평직복합재료 등가물성치의 통계학적 분포 특성

우경식* · 서영욱 **

Statistical treatment of the effective modulus of woven composites

Kyeongsik Woo and Youngwook Seo

ABSTRACT

In this study, the distribution of the effective modulus was investigated statistically. Plain weave structures were modeled with random stacking phase shift angles and the effective modulus was calculated by the unit cell analysis. The analysis results indicated that the effect of random phase shift angles was significant on the modulus distribution. As the number of layers increased, the coefficient of variation decreased and higher degree of homogeneity was attained.

기호설명

h : layer thickness
λ : wavelength of the fiber tow
φ_x: x-directional(warp directional) phase angle
φ_y: y-directional(fill directional) phase angle
Δx_i: translation in the x-direction of $_i{}^{th}$ to 1st layer
Δy_i: translation in the y-direction of $_i{}^{th}$ to 1st layer
E_{xx}: effective extensional modulus in x-direction
ν_{xy}: Poisson's ratio
N : number of layers

1. 서 론

최근 방직기술과 복합재료 제조기술이 발달하면서 복잡한 형상의 구조용 프리폼을 제작하는 데 있어 직조(weave, braid) 섬유다발의 사용이 증가하고 있다. 직물 복합재료의 내부는 제조과정에 따라 다양한 직조형태의 섬유다발 영역을 가진다. 따라서 그 내부층은 테잎 라미네이트와 같이 평면은 아니다. 그러나 섬유다발의 꼬임으로 인해 충격 저항성과 같은 면외 방향의 특성은 라미네이트 복합재료에 비해 우수하다[1].

기술의 발달과 함께 직물 복합재료의 기계적 거동을 예상하기 위한 많은 연구가 수행되었다. 직물 복합재료에는 구성 섬유나 수지 외에도 직물 복합재료의 특성에 영향을 미치는 많은 매개변수가 존재한다. 예를 들어, 섬유 다발을 구성하는 필라멘트의 수라든가, 직조과정에서 결정되는 섬유다발의 형상 및 배열, 섬유다발의 굴곡도 등이다. 이와 같은 매개변수로 인해 직물 복합재료는 해석 뿐만 아니라 모델링 자체에도 많은 어려움이 있다. 따라서 초기 직물 복합재료에 관한 연구는 주로 직물 복합재료의 모델링 방법을 개발하는 것이었고, Ishikawa 와 Chou 에 의해 많은 연구가 수행되었다[2-4]. 한편 직물 복합재료의 해석은 등가물성치의 예측을 목적으로 한 것이 대부분으로, 보통 대칭 혹은 비대칭의 특수 적층에 대해 수행되었다. 그러나 일반적으로 직물 복합재료는 임의의 위상각을 가지고 적층 된다.

참고문헌 [5]에서는 위상각 변화가 평직복합재료에 미치는 영향을 연구하였다. 이 연구에서는 위상각 변화로 인한 등가 탄성계수 값을 통계적 분포로 나타냄으로써 E_{xx} 가 위상각의 영향을 많이 받는다는 것을 보였다. 이 논문에서는 x-방향의

* 충북대학교 구조시스템공학과
** 충북대학교 구조시스템공학과 대학원

위상각 변화만을 고려하였는데, 실제 평직복합재료는 x-방향 뿐만 아니라 y-방향으로도 위상각이 변화하게 된다.

본 연구에서는 평직복합재료의 등가물성치의 균일도를 조사하고자 적층수에 따른 등가탄성계수 및 포아손 비의 통계학적 분포를 조사하였다. 각 적층수에 따라 임의로 적층 된 평직복합재료 구조물에 대해 단위구조 해석을 수행하여 등가물성치를 계산하였으며, 효율적인 계산을 위해 마크로요소를 사용하였다.

