

유한요소격자중첩을 이용한 복합재료평판의 변위 및 응력의 복원

박진우* · 김용협*

Local Response Recovery for Multilayered Composite Panels using Mesh Superposition

Jin Woo Park and Yong Hyup Kim

KEY WORDS: Predictor-Corrector, Mesh Superposition, Stress Recovery, Multilayered Composite

ABSTRACT

In this paper, an effective procedure is presented for the local recovery of displacements and stresses in multilayered composite panels, which incorporate the local refinement using mesh superposition. The mesh superposition method is used to refine the global coarse mesh by superimposing refined mesh to the localized zone of interest without transition zones. The finite element model used is a solid element based on the Hellinger-Reissner variational principle. The *a posteriori* computation of the through-the-thickness distributions of displacements and stresses is achieved using a predictor-corrector procedure. The procedure utilizes the superconvergent stresses and nodal displacements of the finite element patch. The element patch is generated by locally superimposing a refined local mesh to the coarse global mesh.

1. 서론

복합재료의 층간응력 및 정확한 두께방향의 거동을 해석하기 위한 연구가 많이 이루어져 왔다. 이들 중에는 3 차원 유한요소를 두께방향으로 여러 개 사용하는 방법 [1-2], 고차전단변형이론을 기초로 한 유한요소를 사용하는 방법 [3] 등이 있다. 그러나, 이들은 많은 자유도를 필요로 하기 때문에 비경제적이다. 이들에 비하여 보다 적은 자유도를 가지고 두께방향의 거동을 계산하기 위하여 3 차원 응력평형식을 이용한 방법이 제시되었다 [4-6]. 이들 중, 본 저자는 복합재료의 두께방향 변위 및 응력의 해석을 위하여 predictor-corrector 기법을 제시하였다 [6]. 제시된 기법에서는 두께방향으로 1 개의 1 차 전단변형 유한요소를 사용하기

때문에 보다 경제적이면서도 정확한 두께방향의 변위 및 응력을 계산할 수 있었다.

본 논문에서는 복합재료의 두께방향의 거동을 정확히 해석하기 위한 방법으로써, 경제성을 더욱 높이며, 적용이 간편한 해석기법을 소개한다. 제시된 방법은 유한요소격자중첩 [7]을 이용한 방법으로써, 관심이 있는 부분에 보다 세밀한 유한요소군은 중첩함으로써 이루어진다. 이 부분에서의 두께방향 변위 및 응력의 계산은 predictor-corrector 기법을 적용한다. 유한요소격자중첩을 이용하여 관심이 있는 부분만을, 요소의 뒤틀림이 없이, 보다 세밀하게 모델링 할 수 있기 때문에, 적은 양의 자유도를 사용하여도 복합재료 판에서 정확한 변위 및 응력의 두께방향 분포를 계산할 수 있다.

* 서울대학교 항공우주공학과

2. 유한요소 모델

본 연구에서 사용된 유한요소 모델은 Hellinger-Reissner 변분 원리를 기초하며, 18 개의 절점을 갖는다 [8]. 본 요소는 독립적으로 가정된 변형도 장을 갖으며, 이는 요소의 잠김현상을 감소시키고, spurious mode 를 억제하는 역할을 한다. 두께방향으로 2 개의 절점을 갖으며, 윗면과 아래면에 각각 9 개의 절점을 갖는다. 따라서 본 요소는 두께방향으로 1 차 전단변형 효과를 나타낸다. 각 절점당 3 개의 자유도 (u_1, u_2, u_3)가 있으며, 회전자유도는 두께방향의 자유도의 차이로 표시된다. 복합재료 판의 선형 정적 해석을 위한 유한요소 지배방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{Z}\} - q\{\mathbf{Q}\} = 0 \quad (1)$$

여기서, q 는 하중 인자이고, $\{\mathbf{Q}\}$ 는 하중 벡터 그리고 $\{\mathbf{Z}\}$ 는 반응 벡터이다. 전체 구조행렬 $[\mathbf{K}]$ 는 각 요소의 강성행렬 $[\mathbf{K}]^e$ 을 조립함으로써 얻어진다. 각 요소의 강성행렬은 Hellinger-Reissner 변분 원리를 기초로 다음과 같이 표현된다.

