

막구조물의 준공평형 형상해석에 관한 연구 A Study on the Actual Equilibrium Analysis for Membrane Structures

이 장 복* 김 재 열** 권 택 진***
Lee, Jang-Bog Kim, Jae-Yeol Kwun, Taek-Jin

ABSTRACT

In general, the design of membrane structures takes three steps. The first is shape finding analysis which is determination of initial equilibrium geometry with uniform stresses. The second step involve the computation of the stress-deformation to get completed membrane under various load conditions. The third step is to divide the membrane structures into several plan strips from the initial equilibrium states. This procedure is needed because of the initial shape has usually undevelopable curved surface and is called as "cutting patterns generation". By introducing this work, the deformation due to the initial stress is removed and approximate cutting patterns are generated. In this approach, however, material properties is not considered, therefore the error between the design stresses and actual stresses during the fabrication of plan strips should be occurred. In this paper, actual equilibrium shape analysis procedure for HP shape models is presented. The deviations of stresses between the design stresses and actual stresses are estimated.

1. 서 론

막 구조물은 막이나 케이블 등과 같은 연성재료를 사용하여 시공되므로 일반구조물과는 다르게 3단계의 해석 과정을 수행하게 된다. 첫째는 초기형상을 만들기 위한 형상해석으로써 초기응력(이하 설계응력)을 가정하여 등장력 곡면(최소곡면)을 구하는 해석이며 둘째는 응력-변형해석으로써 일반구조물과 동일하게 각종 외력에 대한 구조물의 안정성을 확인하는 해석이다. 위와 같은 두 단계는 정역학적 관점에서 막구조물의 설계를 수행하는 것이다.¹⁾²⁾³⁾

그러나 시공적 관점에서 살펴보면 형상해석에서 구한 등장력곡면 형상이 대부분 복잡한 3차원 비가전(非可展) 곡면이고 막재에 설계응력이 도입되어 있기 때문에 오차 없이 막구조물을 만드는 일이 대단히 어렵다. 따라서 세 번째 단계로는 생산된 막재 폭을 고려하여 복잡한 3차원 초기형상을 몇 개의 조각(Strip)으로 분할한 후 2차원 평면에 펼치는 초기재단도 해석을 수행하여야 한다.³⁾⁴⁾

* 정회원, 성균관대학교 건축공학과, 박사수료
** 정회원, 성균관대학교 건축공학과 연구조교수, 공학박사
*** 정회원, 성균관대학교 건축공학과 교수, 공학박사

그러나 세 번째 단계에서 구한 초기재단도는 제작시 평면 무응력 상태에 있으므로 가정된 설계장력을 도입하기 위한 길이 보정을 해야하기 때문에 최종재단도는 초기재단도로부터 막재료의 직교이방성을 고려하여 막재의 길이를 줄여야 한다. 보통 길이 보정량은 형상해석시 가정한 설계응력, 사용재료의 물리적 특성 등에 따라 달라지게 되나 재료실험에 의해 일률적으로 길이의 2~3%를 줄이는 것이 일반적인 방법이다.⁵⁾

이상과 같은 과정을 통하여 만들어진 최종재단도를 서로 용착하고 경계에 설치하면 막구조물이 완성되는 것이다. 그러나 경험에 의해 일률적으로 길이를 보정한 최종재단도는 막재료의 직교이방성에 관한 특성이 고려되지 않은 상태이므로 시공 후 주름(Wrinkling) 또는 과대응력 발생등 여러가지 예상하지 못한 구조적 문제를 일으킬 가능성이 있기 때문에 이에 대해 이론적으로 예측할 수 있는 방법이 필요하다.

따라서, 본 논문에서는 2차원 좌표계에 있는 최종재단도를 3차원 공간의 경계부에 설치하는 방법과 이때 발생하는 실제응력을 평가하는 해석을 「준공평형 형상해석」이라 정의하고 기하학적 비선형을 고려한 준공평형 형상해석 과정의 이론을 정식화하여 본다. 또한, 예제를 통해 시공시 도입되는 실제응력을 이론적으로 측정함으로써 초기형상 해석시 가정된 설계응력과 차이를 비교하여 최종재단도가 막 구조물에 미치는 영향에 관해 검토하여 본다.

