

# 전단변형을 고려한 개방형 단면 복합재료 보의 유한요소 구조해석

정성남\*

## Finite Element Structural Analysis of Open-Section Composite Beams Considering Transverse Shear

Sung Nam Jung

**Key Words:** open section, thin-walled, composite beams, transverse shear, warping, constrained warping

### Abstract

In this paper, a finite element structural analysis for thin-walled open-section composite beams with elastic couplings has been performed. The analysis includes the effects of transverse shear across beam sections, torsion warping and constrained warping. Reissner's semi-complementary energy functional is used to obtain the beam stiffness coefficients. The bending and torsion related warpings and the shear correction factors are obtained as part of the analysis. The resulting theory describes the beam kinematics in terms of the axial, flap and lag bending, flap and lag shear, torsion and torsion-warping deformations. The static response has been validated against finite element predictions, closed form solutions, and experimental data for rectangular solid and I-beams with elastic couplings. The free vibration results are also compared with available literature.

### 1. 서론

개방형 단면 보의 주요 굽힘응력을 받는 부재를 중심으로 일찍부터 일반 토목 및 건축 구조용으로 이용되어 왔다. 최근에는 복합재료의 이방성과 개방형 단면 보의 기하학적 특성 등을 적절히 혼합하여 기존의 재료로는 불가능한 혁신적인 형태의 구조물이 설계되어 운용되는 경우가 나타나고 있다. 이러한 대표적인 적용 사례로는 헬리콥터 분야에서 복합재료 유연보(flexbeam) 등을 이용하여 베어링의 기능을 대체시킨 무베어

링 로우터 시스템을 들 수 있다.

일반적으로 보 구조물은 단면의 제원에 비하여 길이가 큰 특징을 이용하여 1차원 보로 해석하는 것이 보편화되어 있다. 이 경우 보의 2차원 단면을 적절히 모델링하고 이로부터 단면상수를 결정하는 것이 (Euler-Bernoulli 보) 결과적인 해의 정확도를 가늠하는 척도가 된다. 특히 재료가 복합재료로 이루어진 경우에는 재료의 이방성을 고려해야하며, 전단탄성 계수 대 일방향 강성 계수가 커서 단층내의 전단변형의 중요성이 상대적으로 크게 나타난다. 또한 개방형 단면 보의 해석에서는 비틀림 워핑 및 워핑구속(warping restraint) 효과 등을 정확히 모델링해야 할 필요가 있다. 복합재료 보에 대한 최근의 연구동향

\* 전북대학교 자동차신기술연구소

및 현재 모델의 한계점, 그리고 향후 중점적으로 추진되어야 할 연구부분에 대해서는 Hodges[1], Jung 등[2]에 제시되어 있다.

본 연구에서는 개방형 단면을 갖는 복합재료 보의 통합 해석모델을 정립하고, 유한요소법을 적용하여 굽힘-비틀림과 인장-비틀림의 연성이 있는 개방형 단면 복합재료 보 구조물을 해석한다. 복합재료 보의 힘-변위 관계식은 Reissner의 반보족 에너지 함수(semi-complementary energy functional)를 이용하여 얻으며[3], 별다른(ad-hoc) 가정에 의존하지 않고 단면에서의 힘평형 조건식으로부터 전단응력 성분들을 결정하도록 구성하였다. 이 경우 단면에 대한 비균일 전단응력 분포를 해석적으로 구하게 되는 효과가 있다. 본 연구를 통하여 개발되는 보 이론은 개방형 단면 보의 해석상 매우 중요한 요소인 단면의 자유워핑(free warping), 구조물의 구속 경계에 의한 워핑제한 효과, 그리고 보 단면의 전단 변형 효과와 보의 두께 증가에 따른 굽힘 강성의 변화를 기술할 수 있다. 결국 본 해석 모델은 크게 보아 Timoshenko 보 이론과 Vlasov 보 이론을 통합한 형태로 요약할 수 있다.