2. 해석 모델링

본 연구에 사용된 섬유다발은 볼록렌즈 형태(Lenticular)의 단면이 사인곡선의 경로를 따라 이동한다고 가정하여 모델링 하였다. 이렇게 하면 x-방향을 따라 이동하는 경사의 중심선 경로는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$z = \frac{h}{4} sin(2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi_x) + C \qquad (1)$$

여기서 λ는 파장, h 는 층 두께, φ_x 는 x-방향의 위상각을 나타낸다. y-방향으로 이동하는 위사에 대해서도 이와 유사한 방법으로 모델링 된다.

평직복합재료 구조물은 일반적으로 임의의 위상각을 가지고 적층 된다. 예를 들어 i번째 층이 첫 번째 층에 비하여 x-방향으로 Δx_i, y-방향으로 Δy_i 만큼 이동하여 적층 되었다고 했을 때, z-방향으로 i-1 번째와 i 번째 층간의 경사들 사이에서는 x-방향으로 Δx_i-Δx_{i-1} 만큼의 이동이 발생하게 되고, 동일한 경우 위사들 사이에서는 y-방향으로 Δy_i-Δy_{i-1} 만큼의 이동이 발생하게 된다. 섬유다발의 중심선의 경로가 (1)식과 같이 사인곡선의 형태로 모델 되었으므로 이들 횡 이동은 다음과 같이 위상각으로 표현될 수 있다.

$$\varphi_{xi} = \left| \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{\lambda} \right| \times 360^\circ \qquad (2\text{-a})$$

$$\varphi_{yi} = \left| \frac{\Delta y_i - \Delta y_{i-1}}{\lambda} \right| \times 360^\circ \qquad (2\text{-b})$$

여기서 첨자 i 는 아래서부터의 층 번호이고 맨 아래층은 기준 층으로 위상각이 정의되지 않는다.

본 연구에서는 각 층의 섬유다발이 x- 및 y-방향으로 각각 0°에서 337.5°까지 22.5°씩 이동한다고 가정하였다. 이와 같이 하면 각 층은 x- 및 y-방향으로 각각 16 가지의 경우를 갖게 되어, 적층수가 N 인 경우 모든 경우의 수는 $16^{2(N-1)}$개가 된다.

본 연구에 사용 된 평직복합재료의 단위구조는 경사와 위사의 섬유다발과 수지로 구성되어 있다. 섬유다발은 다시 섬유와 수지로 되어 있으나 여기서는 균일하다고 가정하였다. 각 구성재료의 특성치는 다음과 같다[6].

섬유다발(graphic-epoxy)

E_{11} = 206.9 GPa, E_{22} = 5.171 GPa,

$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$ = 0.25,

$G_{12} = G_{13}$ = 2.386 GPa, G_{23} = 2.068 GPa

수지(epoxy)

E = 3.45 GPa, ν = 0.35

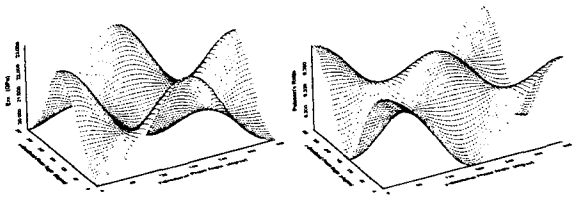
3. 해석 방법

평직복합재료의 미세구조는 매우 복잡하여 정확한 모델링이 어렵고, 기존의 유한요소법에 의한 해석에는 많은 양의 계산시간과 기억용량이 요구된다. 본 연구에서는 계산자원 요구조건을 절감하기 위하여 마크로요소[7]를 이용하여 평직복합재료의 등가물성치를 계산하였다.