2. 재단도 해석

형상해석 후 공간상에 등장력 곡면(그림1)을 평면 전개도(그림2) 형태로 변환하기 위해 요소의 길이를 최소화 하는 방법으로써 최소 자승법을 사용하였다.³⁾

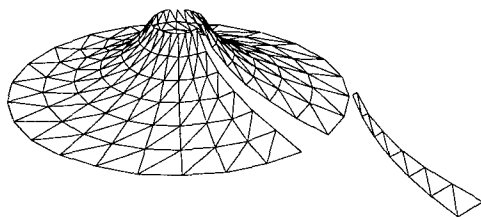


그림1. 막재의 추출

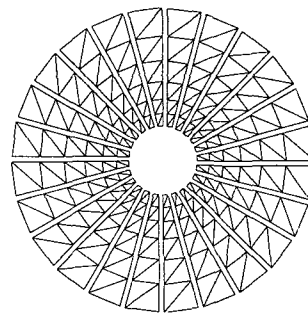


그림2. 초기재단도 해석 예

초기재단도가 구해지면 초기응력 도입을 위해 그림 3와 같이 길이에 관해 일정한 양을 줄이는 보정작업을 수행하여 최종재단도를 구하게 된다.⁵⁾

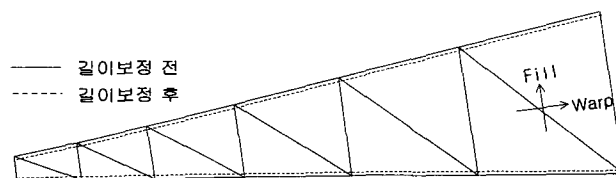


그림 3. 최종재단도의 작성 예

3. 준공평형 형상해석

막 구조물의 준공평형 형상해석은 2차원 최종재단도로부터 초기 형상해석시 구한 3차원 공간상 기지의 좌표로 변환하는 해석이므로 기존 형상해석 과정과 비교하면 역 해석 문제로 정의될 수 있다. 또한 형상해석에는 등장력 곡면을 구하기 위해 탄성계수를 사용하지 않지만 준공평형 해석시에는 직교이방성 막재의 특성을 고려하기 위해 실제의 탄성계수 값을 사용하게 된다. 해석을 위한 기본 가정을 살펴보면 다음과 같다.

- (1) 막요소는 직교 이방성 평면응력 요소로써 휨이나 압축력에 저항하지 못한다.
- (2) 2차원 평면 재단도 상의 막요소는 3차원 공간의 막요소와 1대1 대응 관계에 있다.
- (3) 2차원 평면 재단도의 막요소는 무응력 상태이다.

위와 같은 기본 가정을 갖는 막의 비선형 문제는 미소변형도-유한회전의 문제로 정의 할 수 있으며 기하학적 비선형 해석을 해야 한다. 이에 대한 변형도-변위관계식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon'\} + \{\epsilon''\} \quad (1)$$

여기에서, $\{\epsilon'\}$ 는 선형변형도 성분의 6×1 벡터이고, $\{\epsilon''\}$ 는 6×1 의 대회전에 기인한 비선형성분을 포함한 벡터를 나타낸다. 국소좌표에 대한 막요소의 연속변위 성분을 일단의 다항함수 조합으로 가정하여 변형도-변위관계식을 유도하면,

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \{\epsilon'\} + \{\epsilon''\} \\ &= [B_0]\{d_u\} + [B_L]\{d_u\} \end{aligned} \quad (2)$$

가 되고, 여기에서 $\{d_u\}$ 는 국소좌표계에서의 절점변위 벡터이고 $[B_0]$ 와 $[B_L]$ 는 각각 변형도와 변위에 관계된 계수매트릭스이다. 또한, (2)식에서 가상일의 원리를 이용하면 (3)식과 같은 전체 좌표계에서의 평형 방정식을 얻을 수 있다.¹⁾²⁾

$$\begin{aligned} \{dF\} &= [T]^T [k_i] [T] \{dD\} + [dT]^T \{f\} \\ &= [k_E] \{dD\} + [k_C] \{dD\} \end{aligned} \quad (3)$$

$[k_E]$: 탄성강성매트릭스, $[T]$: 변위변환매트릭스, $\{f\}$: 각절점에서의 등가절점력벡터
 $[k_C]$: 기하강성매트릭스, $\{dD\}$: 전좌표계에서의 절점력

기하강성매트릭스 $[k_C]$ 는 다음 관계식으로부터 유도할 수 있다.

$$[k_C] = [\{k_{G1}\}, \{k_{G2}\}, \dots, \{k_{Gn}\}], \quad \{k_{Gi}\} = [\partial [T]^T / \partial D_j] \{f\} \quad (4)$$

