

크림프를 가진 섬유 캔틸레버의 비선형처짐의 분석적인 해

정재호, 이경우*, 강태진

서울대학교 섬유 고분자공학과, *동아대학교 섬유·의상학부

Analytical Solution of Nonlinear Deflection of Fiber Cantilever with Crimped Shapes

Jae Ho Jung, Kyung Woo Lee*, Tae Jin Kang

Department of Fiber & Textile Science, Seoul National University, Seoul, Korea

Department of Fiber & Cloth Science, Dong-Ah University, Pusan, Korea

1. 서 론

탄성체(elastica)의 대량 처짐(Large Deflection) 방정식의 일반적인 해법에 관한 노력은 최근 30년간에 걸쳐 활발하게 진행되어 왔다. 보(기둥)의 처짐이 큰 경우에는 처짐 방정식이 기하학적으로 비선형 방정식(geometrically nonlinear equation)의 형태를 갖는데 이에 대한 일반해는 아직 알려지지 않고 있는데 특별한 경우로서 점하중을 받는 보(기둥)의 하중을 받기전의 곡률이 상수인 경우에 한하여 타원적분(elliptic integral)을 이용한 분석적인 접근이 가능함이 알려져 있다^{(1),(2)} 한편 크림프를 가진 섬유 캔틸레버의 처짐에 관한 접근은 압축하중시 섬유집합체의 접촉점의 처짐계산⁽³⁾에 구조 변수로 이용되거나 섬유 자체의 특성 평가 및 직물 캔틸레버의 경사, 위사의 처짐에 대한 분석적인 접근을 가능하게 한다. 본 연구는 섬유의 크림프를 곡률반경이 일정한 원호가 교대로 접합된 완전 탄성체로 간주하여 해를 구하고자 하였다.

2. 이 론

Fig 1과같이 섬유의 크림프를 곡률반경이 R인 반원의 연속 접합체로 보고 곡률의 부호의 변화 따라 1, 2, 3, 4, . . . n까지의 번호를 매긴다. 다음에 마지막 n 번째 성분의 중앙에 각도 α 의 점하중 P를 가해준다고 생각한다. Fig 1에 의하면 n은 항상 짝수가 됨을 알 수 있다. 따라서 섬유의 초기 곡률을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{R} : \text{원호가 위로 볼록할 경우}$$

$$-\frac{1}{R} : \text{원호가 아래로 볼록할 경우}$$

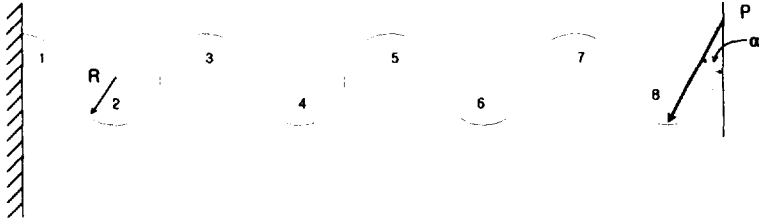


Fig.1 A crimped fiber cantilever under inclined pont load

다음에 fig 2.와 같이 하중을 받은 후의 섬유 구성 요소의 자유물체도(free body diagram)를 생각한다 clamp되어있는 점을 원점으로 하고 임의의 섬유 위치의 수평거리를 x 수직거리를 y라고 하여 자유물체에서의 힘의 평형 방정식과 모멘트 평형 방정식을 생각한다.

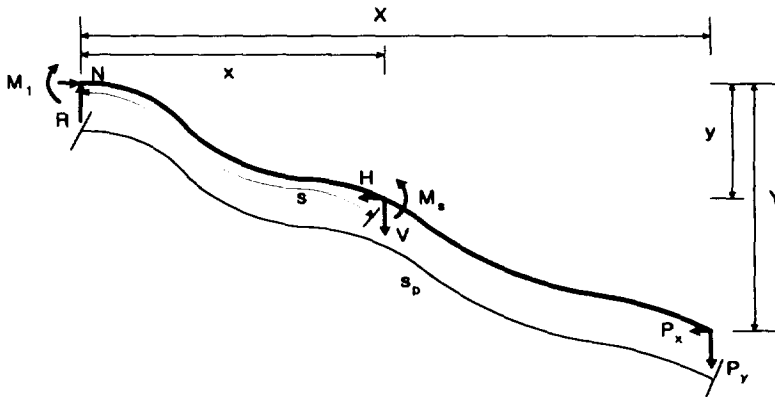


Fig. 2 Free body diagram of fiber element under load.

