

일반적인 곡선좌표계에 기초한 복합재료 적층셸의 유한요소 해석

노 희 열* · 조 맹 효**

Finite Element of Composite Shells Based on General Curvilinear Coordinates

Heeyuel Roh and Maenghyo Cho

Key Words: General tensor, Composite laminate, Naghdi's Shell Theory.

Abstract

Finite element model based on the Naghdi's shell theory in the general tensor-based form is formulated in the present study. Partial mixed variational functional for assumed strain is formulated in order to avoid the severe locking troubles known as transverse shear and membrane locking. The proposed assumed strain element in general tensor Naghdi's shell model provides very accurate solutions for thin shells in benchmark problems. In additions, linear elastic constitutive equations are given in the general curvilinear coordinate system including anisotropic layered structures. Thus laminated composited shell structures are easily analyzed in the present formulation.

1. 서 론

셸 구조물의 유한요소 개발은 지난 30여년간 꾸준히 지속되어왔고 아직도 많은 연구가 이루어지고 있는 분야이다. 유한요소법은 다양한 기하학적 형상, 경계조건, 하중조건에 대해서 적용할 수 있는 방법이므로 형상이 복잡한 셸의 수치해석 방법에 적합하다. Ahmad 등[1]이 감절점 셸 요소를 제안한 이래 곡률을 따르는 일반 곡선 좌표계를 사용하지 않고 직교 좌표계를 사용하여 셸을 해석하는 것이 가능해졌으므로 그 편이성 때문에 감절점 셸 요소의 개발이 그 주종을 이루고 있다. 그러나 감절점 셸 요소는 요소 내에서의 기하학적인 셸의 형상을 근사를 통해 보간하므로 비록 많은 수의 요소를 사용하게 되면 그

해석에서 오차가 줄어들게 되나 실제 복잡한 형상의 셸을 해석하는데는 효율적이지 않을 수 있다. 그러므로 효율적인 해석을 위해 정확한 기하학적인 형상을 고려한 셸 이론에 근거한 유한요소의 개발이 수행되어 왔다.[2,3]

본 연구에서는 일반 곡선 좌표계를 사용한 일반 텐서에 기초한 셸 이론으로부터 1차 전단 변형 셸 유한요소를 개발하고자 한다. 또한 셸의 두께가 얇아지면 일어나는 수치적 문제인 전단 변형 잠김현상과 멤브레인 잠김 현상을 저감시키기 위해서 선별적으로 변형률 가정법을 사용하여 전단 변형 형상과 멤브레인 형상의 잠김을 방지하며 동시에 안정적인 셸 유한 요소를 개발하고자 한다.

2. 정식화

2.1 Naghdi 셸의 변형률

본 연구에서는 Naghdi 셸 이론[4]에 기초하여 유한요소화에 사용되는 변형률을 가정하였다. 일반

* 서울대학교

** 서울대학교

텐서에 기초한 쉘 이론에서는 일반적으로 면내 변형률 텐서를 다음과 같이 나타낸다.

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g'_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \quad (1)$$

변형률 텐서를 변형전의 표면 텐서로 나타내기 위해서는 먼저 변형후의 물리량을 변형전의 물리량으로 표현해야한다. 그림 1은 본 연구에서는 사용되는 기하학적인 형상을 나타낸다. 위치 벡터 \vec{R} 은 변형전의 위치이고 \vec{r} 은 변형후의 위치 벡터이다. 그리고 \vec{a}_3 는 주어진 쉘표면에 수직인 단위벡터이다. 위치벡터 \vec{R} 은 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{R} = \vec{r} + \theta^3 \vec{a}_3 \quad (2)$$