여기에서, 국소좌표계상의 막은 일반화된 평면응력 상태에 있다고 가정할 수 있고, 막의 연속변위 성분을 1개의 다항함수로 가정하면 식(3)에서 초기응력의 효과는 사라지고 단지 일반화된 (5)식과 같은 탄성강성 매트릭스만이 남게 된다.

$$[k_E] = \int_v ([B_0]^T [D] [B_0]) dv \quad (5)$$

(5)식에서 $[D]$ 는 막재료의 직교이방성을 고려한 탄성계수 행렬로 다음 식과 같다.

$$[D] = \frac{1}{1-\nu_x\nu_y} \begin{bmatrix} E_x & E_x\nu_y & 0 \\ E_y\nu_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \quad (6)$$

E_x, E_y 는 각 방향의 탄성계수이고, ν_x, ν_y 는 그 방향의 포와송비, 그리고 G_{xy} 는 전단탄성계수를 나타낸다. 또한, 식(4)에서 정의된 기하강성매트릭스를 유도하기 위해서는 그림4에 정의된 삼각형요소의 기본벡터와 기본량을 유도하고, 변위된 막요소의 국소좌표계와 전체좌표계에서의 단위벡터를 이용하여 다음과 같은 변위변환매트릭스를 유도한다.

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \end{bmatrix} \quad (7)$$

따라서, 식(7)에 정의된 변위변환매트릭스 $[T]$ 를 이용하면 기하강성매트릭스를 유도할 수 있다.¹⁾²⁾

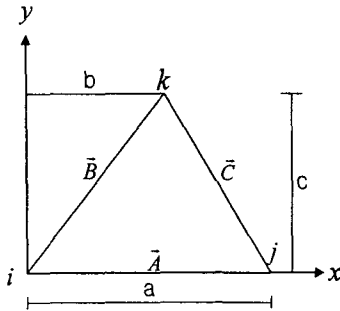


그림4. 요소의 기본벡터($\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$)와 기본량(a,b,c)

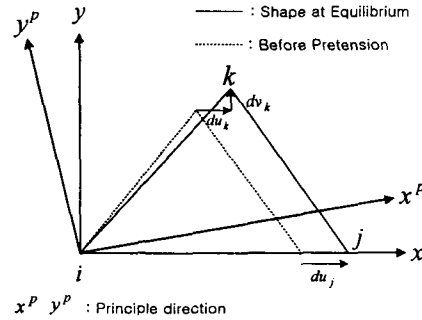


그림5. 국소좌표계에서 막요소 초기변형

준공평형 형상해석에 입력자료로 사용되는 최종재단도의 막응력은 기본가정(3)과 같이 무응력 상태에 있으므로 해석을 위한 초기강성확보 위해 설계응력에 대응하는 초기변형도 또는 초기변위가 필요하게 된다. 이러한 초기강성의 확보는 재단도 제작시 신율보정에 따라 줄어든 길이와 기지의 3차원 경계부 위상 차이에 의해 결정 될 수 있으며 국소좌표계에서 삼각형요소를 사용하여 표현하면 그림5와 같다.

준공평형 형상해석에 필요한 초기변위를 구하기 위해 그림5와 같이 변위벡터를 $du = \{ du_j, du_k, dv_k \}^T$ 라 정의하면 (8) 식과 같은 선형변형도-변위 관계식을 구할 수 있다.

$$\{ \epsilon' \} = [C] \{ du \} \quad (8)$$

$$[C] = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} y_k - y_i & y_i - y_j & 0 \\ 0 & 0 & x_j - x_i \\ x_i - x_k & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix}$$

따라서 설계응력에 대응하는 초기변위는 (8)식을 (2)식에 대입함으로써 구할 수 있게 된다.

4. 수치 해석에

수치해석 예제로써 문헌(5)을 참조하여 그림6과 같이 4변이 고정된 HP형태의 구조물에 관해 2가지 모델을 선정하였다. 막구조물의 곡률에 따른 실제응력의 변화를 살펴보기 위해 대각선 길이와 높이의 비를 평균 곡률 계수로 정의한 후 Model-1은 평균곡률계수 0.05, Model-2는 0.2가 되도록 하였다.