## 2. 이론

복합재료 보에 외력이 작용할 경우 재료의 이방성에 따라 운동 상호간의 연성이 나타나게 되며, 적절한 보 모델이라면 이러한 보의 연계거동을 제대로 기술할 수 있어야 한다. Fig. 1은 길이가  $l$ 인 개방형 단면 보의 좌표계 및 변위 성분들을 보여주고 있다. 여기서 보의 변형은  $x, y, z$  좌표축을 따라 각각 인장( $U$ ), 수직 및 수평 방향 변위( $V, W$ ), 그리고 보의 탄성축에 대한 회전 성분인 비틀림 변형  $\phi$ 로 구분한다.

보의 벽면은 2차원 각(shell) 요소로 구성되어 있으며, 두께 방향에 대한 중심선을 따르는  $s$ -축과 여기에 수직인  $n$ -축을 따라 각 변형 성분  $v_s^0$ 와  $v_n^0$ 을 정의한다. Fig. 2는 각 요소에 작용하는 합응력 및 모멘트 그리고 전단하중 성분들을 표시하고 있다. 2차원 각 변형 성분은 기하학적 고찰에 의거하여 다음과 같이 1차원 보의 변형 성분으로 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_s^0 &= Vy_{,s} + Wz_{,s} + r\phi \\ v_n^0 &= Vz_{,s} - Wy_{,s} - q\phi \end{aligned} \quad (1)$$

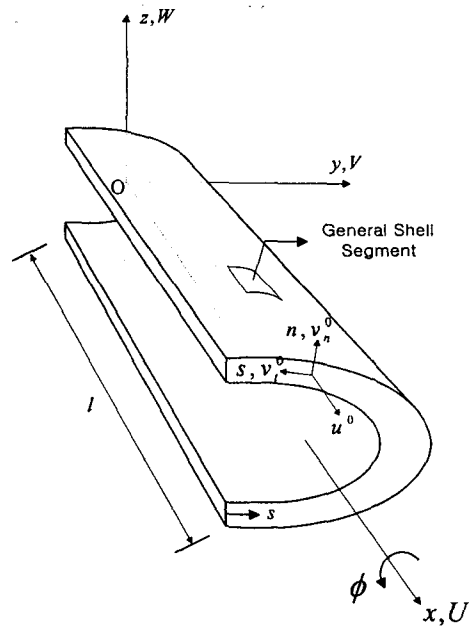


Fig. 1 Geometry and coordinate systems of an open-section beam.

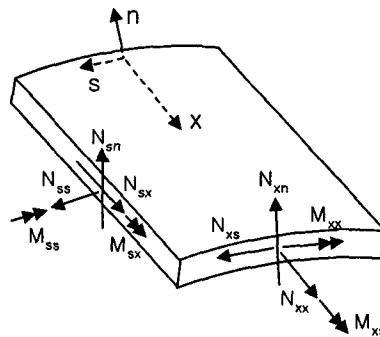


Fig. 2 Shell forces and moments.

이 때,  $r$ 과  $s$ 는 보의 탄성축으로부터 단면 내 임의의 지점에 대한  $s, n$  좌표상의 이격 거리를 각각 나타낸다. 한편, 2차원 각 요소에 대한 힘 성분들과 이에 대응되는 변형률 성분들에 대한 관계식은 고전 적층판 이론(Classical Lamination Plate Theory)에 입각하여 구한다. 단면의 각 요소에 대한 변형률 성분들은 식(1)과 보의 변형기하학(kinematics)을 이용하여 1차원 보에 대한 변형 성분으로 표시할 수 있다. 복합재료 보의