$$[\mathbf{K}]^e = [\mathbf{G}]^T [\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{G}] \quad (2)$$

$[\mathbf{G}]$ 는 변형도 형상함수 행렬, 복합재료의 탄성계수 행렬, 그리고 변위 형상함수의 미분계수 행렬의 곱으로 표현되며, $[\mathbf{H}]$ 는 변형도 형상함수 행렬, 복합재료의 탄성계수 행렬, 그리고 변형도 형상함수 행렬의 곱으로 표현된다.

$$[\mathbf{G}] = \int_{\Omega^e} [\mathbf{P}]^T [\mathbf{C}]^{(k)} [\mathbf{B}] d\Omega \quad (3)$$

$$[\mathbf{H}] = \int_{\Omega^e} [\mathbf{P}]^T [\mathbf{C}]^{(k)} [\mathbf{P}] d\Omega \quad (4)$$

위 식에서, $[\mathbf{P}]$ 는 변형도 형상함수 행렬, $[\mathbf{C}]^{(k)}$ 는 k 번째 층에서의 복합재료의 탄성행렬이며 $[\mathbf{B}]$ 는 변위 형상함수의 미분계수 행렬이다. 위 첨자 e 는 각 요소를 의미한다. 보다 자세한 내용은 참고문헌 [8]에서 찾을 수 있다.

3. 유한요소격자 중첩법

복합재료 평판의 변위 및 응력의 두께방향 분포를 계산하기 위하여 유한요소격자 중첩을 통해 원하는 지역의 격자를 세밀화 한다. 본 방법을 통해 천이 요소 (transition element) 또는 격자 뒤틀림 (mesh distortion) 없이 원하는 지역의 격자를 세밀화 할 수 있다. 본 연구에서는 18 절점 혼합유한 요소를 사용한 격자 중첩방법에 대해 소개하였다.

중첩된 요소군을 갖는 복합재료 판의 유한요소 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_G & \mathbf{K}_C \\ \mathbf{K}_C^T & \mathbf{K}_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Z}_G \\ \mathbf{Z}_L \end{Bmatrix} - q \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_G \\ \mathbf{Q}_L \end{Bmatrix} = 0 \quad (5)$$

식에서 $[\mathbf{K}_G]$, $[\mathbf{K}_L]$ 그리고 $[\mathbf{K}_C]$ 는 각각 전체 격자 (global mesh)의 구조행렬, 중첩되는 격자 (local mesh)의 구조행렬, 그리고 이들의 연계된 항을 포함하는 구조행렬을 의미한다. $\{\mathbf{Q}_G\}$ 와 $\{\mathbf{Q}_L\}$ 은 각각 전체 격자와 중첩되는 격자의 하중벡터이다. $[\mathbf{K}_G]$ 는 전체 격자의 각 요소의 강성행렬을 조립함으로써 얻어진다.

$$[\mathbf{K}_G]^e = \begin{cases} [\mathbf{G}]^T [\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{G}] \\ \text{(if no local mesh embedded in the element domain)} \\ \sum_i [\mathbf{G}_C] [\mathbf{H}_L]^{-1} [\mathbf{G}_C] \\ \text{(if local mesh is embedded in the element domain)} \end{cases} \quad (6)$$

위 식에서 $[\mathbf{G}_C]$ 와 $[\mathbf{H}_L]$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$[\mathbf{G}_C] = \int_{\Omega^e} [\mathbf{P}_L]^T [\mathbf{C}]^{(k)} [\mathbf{B}_G] d\Omega \quad (7)$$

$$[\mathbf{H}_L] = \int_{\Omega^e} [\mathbf{P}_L]^T [\mathbf{C}]^{(k)} [\mathbf{P}_L] d\Omega \quad (8)$$

식 (6)에서 \sum_i 는 중첩된 격자의 각 요소에 대한 덧셈을 의미한다. 식 (7), (8)에서의 $[\mathbf{P}_L]$ 은 중첩되는 요소의 변형도 형상함수 행렬이며, $[\mathbf{B}_G]$ 는 전체 격자의 변위 형상함수의 미분계수 행렬을 의미한다. $[\mathbf{K}_L]$ 과 $[\mathbf{K}_C]$ 의 계산도 요소차원에서 계산된 행렬을 조립함으로써 얻어진다.

