

근접하여 회전하는 두 원통 사이의 고 점성 윤활 유동

이승재* · 정재택**

* 전남대학교 대학원 기계공학과

** 전남대학교 자동차공학부

Two-dimensional High Viscous Flow between Two Close Rotating Cylinders

Seung-Jae Lee*, Jae-Tack Jeong**

* Department of Mechanical Engineering, Chonnam National University

** School of Automotive Engineering, Chonnam National University

Abstract - Two dimensional slow viscous flow around two counter-rotating equal cylinders is investigated based on Stokes' approximation. An exact formal expression of the stream function is obtained by using the bipolar cylinder coordinates and Fourier series expansion. From the stream function obtained, the streamline patterns around the cylinders are shown and the pressure distribution in the flow field is determined. By integrating the stress distribution on the cylinder, the force and the moment exerted on the cylinder are calculated. The flow rate through the gap between the two cylinders is determined as the distance between two cylinders vary. It is also revealed that the velocity at the far field has finite non-zero value. Special attention is directed to the case of very small distances between two cylinders by way of the lubrication theory.

Key words - Stokes' approximation, bipolar cylinder coordinates, biharmonic equation, Fourier series, lubrication, rotating cylinders.

1. 서 론

1.1 연구배경 및 목적

물체 주위의 느린 점성유동은 오래 전부터 많은 연구가 수행되어 왔는데¹⁾, 이는 점성의 영향에 의한 유동 특성 변화에 많은 흥미를 가지고 있기 때문이다. Wakiya²⁾³⁾⁴⁾는 bipolar coordinates를 이용한 이차원 creeping motion에서 돌출되거나 함몰되어있는 벽을 따라 흐르는 점성 유체의 유동, 점성 유체 내의 두 원통에 대한 문제, Stokes 유동에서의 박리에 대하여 이론적으로 해석하였다. 이러한 연구 중에서 회전하는 두 실린더 주위의 유동장에 대한 연구는 실제 응용분야와 관련하여 중요한 연구 대상이다.

이와 같은 유동은 쌍롤에 의한 구조시 주물의 유동이나 고 점도 윤활유를 필요로 하는 저널 베어링 부의 유동, 점성을 갖는 작동 유체의 누설 방지 및 외부의 이물질 침입을 차단하기 위한 오일시일 부의 유동 gerotor에서 로터와 하우징의 접촉부에서의 윤활유의 유동 등과 같이 두 고체

면이 접촉하는 경우의 윤활 모델로 취할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 서로 반대 방향으로 회전하는 두 원통 주위의 느린 점성 유동을 이론적으로 해석하고자 한다.

여기에서 유동의 Reynolds수는 충분히 작아서 유동의 관성력을 무시할 수 있다고 가정한다. 해석의 결과로 임의의 거리만큼 떨어져 회전하는 두 원통 주위에서의 유선의 형태와 압력의 분포, 전단응력, 단위 길이당 원통 사이를 통과하는 유량, 원통이 받는 힘과 모멘트 등의 물리량을 구할 수 있다. 특히, 윤활 문제의 해석을 위하여 두 원통 사이의 거리가 두 원통의 반경에 비하여 매우 작은 경우에 대하여 결과를 제시하였다.

1.2 연구 모델 및 연구 방법

Fig.1과 같이 무한유체 내에 평행으로 놓인 두 원통은 서로 반대 방향으로 회전 각속도 Ω 의 크기로 회전하고 있다. ($\Omega_1 = -\Omega_2 = \Omega$) 또한 일반성을 잃지 않고 원통의 반경 R 로 무차원화 하면

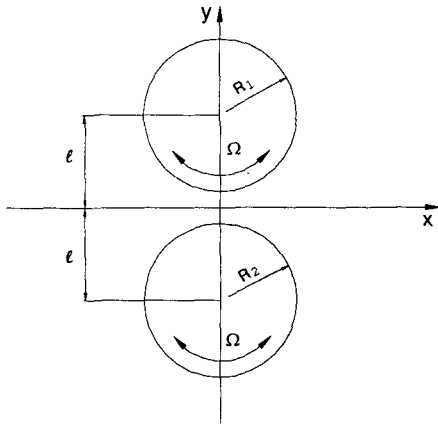


Fig.1 Definition sketch

$R=1$ 로 들 수 있다.