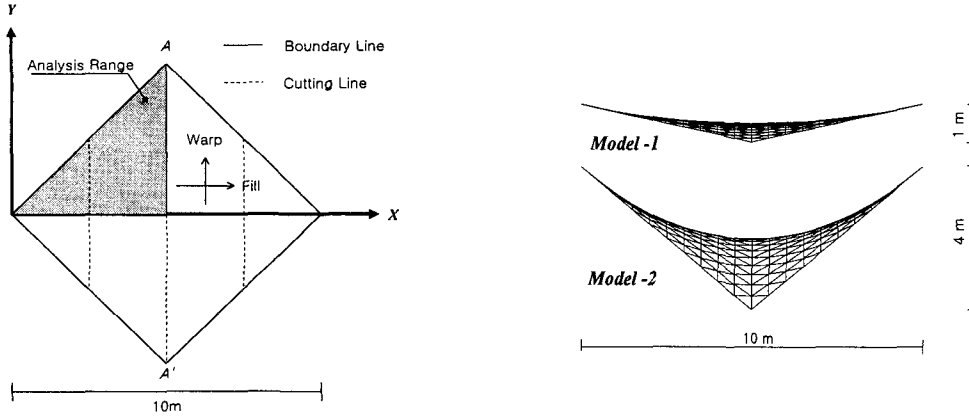


그림 6. 해석 모델의 평면과 입면(A-A')

표 1. 해석에 사용한 막재료 정수

Thickness	$t = 0.08\text{cm}$
Young's Modulus	Warp : $E_x \cdot t = 658 \text{ kg/cm}$ Fill : $E_y \cdot t = 218 \text{ kg/cm}$
Shear Modulus	$G_{xy} \cdot t = 57 \text{ kg/cm}$
Poisson's Ratio	$V_{xy} = 0.87$ $V_{yx} = 0.29$

막구조물의 응력 평가를 위해 형상해석에서 실제응력은 X,Y방향이 동일하게 $\sigma_x, \sigma_y = 5\text{Kg/cm}$ 를 가정하였으며 대칭 구조물이므로 전체의 1/4에 관해 해석을 하였다. 전체 구조물에 관한 초기재단도의 결과는 그림7~8과 같이 나타나게 된다. 평면재단도를 살펴보면 곡률이 적은 Model-1에 비해 Model-2의 접합경계 길이가 심하게 변화되는 것을 알 수 있다.

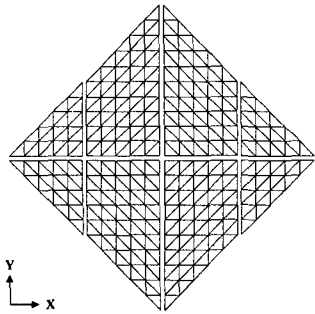


그림 7. Model-1의 평면 재단도 해석결과

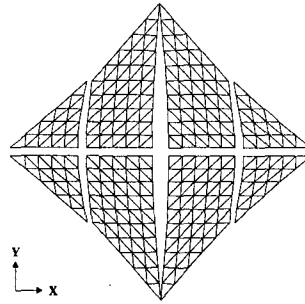


그림 8. Model-2의 평면 재단도 해석결과

전체 구조물의 1/4해석 범위에 있는 초기재단도의 해석결과와 최종재단도 결과를 그림9~10에 나타내었다.

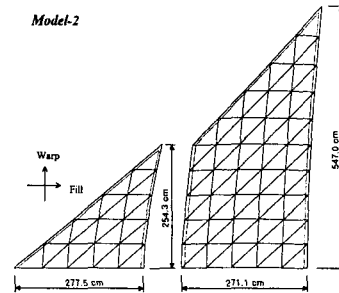
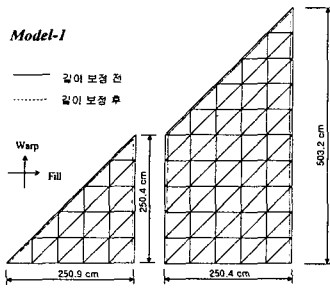


그림 9. 1/4 평면 재단도 해석결과(Model-1)

그림 10. 1/4 평면 재단도 해석결과(Model-2)

재단도 해석에서 초기장력 도입을 위한 길이 보정은 실무에서 사용하는 방법에 따라 초기재단도에서 위사(Fill)방향으로만 양변에서 길이의 1%씩, 총2%를 줄여 최종재단도로 사용하였으며 최종재단도와 형상해석에서 구한 3차원 좌표계와의 위상차이를 초기변위를 주어 준공평형 형상을 구하였다. 본 논문에서는 형상해석에서 가정한 설계응력과 실제응력의 전체적인 응력분포의 차이를 비교하기 위해 (9)식과 같은 막응력 평균계수와 막응력 편차계수 도입하여 평가의 기준으로 하였다.