$$[\mathbf{K}_L]^e = [\mathbf{G}_L]^T [\mathbf{H}_L]^{-1} [\mathbf{G}_L] \quad (9)$$

$$[\mathbf{K}_C]^e = [\mathbf{G}_C]^T [\mathbf{H}_L]^{-1} [\mathbf{G}_L] \quad (10)$$

식 (9), (10)에서 $[\mathbf{G}_L]$ 은 중첩되는 요소의 변형도 형상함수와 복합재료의 탄성행렬, 그리고 중첩되는 요소의 변위 형상함수의 미분계수 행렬의 곱으로 표시된다.

$$[\mathbf{G}_L] = \int_{\Omega^e} [\mathbf{P}_L]^T [\mathbf{C}]^{(k)} [\mathbf{B}_L] d\Omega \quad (11)$$

4. Predictor-Corrector 응력복원 기법

복합재료 평판의 두께방향의 정확한 변위 및 응력의 계산을 위하여 predictor-corrector 형식의 응력복원 기법을 도입하였다. Predictor 단계에서는

Zienkiewicz 와 Zhu 에 의해 제시된 패치(patch) 단위의 응력복원 기법 [10]을 이용하여 면내응력을 복원한다. 3 차원 응력평형식을 두께방향으로 구간적분하여 횡방향응력을 계산한다.

$$\sigma_{\gamma 3} = - \int_{-h/2}^{x_3} [\sigma_{\gamma 1,1} + \sigma_{\gamma 2,2}] dx_3 + c_\gamma \quad (12)$$

식 (12)에서 c_γ 는 윗면과 아래면의 경계조건에 맞게 결정된다. Corrector 단계에서는 3 차원 탄성학식을 기초로 predictor 의 응력을 이용하여 두께방향 변위를 계산한다.

$$\varepsilon_{ij} = \mathbf{S}_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (13)$$

$$u_3^* = \int_{-h/2}^{x_3} \varepsilon_{33} dx_3 \quad (14)$$

$$u_\gamma^* = \int_{-h/2}^{x_3} (2\varepsilon_{\gamma 3} - u_{3,\gamma}^c) dx_3 \quad (\gamma = 1, 2) \quad (15)$$

ε_{ij} 는 변형도 텐서, \mathbf{S}_{ijkl} 는 연성계수 텐서 (flexibility tensor)를 의미하며, 위 첨자 * 는 변형도-변위 관계식을 통해 corrector 에서 계산된 변위를 의미한다. $u_{3,\gamma}^c$ 는 조정된 변위 u_3^c (식 (20))의 미분계수를 의미한다.

앞에서 계산된 변위의 두께방향 평균 및 기울기는 유한요소해석의 변위와 일치시킴으로써 조정된다. 횡방향 변위(u_3)의 경우 두께방향의 평균을 유한요소해석의 횡방향 변위의 평균과 일치시킨다.

$$\int_{x_3} (u_3^* + d_3) dx_3 = \int_{x_3} u_3^f dx_3 \quad (16)$$

위 첨자 f 는 유한요소해석의 결과를 의미하며, d_3 는 변위크기 조정상수이다. 면내변위의 경우 조정을 위하여 변위를 복합재료 판의 중간면에 대해 대칭인 분포와 반대칭인 분포로 나눈다.

$$u_\gamma^* = \Phi_\gamma + \Psi_\gamma \quad (\gamma = 1, 2) \quad (17)$$

Φ_γ 와 Ψ_γ 는 각각 대칭인 분포와 반대칭인 분포를 의미한다. 대칭의 부분에 대해서는 유한요소해석의 면내변위와 두께방향의 평균을 일치시키고, 반대칭인 분포에 대해서는 유한요소해석의 면내변위와 기울기를 일치시킨다.