유동장은 Reynolds수가 아주 작은 느린 점성 유동(creeping flow)이므로 Navier-Stokes 방정식에서 관성항을 무시하는 Stokes의 근사에 의하여 유동의 지배방정식은 다음의 Stokes 방정식으로 된다.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (2)$$

이차원 유동장이므로 다음과 같은 연속방정식을 만족하는 유동함수를 정의할 수 있다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

따라서 (3)식을 (1)식과 (2)식에 대입하고 압력 p 를 소거하면 유동함수 ψ 는 다음과 같은 2차원 biharmonic equation으로 표현된다.

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (4)$$

여기에서 원통 표면에서의 속도 경계조건을 적용하기 위하여 쌍극 원통 좌표계(bipolar cylinder coordinates)를 사용하였고, 얻어진 유동함수를 이용하여 유선과 압력 분포, 전단응력, 두 원통사이를 통과하는 유량, 원통이 받는 힘과 모멘트를 해석하였다.

2. 수학적 전개

2.1 지배방정식

Fig.1과 같이 두 원통이 회전하는 유동에서 관

성의 효과가 점성의 효과에 비해 상대적으로 아주 작은 경우($Re(=\rho\Omega R^2/\mu) \ll 1$)에는 관성효과를 무시할 수 있으므로 관성항이 소거되고, 이차원 정상상태, 비압축성 유체이므로 Navier-Stokes식은 다음의 Stokes식으로 표현된다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

이때 위의 두 식으로부터 다음과 같은 와도 ω_z 와 압력 p 에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 \omega_z = 0, \quad \nabla^2 p = 0 \quad (7)$$

즉 와도와 압력은 Laplace 방정식을 만족하고 $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ 이므로 ω_z 는 유동함수를 사용하여 나타낼 수 있고($\omega_z = -\nabla^2 \psi$), 이로부터 다음과 같은 biharmonic equation을 지배방정식으로 얻을 수 있다.⁵⁾

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (8)$$

여기에서 경계조건은 원통의 표면에서 회전속도에 부합하는 no-slip조건을 사용해야한다. 즉, 원통표면에서 $\vec{V}_{fluid} = \vec{V}_{cylinder}$ 이 된다.

2.2 좌표 변환

원통 표면에서의 경계조건을 쉽게 적용하기 위해 다음과 같은 bipolar cylinder coordinates (ξ, η)를 도입하자.

$$x = \frac{\sinh \xi_0 \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (9)$$

$$y = \frac{\sinh \xi_0 \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (10)$$

그러면 위 두 식에서 (x, y)와 (ξ, η)의 관계로 Fig.2와 같이 두 원통의 표면인 경계면은 각각 $\xi = \xi_0$ 와 $\xi = -\xi_0$ 로 이것은 상·하의 원통을 나타내고, cartesian좌표에서의 (x, y)와 bipolar cylinder좌표의 (ξ, η)의 관계는 다음과 같은 복소함수로 나타낼 수 있다.

$$x + iy = i \sinh \xi_0 \cosh \frac{1}{2}(\xi + i\eta) \quad (11)$$

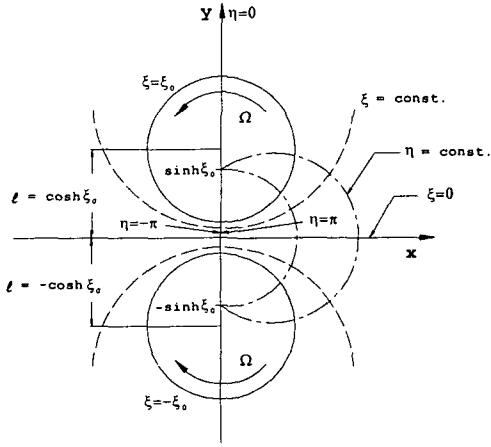


Fig.2 Bipolar cylinder coordinates (ξ, η)

또한 (9)식과 (10)식에서 η 를 소거해보면 다음과 같은 원의 방정식을 얻을 수 있다.

$$x^2 + (y - \sinh \xi_0 \coth \xi)^2 = \frac{\sinh^2 \xi_0}{\sinh^2 \xi} \quad (12)$$