$$\sigma_{xAVE} = \frac{\sum \sigma'_x}{\sum \sigma^0_x}, \quad \sigma_{yAVE} = \frac{\sum \sigma'_y}{\sum \sigma^0_y}, \quad \sigma_{xDEV} = \sqrt{\frac{\sum (\sigma'_x - \sigma^0_x)^2}{n}}, \quad \sigma_{yDEV} = \sqrt{\frac{\sum (\sigma'_y - \sigma^0_y)^2}{n}} \quad (9)$$

σ_{xAVE} , σ_{yAVE} : X, Y축 막응력 평균계수

σ_{xDEV} , σ_{yDEV} : X, Y축 막응력 편차계수

σ' : 준공평형 해석 후 도입된 실제응력 σ^0 : 형상해석시 가정한 설계응력 n : 삼각형 막요소 개수

막응력 평균계수는 1에 가까울수록 준공시 전체 구조물에 도입된 실제응력의 총량이 형상해석시 가정한 설계응력의 전체량과 비슷하다는 것을 의미하고 편차계수는 영(0)에 가까울수록 실제응력 분포가 설계응력 (5Kg/cm) 에 가까이 분포되어 있다는 것을 의미한다.

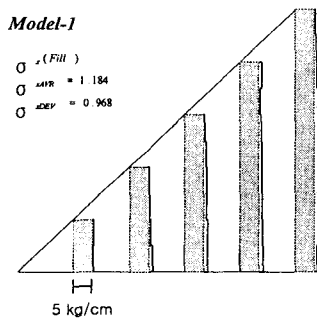


그림 11. Model-1의 준공평형 응력분포 (X)

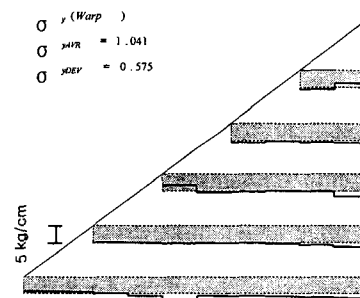


그림 12. Model-1의 준공평형 응력분포 (Y)

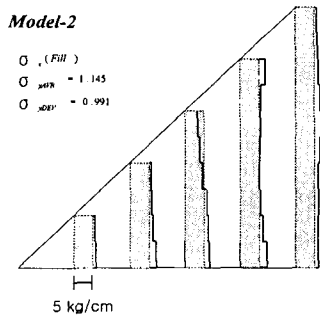


그림 13. Model-2의 준공평형 응력분포 (X)

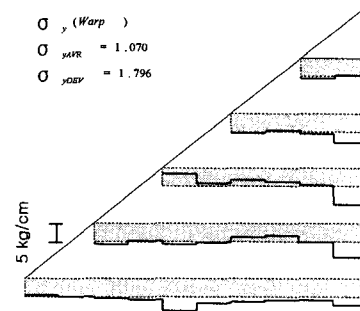


그림 14. Model-2의 준공평형 응력 분포 (Y)

5. 고찰

설계 변수로 곡률에 따라 설계 막응력과 시공 후 도입되는 준공평형 응력의 차이를 선정하여 HP형태의 막 구조물에 관한 준공평형 응력해석을 한 결과 두 모델에서 평균계수가 1보다 커지고 편차계수가 발생하는 것으로 나타났다. 이러한 현상은 다음과 같은 2가지 원인에 의해 주로 발생하는 것으로 사료된다.

- (1) 재단도 해석시 발생하는 오차
- (2) 횡사(Fill)방향 2% 보정시 직교 이방성 재료특성에 의한 오차

모델별 특성을 살펴보면, 평균곡률 0.05인 Model-1의 경우 그림11~12와 같이 막응력 평균계수가 X,Y방향으로 각각1.184(X), 1.041(Y)이고 편차계수는 0.968(X), 0.575 (Y)로 나타났다. 평균계수가 1보다 커지는 원인을 알아보기 위해 그림5에서 단위 삼각형 막요소의 횡방향(Fill) 변형도를 2%로 한 후 선형변형도-응력 관계식을 이용해 실제응력을 구해보면, $\sigma_x = 5.831 \text{ Kg/cm}$, $\sigma_y = 5.104 \text{ Kg/cm}$ 된다.