$$\int_{x_3} (\Phi_\gamma + d_\gamma) dx_3 = \int_{x_3} u_\gamma^f dx_3 \quad (18)$$

$$\frac{d}{dx_3} (\bar{\Psi}_\gamma + s_\gamma x_3) = \frac{du_\gamma^f}{dx_3} \quad (\gamma = 1, 2) \quad (19)$$

d_γ 와 s_γ 는 각각 변위크기 조정상수와 변위 기울기 조정상수를 의미한다. $\bar{\Psi}_\gamma$ 는 최소자승법을 통해 선형화된 반대칭 분포를 의미한다. 최종적으로 계산되는 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$u_\gamma^c = u_\gamma^* + s_\gamma x_3 + d_\gamma \quad (\gamma = 1, 2) \quad (20)$$

$$u_3^c = u_3^* + d_3$$

조정된 변위와 3 차원 탄성학식, 3 차원 응력평형식을 이용하여 변형도와 응력이 계산된다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^c + u_{j,i}^c) \quad (21)$$

$$\sigma_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (22)$$

$$\sigma_{\gamma 3} = - \int_{-h/2}^{x_3} [\sigma_{\gamma 1,1} + \sigma_{\gamma 2,2}] dx_3 + c_\gamma \quad (23)$$

식에서 \mathbf{C}_{ijkl} 는 탄성계수 텐서 (stiffness tensor)를 의미한다.

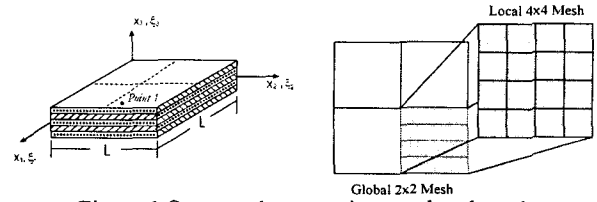


Figure 1 Structural composite panel and mesh superposition for response recovery

5. 수치해석

기계적하중을 받는 적층복합재료 평판의 두께방향 변위 및 응력을 계산하였다. 적층각은 $[0/90/0/90/0]_s$ 이고, 한 변의 길이(L)는 1.0, 두께 대 길이 비 (h/L)는 0.15 이다. 각 층의 물성치는 다음과 같다. $E_L/E_T=19$, $G_{LT}/E_T=0.52$, $G_{TT}/E_T=0.338$, $\nu_{LT}=0.32$ and $\nu_{TT}=0.49$. 모든 변은 단순지지되었으며, 횡방향으로 기계적 하중($p = \sin\pi\xi_1 \sin\pi\xi_2$)이 가해진다. 여기서 ξ_1 와 ξ_2 는 무차원화된 좌표를 의미한다. 대칭성을 이용하여 복합재료 판의 1/4 을 2x2 의 유한요소로 이산화하였다. 변위 및 응력의 두께방향 분포는 $\xi_1 = 0.875$, $\xi_2 = 0.625$ 에서 계산되었으며, 계산을 위하여 4x4 의 유한요소를 전체 요소에 중첩하였다(Figure 1). 두께방향으로는 1 개의 유한요소만을 배치하였다.

Figure 2 에서 5 는 복합재료 평판의 면내변위 (u_i), 면내응력 (σ_{11}), 횡방향 전단응력 (σ_{31}) 그리고 횡방향 수직응력 (σ_{33})의 두께방향 분포를 보여준다. 상당히 두꺼운 평판임에도 불구하고, 결과는 3 차원 탄성학식의 엄밀해와 잘 일치하는 것을 볼

