물성치의 불확실성을 고려한 복합재료 적층판의 최적 설계

김 태 욱*

Optimal Design of Composite Laminated Plates with the Uncertainty in Material Properties Considered

Tae-Uk Kim

Key Words: Thickness Optimization(두께 최적화), Convex Modeling(컨벡스 모델링)

Abstract

Although extensive efforts have been devoted to the optimal design of composite laminated plates in recent years, some practical issues still need further research. One of them is the handling of the uncertainties in material properties, which were ignored in most researches in the past. In this paper, the convex modeling is used in calculating the failure criterion, given as constraint, to consider the uncertain material properties in the thickness optimization. Numerical results show that the optimal thickness increases when the uncertainties of elastic moduli considered, which shows such uncertainties should not be ignored for safe and reliable designs.

1. 서 론

섬유강화 복합재료 적층판은 기존의 등방성 재료에 비해 강성/무게, 강도/무게비가 뛰어나고, 사용 목적에 따라 여러 인자를 조정할 수 있는 설계의 유연성이 우수하여 항공기, 잠수함, 자동차 등 경량화가 요구되는 부품 재료로 널리 사용되고 있다. 따라서 복합재료 적층판의 최적 설계에 대해서는 많은 연구가 이루어졌는데, 대부분이 물성치가 고정된 값을 가진다는 가정하에 이루어졌다. 그러나 복합재료 적층판의 물성치는 항상 어느 정도의 불확실성 또는 편차를 보이기 마련인데, 이는 강화 섬유의 부적절한 배열, 섬유와 매트릭스의 불완전한 접합 등 생산 공정상의 몇 가지 요인에서 비롯된다고 할 수 있으며 강성이나 강도에 반드시 영향을 미치게 된다. 따라서 설계의 안전성과 신뢰성을 확보하기 위해서는 이러한 물성치의 불확실성을 반드시 고려해야 할 것이다.

본 논문에서는 이러한 불확실성을 고려하기 위한 방법으로 컨벡스 모델링(convex modeling)[1~5]을 사용하게 된다. 즉, 두께 최적화 과정에서 구속 조건으로 사용되는 파괴 조건의 계산에 이를 도입하여 물성치의 불확실성을 설계 단계에서 고려할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

2. 최적화 이론

2.1 두께 최적화

두께 최적화에서는 각 층의 두께를 설계 변수로 하여 전체 적층 평판의 두께를 최소화하게 된다. 즉 임의의 외부 하중이 작용할 때 주어진 구속 조건을 만족하는 최소의 두께를 구하게 되는데 식 (1)은 이를 정식화한 것이다.

* 한국항공우주연구소

$$\text{Minimize} \sum_{i=1}^{NL} t_i$$

$$\text{subject to } G_j(X) \le 0 \quad j = 1, \cdots, m \quad (1)$$
$$t_i^l \le t_i \le t_i^u \quad i = 1, \cdots, NL$$

여기서 $G_j(X)$는 구속 조건인 파괴 조건식을 나타내며, m은 파괴 조건식이 계산되는 지점의 수이다. 또한 t_i^l과 t_i^u는 층의 두께가 가질 수 있는 상, 하한값을 나타낸다.

파괴 조건은 Hoffman의 식을 사용하며, 모든 요소의 Gauss 적분점의 수직선상에 위치하는 층의 상, 하단에서 계산되어 만족 여부를 조사하게 된다. 최적화 알고리듬으로는 유용 방향법(method of feasible direction)[6]을 쓰게 된다.

2.2 컨벡스 모델링을 통한 파괴 조건의 계산

컨벡스 모델링은 불확실성을 가지는 양을 다루기 위해, 확률분포함수가 필요한 확률론적인 접근법과 달리 분포 범위에 대한 정보만을 필요로 하는 방법이다. 예를 들어 파괴 조건식의 최대값을 구하고자 할 때, 물성치의 분포 범위에 대한 정보로부터 물성치의 편차가 존재하는 컨벡스 집합을 만들고, 파괴 조건식을 이들 편차에 대해 선형화하게 된다. 따라서 파괴 조건식의 최대값은 편차로 이루어지는 컨벡스 집합의 경계에 존재하게 되므로 계산량을 줄이며 근사적으로 물성치의 불확실성을 반영할 수 있게 된다.