따라서 설계응력(5Kg/cm)으로 나누어 삼각형 요소 1개의 평균응력을 구해보면 각각 1.162(X), 1.021(Y) 로써 전체 평균응력의 계수와 잘 일치함을 알 수 있다. 즉, 횡사방향(Fill)의 길이 보정량이 막응력에 미치는 영향이 탄성계수와 프와송비에 의해 Y축 강성이 큼에도 불구하고 Model-1에서는 X축에 비해 전체적인 평균계수와 편차계수는 줄어들게 된 것으로 판단된다. 최대·최소 막응력 값을 비교하면 최대값은 비슷하지만 최소값은 강성이 큰 Y축이 2.743으로써 X축 4.692 비해 부분적인 편차응력이 더 발생하는 것으로 나타났다.

평균곡률이 0.2인 모델2에서 막응력 평균계수는 X축 1.145, Y축 1.070으로 Model-1과 유사한 결과로 나타나지만 편차계수는 X축 0.991, Y축 1.796으로 X축에 비해 축강성이 큰 Y방향이 약 1.8배 높았으며 최대·최소 응력도 Y축 방향이 1.067~ 12.57 Kg/cm로 실제응력 변화가 심한 것으로 나타났다.

해석결과의 타당성 검증을 위해 참고문헌(5)의 결과와 비교하여 보았으나 문헌에는 결과에 대한 수치적 자료가 없고 다만 평균응력과 평균편차응력이 그림11~14과 같은 방법으로 수록되어 있어 해석결과에 비교할 때 같은 응력분포로 나타남을 알 수 있었다.

6. 결 론

지금까지 막구조물에 관한 재단도 해석과 준공평형 해석에 관한 이론적 근거를 유도하고 해석 예를 통해 가정된 설계응력과 막재료의 직교이방성 특성을 고려하여 시공후 도입되는 실제응력의 차이에 대해 살펴보았다. 해석결과를 요약하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

- ① 현재 실무에서 사용하는 방법에 의해 초기재단도에서 횡사(Fill)방향으로 길이의 2%을 보정 한 최종재단도로 시공할 경우 전체 구조물에 압축응력이 발생하지 않았으며 따라서 주름현상(Wrinkling)은 발생하지 않는다고 할 수 있다.
- ② 재단도 해석시 오차가 발생 발생한다면 사용 막재의 탄성계수의 영향으로 인하여 준공평형 형상해석시 도입되는 실제응력에 많은 영향을 미치게 되며 오차는 막구조물의 평균곡률이 크면 클수록 더욱 큰 편차응력을 발생 시키게 된다.
- ③ 막 구조물에 도입되는 실제응력이 막재 파단응력의 약 4%~6% 임을 고려하면 예제 해석시 사용한 길이 보정방법으로 곡률이 적은 막구조물에는 적용할 수 있다고 판단된다.

따라서 본 연구에서 제시한 막구조물의 준공평형 형상해석 기법은 실제적인 막재료의 직교이방성 특성을 고려한 해석이므로 막구조물의 시공후 영향을 미치는 주름현상이나 과대응력등의 평가에 유효하게 사용할 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

이 논문은 1999년도 두뇌한국21사업 핵심분야 사업비에 의하여 지원되었음

참 고 문 헌

1. 서삼열, "막구조물의 반복적 최적형상탐색 해석에 관한 연구", 성균관대학교 대학원 박사논문, 1991.
2. 이장복, "공기막 구조물의 형상탐색 해석에 관한 연구", 성균관대학교 대학원 석사논문, 1993.
3. 권택진, 서삼열, 김재열, 이장복, 최호, "막구조물의 최소자승법을 이용한 재단도 해석에 관한 연구", 大韓建築學會論文集 構造系, 15권, 7호, 통권129호, 1999, pp.29-36.
4. 서삼열, "막구조물의 형상탐색 및 최적재단도 해석기법에 관한 연구", 한국전산구조공학회 논문집, 제12권, 제3호, 1999, pp.457-464.
5. 坪田張二, 膜構造の竣工釣り合状態と最適裁斷圖の決定法, 京都大學 博士學位論文, 1991.
6. Barnes, M. R., "Form-Finding and Analysis of Prestressed Nets and Membranes," Computers & Structures, Vol. 30, 1988, pp. 685-695.
7. Tabarrok, B. and Qin, Z., "Form Finding and Cutting Pattern Generation for Fabric Tension Structures," Microcomputers in Civil Engineering 8, Elsevier Science Pub. Ltd, 1993, pp. 377-384.
8. Moncrieff, E. and Topping, B.H.V., "Computer Methods for The Generation of Membrane Cutting Patterns," Computers & Structures, Vol. 37, No. 4, 1990, pp. 441-450.