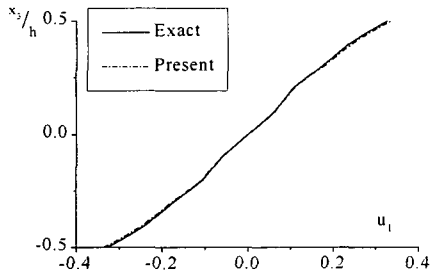


Figure 2. Through-the-thickness distribution of in-plane displacement u_1

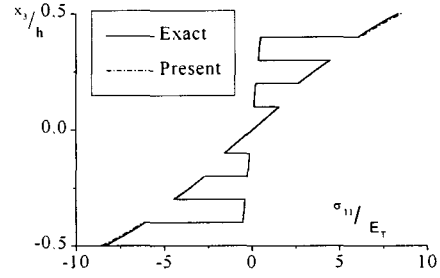


Figure 3. Through-the-thickness distribution of in-plane stress σ_{11}

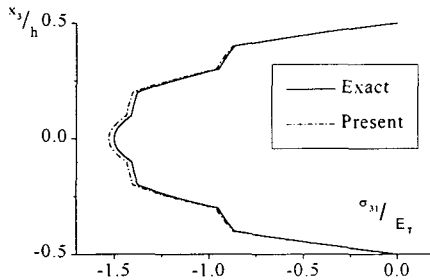


Figure 4. Through-the-thickness distribution of transverse shear stress σ_{31}

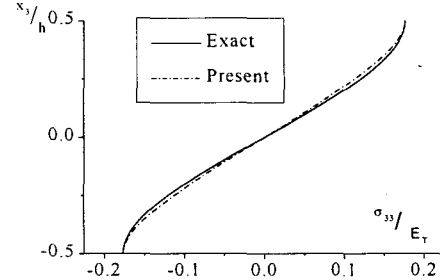


Figure 5. Through-the-thickness distribution of transverse normal stress σ_{33}

수 있다. 또한 1 차 전단변형이론을 기초로 한 유한요소를 사용했음에도 불구하고 계산된 변위 (Figure 2)는 고차 변형을 잘 표현하는 것을 볼 수 있다. 또한, 국부적으로 유한요소격자를 중첩시켰음에도 불구하고, 전체 평판에 8×8 요소를 사용한 결과와 거의 일치하였다 (그림에는 표시하지 않음).

6. 결론

본 논문에서는 복합재료 평판의 두께방향의 변위 및 응력의 정확한 분포를 계산하기 위한 효과적인 유한요소격자중첩법이 소개되었다. 변위 및 응력의 계산은 predictor-corrector 기법을 이용하여 계산되었다. 유한요소 격자 중첩법을 적용하여 원하는 지역에 임의의 세밀한 격자를 중첩함으로써 적은 양의 자유도를 이용함에도 불구하고 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 수치해석 결과, 계산된 변위 및 응력은 3 차원 탄성학식에 의한 엄밀해와 잘 일치하는 것을 볼 수 있었다.

참고문헌

(1) Mau, S. T. Tong, P. and Pian, T. H. H. (1972): "Finite Element Solution for Laminated Thick Plates," *J. Composite Materials*, Vol. 6, pp 304-311.

(2) Spilker, R. L., Chou, S. C. and Orringer, O. (1977): "Alternate Hybrid-Stress Elements for Analysis of Multilayer Composite Plates," *J. Composite Materials*, Vol. 11, pp 51-70.

(3) Robbins, D. H. Jr. and Reddy, J. N. (1993): "Modeling of Thick Composites Using a Layerwise Laminated Theory," *Internat. J. Numer. Methods in Engrg.* Vol 36, pp. 655-677.

(4) Noor, A. K., Kim, Y. H. and Peters, J. M. (1994): "Transverse Shear Stresses and Their Sensitivity Coefficients in Multilayered Composite Panels," *AIAA J.*, Vol. 32, pp 1259-1269.

(5) Engblom, J.J. and Ochoa, O.O. (1985): "Through the Thickness Stress Prediction for Laminated Plates of Advanced Composite Materials," *Internat. J. Numer. Methods in Engrg.* Vol. 21, pp 1759-1997

(6) Park, J. W. and Kim, Y. H. (1999): "Predictor-Corrector Procedure for Displacements, Stresses and their Sensitivity Coefficients in Composite Panels," *J. Composite Materials*, Vol. 33, pp 1222-1243.

(7) Kim, Y. H. Levit, I. and Stanley, G. (1991): "A Finite Element Adaptive Mesh Refinement Technique that Avoids Multipoint constraints and Transition Zones", *Iterative Equation Solvers for Structural Mechanics Problems (edited by I. D. Parsons and B. nour-Omid)*, ASME CED-Vol. 4

(8) Kim, Y. H. and Lee, S. W. (1988): "A Solid Element Formulation for Large Deflection Analysis of Composite Shell Structures," *Computer and Structures*, Vol. 30, pp 269-274.

(9) Pagano, N. J. (1970) "Exact Solution for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates," *J. Composite Materials*, Vol. 4, pp 20-34.

(10) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. (1992): "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part I: The Recovery Technique," *Internat. J. Numer. Methods in Engrg.* Vol. 33, pp 1331-1364.