주기



Mode 1: $f_1 = 0.3165 \text{ Hz}$ (0.3109 Hz), $T_1 = 3.1594 \text{ sec}$; Mode 2: $f_2 = 0.4583 \text{ Hz}$ (0.4105 Hz), $T_2 = 2.1878 \text{ sec}$



Mode 3: $f_3 = 0.5243 \text{ Hz}$ (0.5154 Hz), $T_3 = 1.9072 \text{ sec}$; Mode 4: $f_4 = 0.6691 \text{ Hz}$ (0.6498 Hz), $T_4 = 1.4946 \text{ sec}$

그림 9. 고유진동모드별 고유진동수 및 고유진동주기

6. 결 론

본 연구에서는 장대교량의 대표적인 형식인 사장교의 정적 및 동적해석을 위한 개선된 해석모델을 제안하였다. 제안한 케이블 유한요소는 현수선함수의 처짐 형상을 갖는 케이블에 적합한 등가탄성계수를 이론식에 근거하여 유도하였으며, 이를 Ernst 등가탄성계수 트러스요소에 적용시켰다. 또한, 세그가 비교적 큰 케이블 구조체의 모형화가 가능하고 기하학적 오차를 최소화 하고자 케이블을 여러 개의 요소로 분할할 수 있도록 개선시켰다. 제안한 보요소는 압축력에 의한 휨강성의 저하를 고려하기 위한 안정함수를 Taylor의 급수전개를 이용하여 수치적으로 안정화시켰다. 제안한 해석모델을 검증하기 위하여 다른 연구자들이 해석한 검증예제, 2차원 및 3차원 사장교에 대한 예제해석을 수행하였다. 수치해석결과 본 연구에서 제안한 케이블요소 및 보요소는 효율적이면서 정확한 해석결과를 보여줌을 알 수 있었다. 본 연구를 수행하여 얻어진 케이블요소 및 보요소로 구성된 사장교의 해석모델은 추가적인 보완작업을 통하여 향후 다음과 같은 분야에 이용 가능할 것이다. 첫째, 사장교의 고유진동해석을 통한 고유진동모드의 예측. 둘째, 지진하중, 풍하중, 이동차량하중과 같은 동적하중에 대한 사장교의 구조거동 예측. 셋째, 시공단계별 사장교의 구조거동 예측.

감사의 글

본 연구는 '99 산·학·연 연구개발사업에 의해 수행된 연구의 일부로서 연구비를 지원해 준 한국건설기술연구원에 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Gimsing, N.J., *Cable Supported Bridges: Concept and Design, 2nd Edition*, John Wiley & Sons, 1997.
2. 한국건설기술연구원, "장대교량의 설계 및 시공에 관한 연구", 연구보고서 KICT/95-SE-111- 64, 1995.
3. Fleming, J.F., "Nonlinear Static Analysis of Cable-stayed Bridge Structures", *Computers & Structures*, Vol.10, pp.621-635, 1979.
4. 현대건설기술연구소, "현수교의 시공 단계 해석 시스템 개발", 최종연구보고서, 1994.
5. 현대건설기술연구소, "합성형사장교의 시공단계해석 및 시공관리 시스템의 연구", 부록(사용자 지침서), 1994.
6. Przemieniecki, J.S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, USA, 1968
7. Nazmy, A.S. and Abdel-Ghaffar, A.M., "Three-dimensional Nonlinear Static Analysis of Cable-stayed Bridges", *Computers & Structures*, Vol.34, pp.257-271, 1990.
8. 최창근, 이태열, 홍현석, 김은성, "사장교 케이블의 단면적의 점진적 최적화에 관한 연구", 한국전산구조공학회 가을 학술발표회 논문집, pp.113-120, 1996.
9. Karoumi, R., "Some Modeling Aspects in the Nonlinear Finite Element Analysis of Cable Supported Bridges", *Computers & Structures*, Vol.714, pp.397-412, 1999.