즉, $\xi = \text{const.}$ 는 원을 나타내며 $\xi = \xi_0$ 일 때는 다음과 같이 중심이 $(0, \cosh \xi_0)$ 이고 반경이 1인 원을 나타낸다.

$$x^2 + (y - \cosh \xi_0)^2 = 1 \quad (13)$$

따라서 $\xi = \pm \xi_0$ 는 상하의 원통 표면을 나타내고 두 원통의 간격 d 는 그림에서와 같이 $d = 2(\cosh \xi_0 - 1)$ 가 되며, 실제로 d 가 먼저 주어지면 ξ_0 를 계산할 수 있다. 마찬가지로 (9)식과 (10)식에서 $\eta = \text{const.}$ 로 놓고 ξ 를 소거하면 원의 방정식이 되므로 $\eta = \text{const.}$ 도 원을 나타낸다.

여기에서 두 원통 외부의 유동영역은 (ξ, η) 좌표계에서 다음과 같은 영역으로 표현된다.

$$-\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad -\pi \leq \eta \leq \pi \quad (14)$$

또한 metric coefficient는 다음과 같이 표현되며

$$h = h_\xi = h_\eta = \frac{\sinh \xi_0}{\cosh \xi - \cos \eta} \quad (15)$$

해석적인 취급을 간단히 하기 위해 변수 Φ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\Phi = \frac{\psi}{h} \quad (16)$$

여기에서 (8)식의 biharmonic equation은 $\nabla^2(\nabla^2 \psi) = 0$ 와 같이 나타낼 수 있고, 여기서 $\nabla^2 \psi$ 를 먼저 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla^2(h\Phi) &= \frac{1}{\sinh \xi_0} [(\cosh \xi - \cos \eta) \\ &\times (\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta}) - 2(\Phi_\xi \sinh \xi + \Phi_\eta \sin \eta) \\ &+ (\cosh \xi + \cos \eta)\Phi] \end{aligned} \quad (17)$$

따라서 같은 방법으로 (17)식을 이용하여 $\nabla^4 \psi$ 를 계산하면 다음과 같이 Φ 에 관한 식으로 표현된다.^(6,7)

$$\begin{aligned} \nabla^4(h\Phi) &= \frac{(\cosh \xi - \cos \eta)^3}{\sinh^3 \xi_0} \times \\ &[\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + 2\Phi_{\xi\xi\eta\eta} + \Phi_{\eta\eta\eta\eta} - 2\Phi_{\xi\xi} + 2\Phi_{\eta\eta} + \Phi] = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

따라서 (8)식은 Φ 에 관해 다음과 같은 상수 계수를 갖는 선형방정식이 된다.

$$\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + 2\Phi_{\xi\xi\eta\eta} + \Phi_{\eta\eta\eta\eta} - 2\Phi_{\xi\xi} + 2\Phi_{\eta\eta} + \Phi = 0 \quad (19)$$

3. 유동장 해석

3.1 유동함수 해석

유동함수의 해석에 있어서 유동의 흐름은 y 축 ($\eta = 0, \pm \pi$)에 대하여 대칭으로 가정할 수 있으므로 ψ 는 x 에 관하여 우함수가 되고 Φ 도 x 에 관하여 우함수, 즉 η 에 관하여 우함수가 된다. 또한 Φ 는 η 에 대하여 2π 의 주기함수로 나타낼 수 있으므로 다음과 같은 Fourier cosine series로 나타낼 수 있다.

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\xi) \cos n\eta \quad (20)$$

위의 식을 (19)식에 대입하여 계산하면 (19)식은 ξ 만의 함수로 표현되며 일반 해를 구해보면

$$\begin{aligned} \Phi_n(\xi) &= a_n \cosh(n+1)\xi + b_n \sinh(n+1)\xi \\ &+ c_n \cosh(n-1)\xi + d_n \sinh(n-1)\xi \end{aligned} \quad (21)$$

와 같이 되므로 함수 Φ 는 다음과 같이 3가지의

경우로 나타낼 수 있다.