다음에 초기 곡률을 고려한 다음의 Bernoulli-Euler 처짐 방정식⁽⁴⁾을 적용한다.

$$x - x_0 = \frac{M_s}{EI}$$

따라서 지배방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V = -R = P_x = P \sin \alpha & \quad x = \int_0^s \cos \theta ds & \quad X = \int_0^{s_p} \cos \theta ds \\ H = -N = P_y = P \cos \alpha & \quad y = \int_0^s \sin \theta ds & \quad Y = \int_0^{s_p} \sin \theta ds \end{aligned}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \frac{1}{R} + \frac{1}{EI} \{P_y(X-x) + P_x(Y-y)\} \quad (1)$$

(위로 볼록일 때 + 아래로볼록일 때 -)

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P}{EI} \cos(\theta - \alpha) \quad (2)$$

단, 여기서 s 는 곡선의 길이(arc length), θ 는 경사각($\arctan \frac{dy}{dx}$), EI 는 섬유의 굽힘강성을 나타내고 경계조건은 다음과 같다.

$$\theta=0 \text{ at } x = y = s = 0 \text{ and } \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{R} \text{ at } x = X, y = Y, s = s_p$$

식 (2)의 양변에 $\frac{d\theta}{ds}$ 를 곱하고 적분하여 식(1)과 경계조건을 적용하여 적용하여 해를 구해보면 다음과같이 일련의 점화식의 형태로 주어지는데 그 이유는 섬유의 각 구성요소의 초기 곡률의 부호가 교대로 바뀌기 때문이다. 아래에서 $k = 1$ 에서 n 까지 이고 유도과정에서 각 곡률요소의 섬유길이는 변형중에도 일정하다고 생각하였다.

$$(-1)^{k-1} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2C_k - \frac{2P}{EI} \sin(\theta - \alpha)}} = s - s_{k-1} \quad (3)$$

$$(-1)^{k-1} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{2C_k - \frac{2P}{EI} \sin(\theta - \alpha)}} = x - x_{k-1} \quad (4)$$

$$(-1)^{k-1} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{2C_k - \frac{2P}{EI} \sin(\theta - \alpha)}} = y - y_{k-1} \quad (5)$$

$$C_k = \frac{P}{EI} \sin(\theta_{k-1} - \alpha) \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{2} [(-1)^{k-1} \frac{1}{R} + \frac{1}{EI} \{P_y(X - x_{k-1}) + P_x(Y - y_{k-1})\}]^2$$

$$s_k = 0 \quad (k=0)$$

$$= \frac{\pi R}{2} + (k-1)\pi R \quad (k=2 \sim n-1), x_0 = y_0 = 0 \quad (7)$$

$$= (n-1)\pi R \quad (k=n)$$

$$(-1)^{k-1} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \frac{d\theta}{\sqrt{2C_k - \frac{2P}{EI} \sin(\theta - \alpha)}} = s_k - s_{k-1} \quad (8)$$

$$(-1)^{k-1} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{2C_k - \frac{2P}{EI} \sin(\theta - \alpha)}} = x_k - x_{k-1} \quad (9)$$

$$(-1)^{k-1} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{2C_k - \frac{2P}{EI} \sin(\theta - \alpha)}} = y_k - y_{k-1} \quad (1)$$

위 일련의 식을 적용하여 처짐 곡선을 얻는 방법을 순서대로 설명하면 다음과 같다.

1. 식(7)에 있는 초기조건과 끝처짐 데이터(X, Y)를 이용하여 C_1 을 결정하고 이를 식 (3), (4), (5)에 대입하여 곡선의 길이 $s_0 \sim s_1$ 까지의 처짐 궤적을 구한다.
2. (7)에서 구한 초기조건들과 C_1 을 식 (8), (9), (10)에 대입하여 θ_k, x_k, y_k 값들을 갱신한다.
3. (7)식에서 갱신된 s_k 값과 2에서 구한 값들을 (6)식에 대입하여 C_k 를 갱신한다
4. 1, 2, 3에서 구한 값들을 (3), (4), (5)에 대입하여 $s_1 \sim s_2$ 까지의 처짐 궤적을 구한다.
5. 위와같은 절차를 반복한다

3. 토의 및 결론

지금까지 유도한 방법은 초기 곡률이 상수인 경우에 한하여 적용될 수 있는 방법으로서 초기곡률이 탄성체의 길이에 따라 변하는 경우에는 수치해석적인 접근이나 유한 요소법을 이용한 근사해를 생각해야 한다. 단, 초기 곡률이 상수인 경우 양쪽끝이 clamp되어있는 크립프 섬유에 점하중이 가해지는 경우까지 위 방법을 확장할 수 있다. 단, 하중이 수직방향이 아니면 부정적 문제(statically indeterminate problem)가 되어 미정계수를 결정하기 곤란해진다.

현재 양끝이 클램프 되어있는 경우의 처짐해, 점하중에 의한 3차원 처짐변형으로의 확장, 곡률이 상수가 아닌경우의 수치해석적인 접근방법 및 직물, 부직포에의 응용에 대한 연구가 진행중이다.

4. 참고문헌

- 1) Br H. D. Conway & Ithaca, N. Y. *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME **78**, 7-10 (1956)
- 2) Nageswara Rao, B. & Venkateswara Rao, G. *Z. angew. Math. Mech.* **66**(10), 507-509 (1986)
- 3) Dae Hoon Lee, 'Initial Compressional Behavior of Fiber Assembly', *Seoul National Univ. Ph.D Insertion* (1985)
- 4) Piero Villaggio, "Mathematical Modles for Elastic Structures", *Chap III*, 202-218