본 논문에서는 E_L, E_T, ν_{LT}, G_{LT}가 공칭값을 중심으로 일정 범위 내에 분포한다고 가정하였다. 이 때 구속 조건은 다음과 같이 이들 물성치의 함수로 나타낼 수 있다.

$$G = G(E_1, E_2, E_3, E_4) \quad (2)$$

$E_1 = E_L$, $E_2 = E_T$, $E_3 = \nu_{LT}$, $E_4 = G_{LT}$로 표시했고, 각 계수는 파괴 조건에 직접 나타나지는 않으나 강성 행렬을 통해 그 영향을 미친다. 한편 각 물성치의 공칭값을 E_i^0라 하면 $E_i = E_i^0 + \delta_i$로 나타낼 수 있고, 그 때의 파괴 조건식 $G(E_i^0 + \delta_i)$는 δ_i의 일차항까지를 고려한 Taylor 전개에 의해

$$G(E_i^0 + \delta_i) = G(E_i^0) + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial G(E_i^0)}{\partial E_i} \delta_i \quad (3)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 해석의 다음 단계로 이들 편차가 존재하는 컨벡스 집합을 만들어야 한다. 물성치의 범위가 $E_i^L \le E_i \le E_i^U$라고 할 때, 공칭값과 최대 편차는 식 (4)로 정의할 수 있다.

$$E_i^0 = \frac{1}{2}(E_i^U + E_i^L), \quad \Delta_i = \frac{1}{2}(E_i^U - E_i^L) \quad (4)$$

따라서 E_i는 식 (5)로 나타낼 수 있다.

$$E_i = E_i^0 + \delta_i, \quad |\delta_i| \le \Delta_i \quad (5)$$

컨벡스 집합을 만들기 위해서 $|\delta_i| \le \Delta_i$에 의해 만들어지는 상자(box)형태의 영역을 포함하는 타원체(ellipsoid) 모양의 집합을 가정한다.

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\delta_i^2}{e_i^2} \le 1 \quad (6)$$

e_i는 타원체의 체적을 최소로 하며, 식 (5)의 영역의 모서리 점들($\delta_i = \pm\Delta_i$)이 타원체의 경계에 존재해야 한다는 조건으로부터 구할 수 있다. 결론적으로 불확실성을 가지는 물성치가 δ_i의 편차를 가질 때, 파괴 조건식의 최대값을 구하는 문제는 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$G_{\max} = \underset{\{\delta\} \in C(e)}{Max} \left(G(E_i^0) + \{f\}^T \{\delta\} \right) \quad (7)$$

$$C(e) = \left\{ \delta : \sum_{i=1}^{4} \frac{\delta_i^2}{e_i^2} = 1 \right\} \quad (8)$$

식 (7)의 최대값은 Lagrange multiplier를 도입하여 풀 수 있고, 최종적인 형태는 다음과 같다.

$$G_{\max} = G(E_i^0) + \sqrt{\sum_{i=1}^{4} \left(e_i \frac{\partial G(E_i^0)}{\partial E_i} \right)^2} \quad (9)$$

3. 수치 결과

최적화 과정에 필요한 적층 평판의 해석 도구로 Reddy의 고차 전단 이론[7]에 기초한 유한요소법을 사용하였다. 이 방법에서는 변위 u, v를 두께 방향, z의 3차 다항식으로 가정한 뒤 평판 상, 하단에서의 경계 조건을 적용하여 변위장을 결정하게 된다. 따라서 지그재그(zigzag) 분포를 보이는 u, v를 근사적으로 나타내고, 두께 방향에 대해 포물선 형태의 전단 응력 분포를 얻게 되어 전단 보정계수(shear correction factor)가 불필요하게 된다.

해석 대상으로는 중립면을 중심으로 적층 순서와 층의 두께가 대칭인 대칭형 적층 평판(symmetric laminated plate)을 고려하였다. 해석 모델은 대칭성을 이용하여 전체 중립면의 1/4을 16개의 요소로 분할하였다. 4절점 요소를 사용하였으며, 강성 행렬은 감차 적분(reduced integration)을 이용하여 구하였다. 수치 결과에 이용된 물성치 및 설계 자료는 다음과 같다.

- 두께의 초기값 : $t_i = 0.1''$
- 적층 평판의 크기 : $16'' \times 16''$
- 층 두께의 범위 : $0.005'' \leq t_i \leq 0.1''$
- 작용 하중 : 사인(sine) 하중, 균일 하중
- 경계 조건 : 단순지지(s.s.), 고정단(clamped)
- 물성치 및 강도(T300/5208 graphite/epoxy)

$$E_L = 19.2 \times 10^6 psi\ ,\ E_T = 1.56 \times 10^6 psi$$
$$G_{LT} = 0.82 \times 10^6 psi\ ,\ G_{TT} = 0.49 \times 10^6 psi$$
$$\nu_{LT} = 0.24\ ,\ \nu_{TT} = 0.49$$
$$X_T = 219.5 \times 10^3 psi\ ,\ X_C = 246.0 \times 10^3 psi$$
$$Y_T = Z_T = Y_C = Z_C = 6.35 \times 10^3 psi$$
$$R = 9.80 \times 10^3 psi\ ,\ S = T = 12.6 \times 10^3 psi$$

또한 적층 순서로는 임의로 가정한 다음의 값을 사용하였고, 계산상의 편의를 위해 불확실성을 가지는 물성치는 모두 공칭값으로부터 최대 ± 10%의 편차를 보인다고 가정하였다.