또한 공변기저 벡터는

$$\begin{aligned} \vec{g}_\alpha &= \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} (\vec{r} + \theta^3 \vec{a}_3) \\ &= \vec{a}_\alpha - b_\alpha^\gamma \vec{a}_\gamma \theta^3 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $\vec{a}_\alpha = \vec{r},_{\alpha}$ 와 b_α^γ 는 각각 표면 좌표 곡선의 접선 벡터와 혼합 곡률 텐서를 나타낸다. 또한 그리스 문자는 1과 2의 값만을 가진다. 표면 메트릭 텐서(metric tensor)의 공변 성분은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta, \quad a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta \quad (4)$$

$$b_{\alpha\beta} = -\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta} \quad (5)$$

$$b_\beta^\alpha = b_{\gamma\beta} a^{\alpha\gamma}$$

따라서 면내 변형률 텐서를 정리하면 다음과 같이 면내 성분을 가지는 텐서와 곡률 특성을 나타내는 텐서로 나누어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(g'_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) - (b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})\theta^3 \\ &\quad + \frac{1}{2}(b'_{\alpha\mu} b'_\beta{}^\mu - b_{\alpha\mu} b_\beta^\mu)(\theta^3)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$E_{\alpha\beta}$ 를 두께에 대해 선형으로 가정하면 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta} + \theta^3 \omega_{\alpha\beta} \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}), \quad \omega_{\alpha\beta} = -(b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 와 $\omega_{\alpha\beta}$ 는 멤브레인량과 굽힘량을

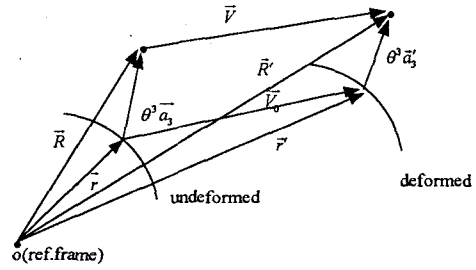


Fig.1 Shell geometry in the undeformed and the deformed configurations

나타낸다. 또한 동일한 방법으로 전단변형량 γ_α 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\gamma_\alpha = 2E_{\alpha 3} = (g'_{\alpha 3} - g_{\alpha 3}) \quad (8)$$

Naghdi 쉘 모델에서 전단변형량 γ_α 는 두께방향으로 일정하다고 가정한다. 식 (7)과 (8)로부터 멤브레인량, 굽힘량, 전단변형량을 변위와 표면 메트릭과 곡률의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_\alpha ||_\beta + u_\beta ||_\alpha - 2b_{\alpha\beta} w) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}[\psi_\alpha ||_\beta + \psi_\beta ||_\alpha - b_\alpha^\lambda (u_\lambda ||_\beta - b_{\lambda\beta} w) \\ &\quad - b_\beta^\lambda (u_\lambda ||_\alpha - b_{\lambda\alpha} w)] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\gamma_\alpha = (w,_{\alpha} + \psi_\alpha + b_\alpha^\lambda u_\lambda) \quad (11)$$

2.2 유한요소화

본 연구에서는 Hellinger-Reissner의 부분 혼합 변분법을 사용하여 쉘의 변형에 관한 유한 요소 모델에 대해 정식화하고 유한 요소 해석을 위해 이산화 하였다. 일반적으로 쉘의 두께가 얇아지면 멤브레인과 전단변형 잠김 현상이 나타난다. 이러한 잠김 현상을 해결하기 위해 변형률 가정법이 사용되어왔다. 본 연구에서는 계산상의 효율을 높이기 위해 Hellinger-Reissner 변분법을 전체 변형률에 적용하지 않고 잠김 현상을 일으키는 멤브레인 부분과 전단 변형 부분에 적용하였다. 본 연구에 사용된 가정된 면내 변형률은 14-매개변수를 아래와 같이 선택하여 사용하였다[5].

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi\eta^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \xi^2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{a\} = P_1 \{a\} \quad (12)$$

가정된 전단변형률 성분에 대해서는 10 - 매개변수를 사용하였다.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & \Phi & \xi\eta^2 & 0 \\ \Phi & \Lambda & 0 & \xi^2\eta \end{bmatrix} \{\beta\} = P_2\{\beta\} \quad (13)$$

여기서 $\Lambda = [1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta]$, $\Phi = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ 이다 위에서 가정된 변형률을 이용하여 유한요소 이산화하고 변분을 취하면 다음과 같은 요소 강성행렬 방정식을 얻을 수 있다.