$$(i) \quad n=0 \text{ 일 때}$$

$$\Phi = a_0 \cosh \xi + b_0 \sinh \xi + (c_0 \cosh \xi + d_0 \sinh \xi) \xi \quad (22)$$

$$(ii) \quad n=1 \text{ 일 때}$$

$$\Phi = (a_1 + b_1 \xi + c_1 \cosh 2\xi + d_1 \sinh 2\xi) \cos \eta \quad (23)$$

$$(iii) \quad n \geq 2 \text{ 일 때}$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n \cosh(n+1)\xi + b_n \sinh(n+1)\xi + c_n \cosh(n-1)\xi + d_n \sinh(n-1)\xi \} \cos n\eta \quad (24)$$

유동함수 ψ 는 $\xi=0$ 에 대하여 기함수이므로 Φ 또한 ξ 에 대하여 기함수, 즉 $\Phi(\xi, \eta) = -\Phi(-\xi, \eta)$ 을 만족해야 한다. 따라서 (22)-(24)식에서 우함수인 항은 제거되고, Φ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi = b_0 \sinh \xi + d_0 \xi \sinh \xi + (b_1 \xi + d_1 \sinh 2\xi) \times \cos \eta + \sum_{n=2}^{\infty} \{ b_n \sinh(n+1)\xi + d_n \sinh(n-1)\xi \} \cos n\eta \quad (25)$$

위 식의 계수를 결정하기 위하여 경계조건을 적용한다. 원통표면($\xi=\xi_0$)에서 각속도는 Ω 이므로 no-slip 조건을 이용하면 다음과 같다.

$$\Phi(\xi_0, \eta) = \frac{\cosh \xi_0 - \cos \eta}{\sinh \xi_0} \psi_0 \quad (26)$$

$$\Phi_\xi(\xi_0, \eta) = \Omega + \psi_0 \quad (27)$$

여기에서 ψ_0 는 $\xi=\xi_0$ 에서의 유동함수 값이다. 위의 경계조건을 $\xi=\xi_0$ 일 때 (25)식과 계수 비교를 하면 $\Phi(\xi, \eta)$ 는 η 에 대하여 상수항과 $\cos \eta$ 항, 즉 n 이 0과 1일 때만 값을 갖게되며, $n \geq 2$ 일 때의 항은 존재하지 않아야 한다. 따라서 위의 조건을 (25)식에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi = b_0 \sinh \xi + d_0 \xi \sinh \xi + (b_1 \xi + d_1 \sinh 2\xi) \cos \eta \quad (28)$$

또한 상수 b_0, d_0, b_1, d_1 에 대하여는 경계조건

인 (26)식, (27)식과 위의 두 식을 계수 비교하여 계산하면 얻을 수 있고, 3.2절에 설명될 압력분포의 계산에서 압력은 η 에 대하여 2π 주기 함수가 된다는 조건으로부터 $d_0 + b_1 = 0$ 이라는 관계식을 얻게됨으로 다음과 같은 ψ_0 를 구할 수 있다.

$$\psi_0 = \frac{\Omega (2\xi_0 \cosh 2\xi_0 - \sinh 2\xi_0)}{2 \sinh 2\xi_0} \quad (29)$$

여기에서 위 식을 구해진 각 계수들에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$b_0 = \frac{-\Omega \cosh^2 \xi_0}{\sinh 2\xi_0 \sinh \xi_0} \quad (30)$$

$$d_0 = \frac{\Omega \cosh 2\xi_0}{\sinh 2\xi_0 \sinh \xi_0} \quad (31)$$

$$b_1 = \frac{-\Omega \cosh 2\xi_0}{\sinh 2\xi_0 \sinh \xi_0} \quad (32)$$

$$d_1 = \frac{\Omega}{\sinh 2\xi_0 \sinh \xi_0} \quad (33)$$

또한 위의 계수들을 (28)식에 대입하고 이를 다시 (16)식에 대입함으로써 유동함수는 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$\psi(\xi, \eta) = -\frac{\Omega}{\sinh 2\xi_0} \left[\xi \cosh 2\xi_0 - \frac{\cosh^2 \xi_0 \sinh \xi - 1/2 \sinh 2\xi \cos \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} \right] \quad (34)$$

3.2 압력분포 해석

지배 방정식에서 스토크스식인 (5)식과 (6)식에서 유동함수와 속도의 관계는 (3)식과 같으므로 각 방향에 따른 압력구배는 다음과 같다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi) \quad (35)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) \quad (36)$$