최종 지배 운동 방정식은 Reissner의 반보족 에너지 함수를 이용하여 구한다. 이를 행렬 방정식 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} F \\ Q_y \\ Q_z \\ T_s \\ M_y \\ M_z \\ M_\omega \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} \\ & & & & K_{55} & K_{56} & K_{57} \\ & & & & & K_{66} & K_{67} \\ & & & & & & K_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U, x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \phi, x \\ \beta_y \\ \beta_z \\ \phi, xx \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서 하중성분  $F$ 는 인장력,  $Q_y$ 와  $Q_z$ 는 각각  $y$  및  $z$  방향의 전단력,  $T_s$ 는 St. Venant 토오크,  $M_y$ 와  $M_z$ 는 수직 및 수평방향 굽힘 모멘트, 그리고  $M_\omega$ 는 Vlasov 워핑 모멘트이다. (2)식에 보이는 바와 같이 가장 일반적인 복합재료 보의 경우는 최대 28개의 독립된 강성 계수로 표시되며, 적층 조건에 따라 특정 위치의 강성계수가 영이 되는 등 재료의 연성 형태가 달라진다. 예를 들어 대칭 적층 복합재의 경우는 인장-전단 연성항  $K_{12}$ ,  $K_{13}$ 와 굽힘-비틀림 연성항  $K_{45}$ ,  $K_{46}$  등이 존재한다.

### 3. 결과 및 검토

개방형 단면 보의 대표적인 형태인 I-형 단면의 복합재료 보에 대한 해석을 수행하였다. 해석에 이용된 보의 Chandra 등[4]이 실험연구에 이용한 것으로서 폭이 1 in, 높이가 0.5 in이며, 보의 길이가 30 in인 외팔 보 형태이다. 하중이 가해지는 끝단에는 원하는 방향으로 적절히 하중을 가할 수 있도록 철강재 등의 구조물로 보강하였다. 이러한 형상은 무배어링 헬리콥터 블레이드 시스템에서 피치운동을 자유롭게 해 주는 유연보를 모사한 경우와 유사한 구조이다. 하중이 가해지는 지점에 대한 해석상의 경계조건은  $\phi' = 0$  (워핑구속)이다[4]. 제작에 이용된 복합재료는 AS4/3501-6 흑연-에폭시이며, I형 단면의 상하 플랜지는  $[(0/90)_2/90/0/\theta_2]_T$ , 웨브는  $[(0/90)_2]_S$ 로 적층하였다.

Fig. 3은 플랜지에서 복합재료의 적층각  $\theta$ 가 15°인 대칭으로 적층된 I-형 보의 끝단에 단위 토오크 하중을 가했을 때 보의 길이 방향에 따른 비틀림 변형의 변화를 도시한 것이다. 본 해석 결과는 보의 길이 방향으로 균일하게 분할된 8개

의 유한요소를 사용하였다. 그림에서는 본 해석 결과와 함께 Chandra 등[4]의 실험 결과와 MSC/NASTRAN의 2차원 유한요소 해석 결과를 비교하여 수록하였다. MSC/NASTRAN 해석은 CQUAD4 요소를 이용하였으며, 총 1200개의 유한요소와 1331개의 계산절점이 사용되었다. Fig. 4는 본 계산에 이용된 I형 보의 유한요소 형상을 보여주고 있다. 하중이 작용하는 끝단은 워핑구속 조건을 만족시켜주기 위해 다중점 구속 (Multi Point Constraint) 조건을 가하였다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 본 연구의 복합재료 보 해석결과는 2차원 판/각 유한요소 해석 결과와 매우 잘 일치하고 있으며, 실험 값은 계산결과에 비해 최대 15% 정도의 오차를 보여주고 있다. 이들 오차는 복합재료 보에 대한 제작공정 및 경계조건의 적절한 부가, 그리고 실험과정 등에서 발생된 것으로 생각된다. 계속하여 Fig. 5는 같은 형상의 복합재료 I형 보에 대해 복합재료의 적층각 변화에 따른 끝단 비틀림 변위의 변화를 나타낸 것으로서 본 연구의 해석 결과와 NASTRAN의 판/각 요소를 이용한 유한요소 해석 결과를 비교하여 나타냈다. 두 해석 결과는 최대 3%오차 내에서 잘 일치하고 있음을 보여주고 있다.