$$K_b \vec{d} + (G_m^T H_m^{-1} G_m + G_r^T H_r^{-1} G_r) \vec{d} = \vec{f} \quad (14)$$

$$K^e = K_b + G_m^T H_m^{-1} G_m + G_r^T H_r^{-1} G_r \quad (15)$$

$$\therefore K^e \vec{d} = \vec{f}$$

여기서,

$$K_b = \int_{\Omega} \vec{d}^T B_b^T D_b B_b \vec{d} \sqrt{ad} \theta^2$$

$$H_m = \int_{\Omega} \vec{a}^T P_1^T D_m P_1 \vec{a} \sqrt{ad} \theta^2$$

$$G_m = \int_{\Omega} \vec{a}^T P_1^T D_m B_m \vec{a} \sqrt{ad} \theta^2$$

$$H_r = \int_{\Omega} \vec{\beta}^T P_2^T D_r P_2 \vec{\beta} \sqrt{ad} \theta^2$$

$$G_r = \int_{\Omega} \vec{\beta}^T P_2^T D_r B_r \vec{\beta} \sqrt{ad} \theta^2$$

$$\vec{f} = \text{element nodal load vector} \quad (16)$$

2.3 구성방정식

일반 곡선좌표계에서의 구성방정식은 직교좌표계의 좌표와 그 기저 벡터의 항으로 나타낼 수 있다. 곡선좌표계에서의 구성방정식과 직교좌표계에서의 구성방정식은 다음과같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} E_{kl} \quad (17)$$

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (18)$$

여기서 곡선좌표계의 기저벡터는 \vec{g}_i , \vec{g}^i 이고 직교좌표계의 기저벡터는 \vec{e}_i 이다. 위의 구성방정식들과 응력과 변형률 불변의 성질을 이용하면 다음과 같은 일반화된 구성방정식을 일반 곡선좌표계에서 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= C^{ijkl} E_{kl} \\ &= C_{pqrs} (\vec{g}^i \cdot \vec{e}_p) (\vec{g}^j \cdot \vec{e}_q) \\ &\quad (\vec{g}^k \cdot \vec{e}_r) (\vec{g}^l \cdot \vec{e}_s) E_{kl} \end{aligned} \quad (19)$$

3. 해석 결과

본 장에서는 수치예의 검증을 통해서 개발된 Naghdi의 쉘 유한요소의 성능을 살펴보았다. 이미 성능 검증을 위해 많이 사용되고 있는 Benchmark 문제를 수치 예로 수행하였다.

3.1 원통형 쉘에 일정한 압력이 가해지는 문제 그림2의 양단이 고정된 경우로 물성치, 기하학적 특성은 다음과 같다. $E_1 = 7.5 \times 10^6$, $E_2 = 2.0 \times 10^6$, $G_{12} = 1.25 \times 10^6$, $G_{23} = G_{13} = 0.625 \times 10^6$, $\nu = 0.25$, $R = 20$, $L = 20$, 압력은 $P = 2.0404$ 로 가했다. 본 유한요소의 한방향 적층판의 변위는 0.0003744 값으로 수렴한다. 이 값은 Timoshenko의 이론적 해에 근거한 0.000367[6]과 거의 일치한다. 그림3은 R/t가 20인 직교 적층판의 반경 방향의 가장 큰 변위를 메쉬 수를 늘려가면서 그 결과의 수렴성을 기존의 CSHEL9 방법[7]과 HLCTS 방법[8]을 사용한 유한요소와 비교한 것이다. 그림에서 보는 바와같이 기존의 연구들과 잘 일치함을 알 수 있다.

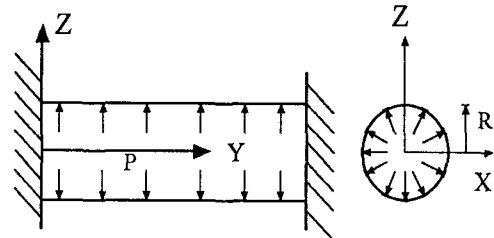


Fig.2 Cylindrical shell under internal pressure

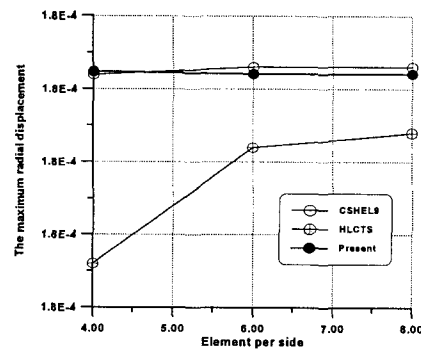


Fig.3 Displacement of clamped composite cylindrical shell with R/t =20 and [0/90/90/0]