한편 적층수가 증가하게 되면, 계산해야 할 경우의 수가 급수적으로 증가하므로 샘플해석을 수행하였다. 여기서 샘플해석은, 섬유다발이 0°에서 337.5°까지 22.5°씩 이동하는 모든 경우 중 일부에 대한 해석을 의미한다. 즉, 적층수가 N 인 경우 위상각 쌍(φ_{xi},φ_{yi}) 에서 i 는 1~(N-1)까지의 정수 값을 갖으므로 변수(φ)의 수는 2(N-1)개가 된다. 해석 모델링에서 설명한 바와 같이 이들 변수는 각각 16 가지의 위상각을 갖도록 모델 되었다. 그러나 샘플해석에서는 매 해석마다 16 개의 값 중 임의로 선택된 위상각이 변수 값으로 정의된다. 이와 같이 변수에 위상각이 정의되면 (φ_x,φ_y) 쌍에 부합하는 단위구조가 모델링 되고, 그리고 나서 단위구조 해석을 통해 등가물성치가 계산된다. 이러한 과정을 반복함으로써 통계처리에 필요한 등가물성치를 얻게 되는데, 이때 반복횟수는 계산 자원을 최소화 하면서 통계적 결과에 충분한 신뢰성을 제공하도록 결정하였다.

4. 해석 결과 및 고찰

해석모델링에서 설명한 바와 같이 경사와 위사의 위상각을 22.5°씩 변화시키면, 적층수가 2 인 경우 계산해야 할 경우의 수는 $16^{2(2-1)}$=256 이 되고, 동일한 수의 위상각 쌍(φ_x,φ_y)에 대한 E_{xx} 및 ν_{xy} 를 얻게 된다. 본 연구에서는 이들 값을 기



(a) (b)

Fig. 1. Variation of properties moduli for finite two-layer plain weave textile unit cell models. (a) Young's modulus. (b) Poisson's ratio.

본값으로 하여 그 사이에 있는 미지의 위상각 쌍에 대한 등가물성치를 보간법을 사용하여 얻었다. 그림 1 은 그에 대한 결과로 경사와 위사의 위상각 변화에 따른 등가물성치의 변화를 보인 것이다. 그림 1(a)에서 E_{xx} 는 비대칭 적층((φ_x, φ_y)=(0°, 0°) or (180°,180°)) 에서는 최소값을 그리고 대칭적층((180°,0°) or (0°,180°))에서는 최대값을 나타내며, 사인곡선의 형태로 변화하고 있다. 그림 1(b)에 보인 ν_{xy} 의 경우 비대칭 적층에서는 최대값을 그리고 대칭적층의 경우에는 최소값을 보여 E_{xx} 와는 반대의 특성을 가지나, 포아손 비 역시 사인곡선의 형태로 변화하고 있다.

그림 2 는 적층수 2 인 단위구조 모델에 대해 15 번의 샘플 해석을 수행하는 동안, 샘플 수 변화에 따른 E_{xx} 의 평균 및 표준편차의 %오차의 변화를 보인 것이다. 이 때 E_{xx} 의 평균의 %오차는 다음의 식으로 정의된다.

$$\%Error = \left| \frac{E_{xx_mean}^{SA} - E_{xx_mean}^{Ref}}{E_{xx_mean}^{Ref}} \right| \times 100 \qquad (3)$$

여기서, 첨자 *Ref* 로 표신 된 기준 값은 (φ_x, φ_y)=(22.5°i ,22.5°j)(i, j =0~15)의 조건을 만족하는 모델에 대한 E_{xx} 의 평균값이다. 이 때 통계처리에 이용되는 E_{xx} 의 수는 256 개가 된다. 첨자 *SA* 는 샘플해석에 의한 E_{xx} 의 평균값을 의미한다. 전자(*Ref*)의 경우에는 (φ_x, φ_y)값이 일정하게 고정되었으나, 샘플해석(*SA*)에서 이들 값은 임의의 위상각을 갖게 되고 이때 E_{xx} 는 그림 1(a)의 결과로부터 얻어진다. 표준편차에 대해서도 (3)식과 동일한 방법으로 %오차를 구하게 된다.