여기에서 복소변수 $z = x + iy$ 를 도입하고 다음과 같이 복소함수 $f(z)$ 를 정의하자.

$$f(z) = p + i\mu \nabla^2 \psi \quad (37)$$

(37)식의 실수부와 허수부는 Cauchy-Riemann의 방정식을 만족하므로 $f(z)$ 는 z 에 대한 복소 해석 함수이다.⁸⁾ 또한 z 와 $\zeta (= \xi + i\eta)$ 가 (11)식의 관계에 있으므로 $f(z)$ 는 ζ 에 대하여도 해석

함수이며 ξ, η 로 표현되는 Cauchy-Riemann 관계식을 만족한다. 여기에서 앞의 (28)식을 (17)식에 대입하면 다음과 같이 $\nabla^2\psi$ 을 구할 수 있다.

$$\nabla^2\psi = \frac{2}{\sinh \xi_0} [(d_0 + b_1)\xi - (d_0 + b_1) \sinh \xi \cos \eta + d_1(2 \sinh \xi \cos \eta - \sinh 2\xi \cos 2\eta)] \quad (38)$$

ξ, η 로 나타낸 (35)식과 (36)식에 (38)식을 대입하고 적분하여 p 를 구하면

$$p = \frac{-2\mu}{\sinh \xi_0} [(d_0 + b_1)\eta - (d_0 + b_1) \cosh \xi \sin \eta + d_1(2 \cosh \xi \sin \eta - \cosh 2\xi \sin 2\eta)] + C \quad (39)$$

와 같은 압력분포 식을 얻을 수 있다.

여기에서 압력은 모든 ξ 에 대하여 $p(\eta=\pi) = p(\eta=-\pi)$ 을 만족해야 하므로 $d_0 + b_1 = 0$ 이 되고, 또한 y 축에 대한 압력 값을 $p(\eta=0) = 0, p(\eta=\pi) = 0$ 으로 놓으면 적분 상수는 $C=0$ 으로 되므로 압력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p = \frac{-\mu\Omega}{\sinh 2\xi_0 \sinh^2 \xi_0} \times [2 \cosh \xi \sin \eta - \cosh 2\xi \sin 2\eta] \quad (40)$$

3.3 원통 표면에서의 전단응력 해석

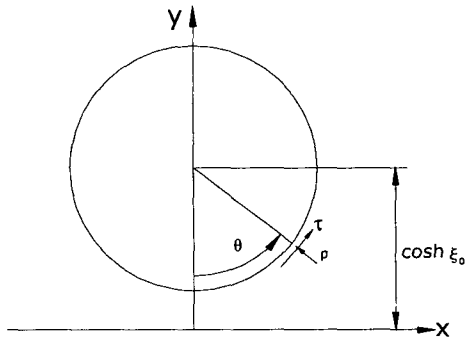


Fig.3 Pressure and shear stress on the cylinder

전단응력을 해석함에 있어서 Fig. 3과 같이 상하 두 원통 중 상부 원통에서 $x=0$ 인 곳에서 θ 가 반 시계 방향으로 증가한다고 하면 전단응력 τ 는 r 과 θ 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\tau = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \right] \quad (41)$$

위의 식 중 첫 번째 항은 $\nabla^2\psi$ 로 나타낼 수 있고 나머지 항은 $\xi = \xi_0$ 에서 $\partial\psi/\partial r = -R\Omega$ 이고 $\partial u_r/\partial \theta = 0$ 이므로 위의 식을 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\tau = -\mu [\nabla^2\psi + 2\Omega] \quad (42)$$

위의 식을 원통 표면($\xi = \xi_0$)에 대하여 계산하면 다음과 같이 표현된다.

$$\tau(\eta) = \frac{-\mu\Omega}{\sinh 2\xi_0 \sinh^2 \xi_0} [2 \sinh \xi_0 \cos \eta - \sinh 2\xi_0 \cos 2\eta] - 2\mu\Omega \quad (43)$$

(40)식과 (43)식에서 원통 표면에서 p 와 τ 를 Fig.3과 같이 θ 의 함수로 나타내기 위하여 η 와 θ 의 관계를 구하면 다음과 같다.