### 4. 결론

본 연구에서는 개방형 단면 형상을 갖는 복합재료 보에 대한 1차원 보 해석 모델을 개발하고 이의 유용성을 입증하기 위한 비교연구를 수행하였다. 개발된 보 이론은 재료의 이방성과 이에 따른 운동 상호 방향간의 연성 효과, 벽면의 두께 효과, 단면 워핑, 워핑 구속, 그리고 보의 전단변형 효과를 모두 고려할 수 있도록 구성하였다. 보의 지배 방정식은 Reissner의 반보족에너지 함수를 이용하여 구성하였으며, 힘 평형식으로부터 단면의 전단응력 분포를 해석적으로 구하였다. 개발된 보 이론의 신뢰성을 확보하기 위하여 I형 단면을 갖는 복합재료 보를 해석하고 기존의 실험 연구 및 정밀 상용 유한요소 해석 결과와 비교 연구를 수행하였다. 이상의 연구결과 본 해석 모델은 복합재료 보의 비고전적 효과들을 매우 효율적으로 고려하고 있음을 보였다.

## 참고문헌

- (1) Hodges, D. H., "Review of Composite Rotor Blade Modeling," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 28, No. 3, 1990, pp. 561-565.
- (2) Jung, S. N., Nagaraj, V. T., and Chopra, I., "Assessment of Composite Rotor Blade Modeling Techniques," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 44, No. 3, 1999, pp. 188-205.
- (3) Murakami, H., Reissner, E., and Yamakawa, J., "Anisotropic Beam Theories with Shear Deformation," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, No. 3, 1996, pp. 660-668.
- (4) Chandra, R., and Chopra, I., "Experimental and Theoretical Analysis of Composite I-Beams with Elastic Couplings," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 12, Dec. 1991, pp. 2197-2206.

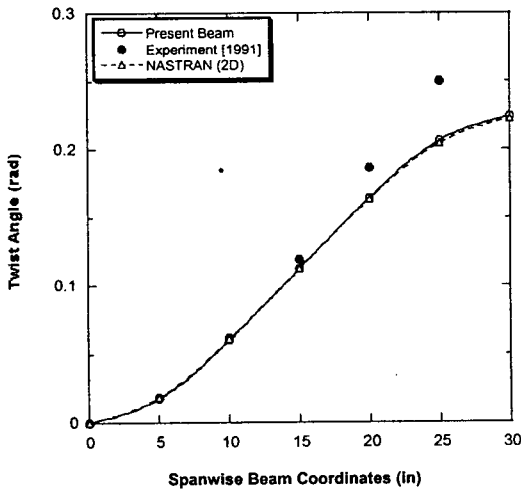


Fig. 3 Comparison of twist angles for a symmetric I-beam under unit tip torque.

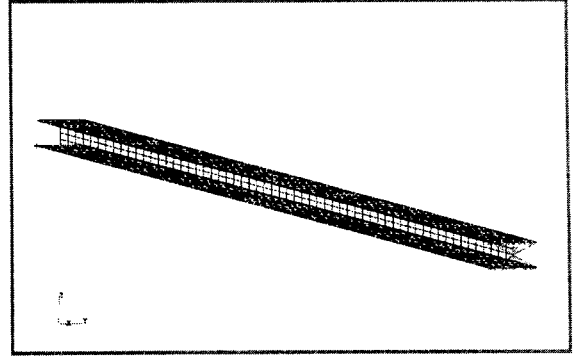


Fig. 4 Finite element meshes used for MSC/NASTRAN.

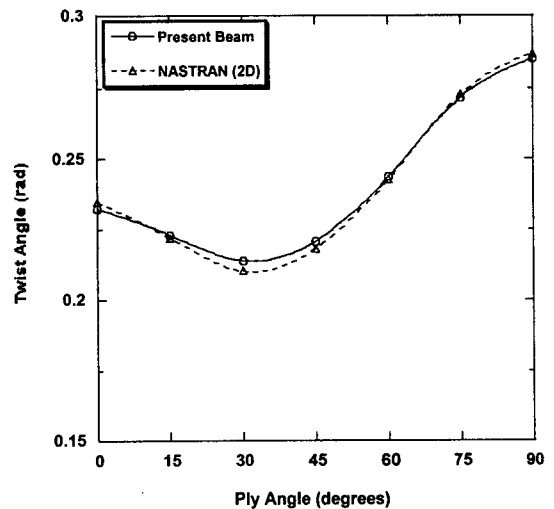


Fig. 5 Twist angles as a function of ply angles for composite I-beam.