이 그림에서 샘플의 수가 작을 때 평균의 %오차는 매 실행 마다 매우 불규칙한 변화를 보이고 있다. 이는 샘플의 수가 작은 경우 그에 대한 샘플 해석의 통계적 결과의 신뢰도가 매우 낮다는 것을 의미한다. 그러나 샘플의 수가 증가하게 되

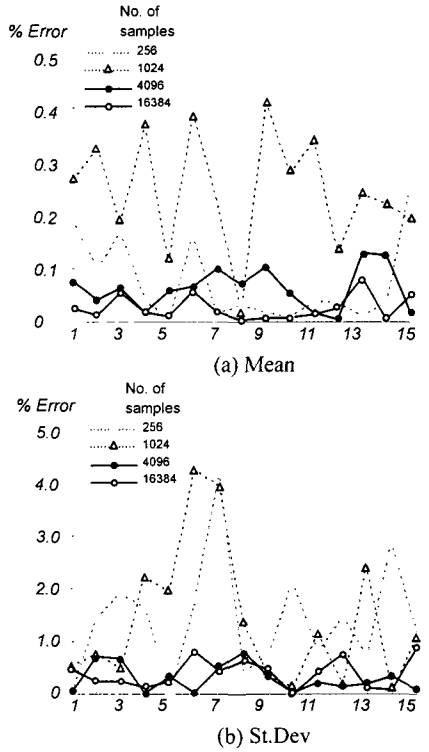


Fig. 2. Percent error of sample analysis for two-layer model.

면 %오차는 감소하고, 값이 변화하는 범위도 작아진다. 표준편차의 경우에는 평균에 비해 %오차 값이 매우 크게 나타나고 있다. 그러나 샘플의 수가 어느 정도 큰 수에 이르면 표준편차의 %오차 역시 감소하여, 4096 개의 샘플에 대해서는 1.00% 미만의 오차를 갖는 것을 볼 수 있다. 한편 이 그림에서 4096 개와 16384 개에 대한 결과를 보면, 샘플의 수가 크게 증가했음에도 불구하고 그 오차는 크게 향상되지 않은 것을 볼 수 있다. 이상의 결과로부터 샘플의 수가 약 4096 개가 되면, 그 통계적 결과는 충분한 신뢰도를 제공한다는 것을 알 수 있다.

그림 3 은 E_{xx} 의 최대, 최소 및 평균값의 변화를 보여주고 있다. 여기서 실선은 샘플해석의 결과를 보인 것이다. 점선은 이상적인 최대 최소값으로 평직복합재료가 대칭 및 비대칭 적층 된 특수한 경우에 대한 해석결과 이다. 그러나 현실적으로 이와 같은 이상적인 적층 형태가 발생할 확률은 매우 작으며, 일반적으로 임의의 위상각을 가지고 적층 되기 마련이다. 이 그림에서 E_{xx} 와 ν_{xy} 모두 그 평균값의 변화는 적층수가 작을 때는 큰 변화를 보이지만 적층수가 증가함에 따라 어느 특정한 값으로 수렴하는 경향을 보이고 있다. 이상적인 최대 최소값은 평균값의 변화와 유사한 경향을 보이고 있는데, 비대칭 적층에 비해 대칭 적

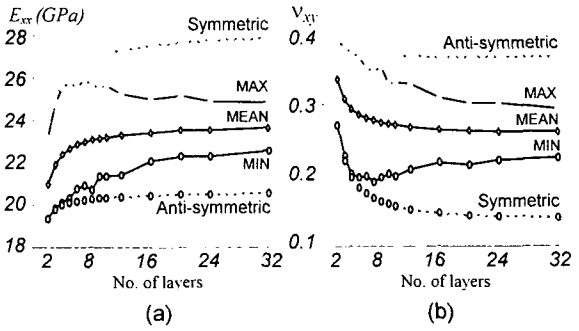


Fig. 3. Variation of Young's modulus and Poisson's ratio verses the number of layers for plain weave textile composites.

층일 때 그 변화가 상대적으로 크게 나타나고 있다. 한편 샘플해석으로부터 얻은 최대 최소값은 적층수가 증가함에 따라 평균 값으로 수렴하는 경향을 보이고 있다.