Laminate A : $[0/90]_s$

Laminate B : $[\pm 45/0/90]_s$

Laminate C : $[\pm 45/90/0/45/90/-45/0]_s$

Table 1은 최적화의 결과로 얻은 각 적층 평판의 목적 함수(두께)를 비교한 것이다. Optimum 1과 Optimum 2는 각각 물성치의 불확실성을 고려했을 때와 그렇지 않았을 때의 결과를 나타내며, 목적 함수의 증가량, Δh는 다음 식을 따른다.

$$\Delta h = \frac{\text{Optimum 1} - \text{Optimum 2}}{\text{Optimum 2}} \times 100(\%) \qquad (10)$$

Table 1 Comparison of Objective Functions

(a) Sinusoidal load, s.s.

Laminate	Optimum 1	Optimum 2	Δh
A	0.3460	0.3160	9.49
B	0.3164	0.2912	8.65
C	0.3564	0.3238	10.07

(b) Sinusoidal load, clamped

Laminate	Optimum 1	Optimum 2	Δh
A	0.2262	0.2022	11.87
B	0.2576	0.2334	10.37
C	0.2970	0.2610	13.79

(c) Uniform load, s.s.

Laminate	Optimum 1	Optimum 2	Δh
A	0.3666	0.3326	10.22
B	0.3944	0.3596	9.68
C	0.4360	0.3952	10.32

(d) Uniform load, clamped

Laminate	Optimum 1	Optimum 2	Δh
A	0.2646	0.2288	15.65
B	0.3016	0.2754	9.51
C	0.3500	0.3108	12.61

모든 경우에 대해 물성치의 불확실성을 고려했을

때, 최적해로 더 큰 값을 얻었으며 그 증가폭은 적층 순서, 하중, 경계 조건에 따라 달라졌다. 증가폭을 보면 대략 8~15% 정도이며, 이로부터 설계의 안전성과 신뢰성을 위해서는 물성치의 불확실성을 고려하는 것이 필요함을 알 수 있다. 또한 Table에는 나타내지 않았지만 최적해로 얻은 각 층의 두께를 보면 불확실성을 고려한다고 해서 그 값이 일률적으로 증가하지는 않았는데, 이로부터 안전율(safety factor)을 이용한 설계가 그리 효율적이지 않음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 물성치의 불확실성을 고려하여 복합재료 적층 평판의 최적 설계를 수행하였다. 이를 위해 도입한 컨벡스 모델링 기법은 확률론적인 방법과 달리, 불확실성을 가지는 물성치의 분포 범위에 대한 정보만으로 이의 영향을 파괴 조건의 계산에 반영할 수 있는 방법이다. 정확한 물성치의 분포 양상을 알 경우에는 확률론적인 방법에 비해 정확도가 떨어진다고 볼 수 있으나, 현실적으로 엄밀한 분포 함수를 구하기가 어렵고 구속 조건의 계산 횟수가 상당히 많다는 점에 착안하면 최적화 과정에서 물성치의 불확실성을 고려하는 방법으로는 컨벡스 모델링이 보다 적합하다 하겠다. 이상의 최적화 기법은 자유 경계면(free edge)을 갖는 파괴 문제나 동적 거동 등의 다양한 사례에 적용 가능할 것으로 보이며 이에 대한 연구가 진행중이다.

참고문헌

(1) Ben-Haim, Y. and Elishakoff, I., 1990, *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*, Elsevier, Amsterdam.

(2) D. Givoli and I. Elishakoff, 1992, "Stress Concentration at a Nearly Circular Hole with Uncertain Irregularties," *J. Appl. Mech.*, Vol. 59, pp. 65~71.

(3) I. Elishakoff and P. Colombi, 1993, "Combination of Probabilistic and Convex Models of Uncertainty When Scarce Knowledge Is Present an Acoustic Excitation Parameters," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 104, pp. 187~209.

(4) Ben-Haim, 1993, "Failure of an Axially Compressed Beam with Uncertain Initial Deflection of Bounded Strain Energy," *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 31, pp. 989~1001.

(5) I. Elishakoff, 1994, "A Deterministic Method to Predict the Effects of Unknown-but-Bounded Elastic Moduli on the Buckling of Composite Structures," *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 111, pp. 155~167.

(6) Vanderplaats, G. N., *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill, New York, 1984.

(7) Reddy, J. N., 1984, "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates," *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 745~752.