그림 4는 원통형 쉘의 균일 요소와 비균일 형상을 나타낸다. 그림 5은 양단이 고정되고 두께비 (R/t)가 100인 복합재료 원통형 쉘에 내부압력이 가해질 때 y축 방향을 따른 반경방향으로의 변위를 나타낸다. 균일 요소와 비균일 요소의 결과값을 비교하기 위해 6×6 요소를 사용하였다. 그림에서 보여지는 바와 같이 비균일요소의 결과와 균일요소 결과가 매우 잘 일치함을 알 수 있다

4. 결론

본 연구에서는 기하학적으로 정확한 쉘 유한요소를 일반 곡선 좌표계에 대해 개발하였다. 두께가 얇아지면 발생하는 잠김현상을 해결하기 위해 가경된 변형률 방법을 사용하였으며 또한 계산상의 효율을 높이기 위해 부분 혼합 변분법을 사용하였다. 앞에서 살펴본 바와 같이 기존의 유한요소에 비해 수렴성이 우수함을 알 수 있었고 또한 잠김 현상과 매쉬의 뒤틀림 등에도 민감하지 않은 성능을 갖고 있음을 보았다. 본 연구에서 개발된 요소는 임의의 형상을 갖는 복합재 적층셸의 해석에 효과적으로 적용될 수 있다.

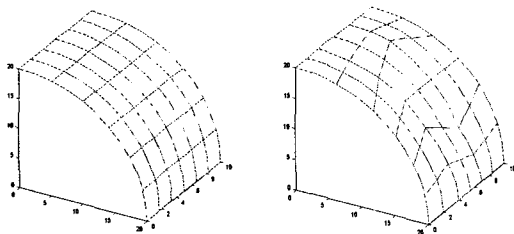


Fig4 Cylindrical shell configurations of uniform mesh and distorted mesh

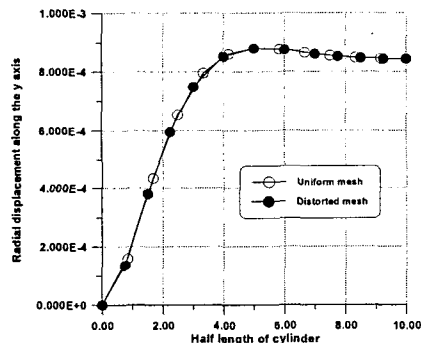


Fig.5 The comparison of uniform mesh and distorted mesh result with 6×6 elements and [0/90/90/0]

후 기

이 논문은 2000년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1).Ahmad,S.Iron,B. and Zienkiewicz,O"Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements," Int. J. for Numerical Method in Engineering, Vol.2, ,1970, pp.419-451.
- (2).Simo,J.Cand Fox,D.D."On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parameterization," Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol.72, 1989, pp.267-304.
- (3).Simo,J.C. Fox,D.D. and Rifai,M.S."On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part II: The Linear Theory ; Computational Aspects," Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol.73, 1989, pp.53-92.
- (4).Naghdi,P.M. *Foundations of Elastic Shell Theory*, Progress in Solid Mechanics, Vol.4, Edited by Sneddon,I.N.
- (5).Rhiu,J.J. and Lee,S.W."A new efficient mixed formulation for thin shell finite element models", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.24, 1987, pp.1325-1334.
- (6).Timoshenko,A. and Woinowsky-kreger,S. *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hall,New York,1959.
- (7).Haas,D.J. and Lee,S.W.."A nide-node assumed-strain finite element for composite plates and shells",Computers & Structures 1987,Vol.26,pp.445-452
- (8) To,C.W.S. and Wang,B."Hybridstrain-based three-node flat triangular laminated composite shell elements", Finite Elements in Analysis and Design, Vol.28, 1998, pp.177-207.