그림 4 는 적층수에 따른 등가 물성치의 분포를 평균과 표준편차를 이용해 정규 분포로 가시화한 것이다. 이 그림에서 적층수가 2 인 경우 E_{xx} 는 상대적으로 낮은 값 부분에 분포하며 넓은 범위에 걸쳐 분포하는 것을 볼 수 있다. 그러나 적층수가 증가하게 되면, 표준편차가 감소하여 분포도의 범위가 감소하고 대부분의 값이 평균값 부근에 밀집되어 있다. 포아손 비의 경우에도 마찬가지로 적층수가 증가함에 따라 평균 값 부근의 밀도가 크게 증가하여 일정한 값으로 수렴하는 경향을 볼 수 있다. 이는 곧 적층수가 증가할수록 등가물성치의 균일도가 높아진다는 것을 의미한다.

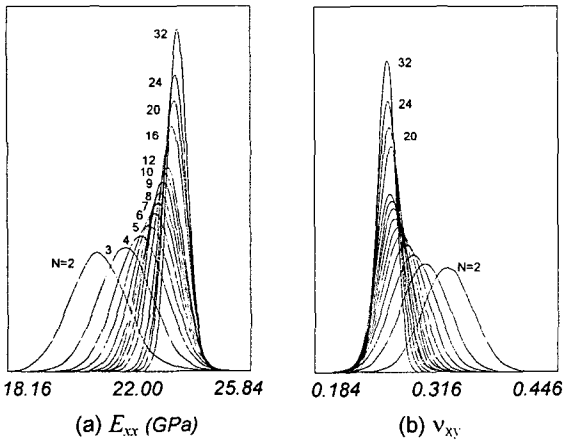


Fig. 4. Normalized distribution of effective moduli.

5. 결 론

본 연구에서는 평직복합재료의 적층수 증가에 따른 물성치의 통계학적 분포를 조사함으로써 위상각 변화에 따른 평직복합재료의 등가물성치의 균일도를 고찰하였다.

통계처리 결과 비교적 두께가 얇은 평직복합재료의 경우 위상각 변화로 인한 등가물성치는 낮은 균일도를 보였다. 적층수가 2 인 경우 E_{xx} 는 낮은 값에서, ν_{xy} 는 높은 값에서의 밀도가 높게 나타났으며 그 분포는 넓은 범위에 분포하는 것을 볼 수 있었다. 그러나 적층수가 증가함에 따라 대부분의 값이 평균값 부근에 분포함으로써 평균값 부근의 밀도가 크게 증가하였다. 즉, 평직복합재료의 등가물성치는 적층수가 증가할수록 일정한 값으로 수렴하여 높은 균일도를 보였다.

참고문헌

[1] Marrey, R. V. and B. V. Sankar., 1997, A Micromechanical Model for Textile Composite Plates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 31, No. 12, pp. 1187-1213.

[2] Ishikawa, T. and T. W. Chou, 1982, Elastic Behavior of Woven Hybrid Composites, *J. Comp. Mater.*, 16:2-19.

[3] Ishikawa, T. and T. W. Chou, 1983, One Dimensional Micromechanical Analysis of Woven Fabric Composites, *AIAA J.*, 21:1714-1721.

[4] Ishikawa, T. and T. W. Chou., 1983, In-Plane Thermal Expansion and Thermal Bending Coefficients of Fabric Composites, *J. Comp. Mater.*, 17:92-104.

[5] 우경식, 서영욱, 1999. "평직복합재료의 기계적 거동에 있어서의 저 균일도 문제", 한국 복합재료 학회 춘계학술발표대회 논문집, pp 81-84.

[6] Jones, R. M., 1975, *Mechanics of Composite Materials*, Scripta Book Co., Washington, DC.

[7] Whitcomb, J. and Woo. K., Enhanced direct stiffness method for finite element analysis of textile composites, *Composite Structures*, Vol. 28, 1994, pp. 385-390.