$$\cos \eta = \cosh \xi_0 - \frac{\sinh^2 \xi_0}{\cosh \xi_0 - \cos \theta} \quad (44)$$

$$\sin \eta = \frac{\sin \theta \sinh \xi_0}{\cosh \xi_0 - \cos \theta} \quad (45)$$

3.4 원통이 받는 모멘트 및 힘 계산

모멘트는 전단응력을 원통의 둘레를 따라서 적분함으로써 얻을 수 있다. 따라서 원통이 받는 회전 모멘트는 다음과 같이 된다.

$$M = \int_{-\pi}^{\pi} \tau(\eta) h d\eta = -4 \pi \mu \Omega \coth 2\xi_0 \quad (46)$$

이때 $\xi_0 \rightarrow \infty$ 이면 1개의 원통이 받는 모멘트와 동일하게 된다. 따라서 원통 1개가 받는 모멘트는 다음과 같다.

$$M = -4 \pi \mu \Omega \quad (47)$$

원통이 받는 힘은 Fig. 3에서 나타낸 것과 같은 방법으로 압력과 전단응력에 대한 힘을 각 방향에 대하여 원통의 둘레로 적분하면 된다. 여기에서 θ 와 η 의 관계는 chain rule을 사용하면 원통의 반경 $R=1$ 이므로 $d\theta = -h d\eta$ 로 되어 각 방향의 힘은 다음과 같이 계산된다.

$$F_x = \int_0^{2\pi} -p \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \tau \cos \theta d\theta \quad (48)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} -pxhd\eta + \int_{-\pi}^{\pi} \tau(\cosh \xi_0 - y)hd\eta$$

$$F_y = \int_0^{2\pi} -p \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \tau \sin \theta d\theta \quad (49)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} -p(\cosh \xi_0 - y)hd\eta + \int_{-\pi}^{\pi} \tau xhd\eta$$

위의 적분 식을 계산하면

$$F_x = 0, \quad F_y = 0 \quad (50)$$

의 값을 갖게 된다. 이는 두 원통이 힘을 받지 않으므로 $\xi=0$ 에서의 유동 방향으로 이동함을 뜻하고 또한 y 방향의 힘도 작용하지 않으므로 두 원통사이의 간격은 항상 일정함을 보여준다.

4. 결과 및 고찰

다음의 그림은 두 원통의 간격이 아주 작을 때 즉, $\xi_0=0.1$ ($d=2(\cosh \xi_0 - 1) \cong 0.01$)에 대하여 유선, 압력분포, 전단응력을 나타내었다.

Fig.4와 Fig.5는 (34)식으로 두 원통 주위의 유선과 원통 사이의 유선들을 나타내었다. Fig.4에서는 두 원통 주위와 x 축을 따라서 유동함수가 0이 되는 유선을 볼 수 있고, Fig.5에서는 stagnation point를 볼 수 있다. 여기에서 유선을 보면 앞에서 기술한 ψ 가 η 에 대하여 대칭이고, ξ 에 대하여 절대값이 같고 부호가 반대라는 가정이 타당함을 알 수 있다. 또한 Fig.6은 (40)식으로 두 원통 주위의 압력 분포를 contour 값으로 나타낸 것이며, Fig.7과 Fig.8은 각각 원통 표면의 압력 분포와 전단응력 분포를 Fig.3의 θ 에 따라 나타내었으며, $\theta=0$ 을 중심으로 압력과 전단응력이 급변하는 것을 볼 수 있다. 여기에서 $\theta=0$ 인 근방에서 압력 p 가 음의 부호로 매우 큰 값을 갖게 되는데, 이는 공동현상(cavitation)의 발생 가능성을 의미한다. 실제로는 외부의 공기가 틈새의 점성유체로 유입되어 압력은 매우 낮은 값으로 되지 않는 것으로 알려지고 있다.⁹⁾ 이에 대한 해석을 위해서는 다른 새로운 모델이 필요하다.

Fig.9는 (29)식을 원통 사이의 거리 d 에 대한 함수로 바꾸어서 두 원통 사이의 틈새로 통과하는 유량 Q 의 값을 보여주고 있으며 $d \rightarrow 0$ 일 때 유량 $\frac{Q}{\Omega R^2} \approx \frac{4}{3} \frac{d}{R} + O\left(\frac{d^2}{R^2}\right)$ 를 만족하게 된다.

Fig.10은 (46)식으로부터 얻어는 d 의 변화에 따르는 모멘트 값을 보여주는데 이것은 d 가 무한대로 증가함에 따라서 앞에서 언급한 것과 같이 원통 1개가 받는 모멘트 ($M/\mu\Omega R^2 = -4\pi \cong -12.57$)에 수렴함을 알 수 있고, $d \rightarrow 0$ 일 때 $M/\mu\Omega R^2 \rightarrow -\frac{2\pi}{d^{1/2}}$ 로서 무한대로 접근함을 알 수 있다.

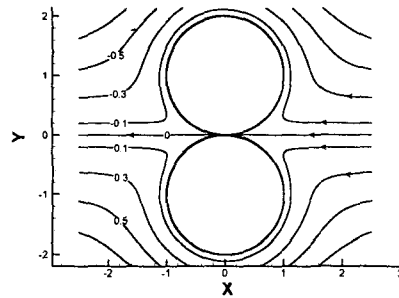


Fig.4 Streamline pattern around cylinders

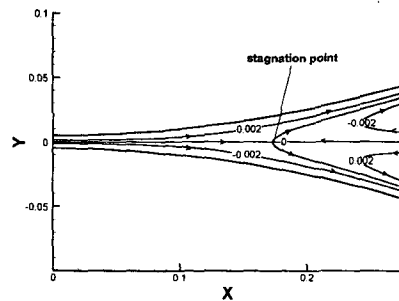


Fig.5 Streamlines near the gap between two cylinders

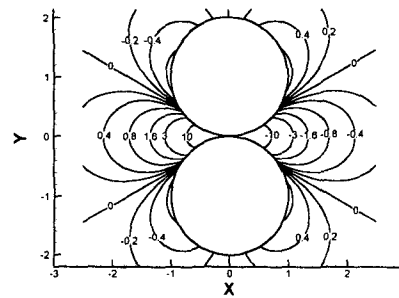


Fig.6 Pressure contour around cylinders

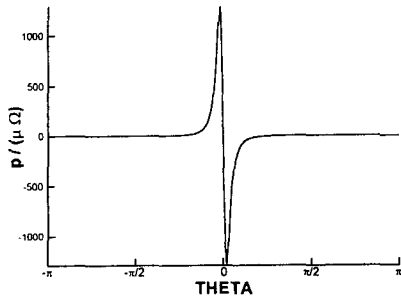


Fig.7 Pressure distribution on the cylinder

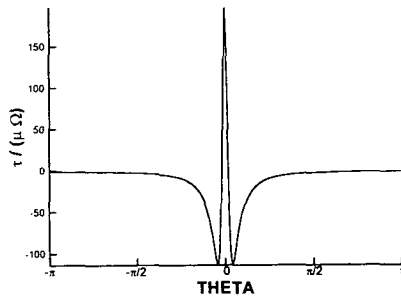


Fig.8 Shear stress distribution on the cylinder

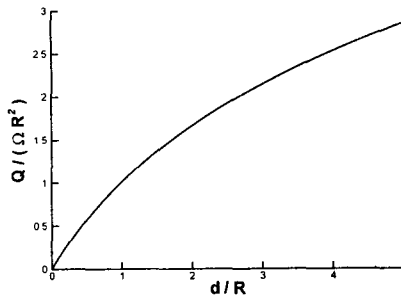


Fig.9 Flow rate through the gap between two cylinders

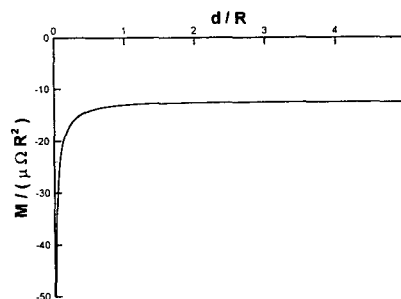


Fig.10 Moment exerted on the cylinder

5. 결론

본 연구의 결과로 점성 유체 안에서 두 원통의 크기가 같고 서로 반대 방향으로 회전할 때 두 원통의 간격이 원통의 반경에 대하여 매우 작은 경우에 두 원통사이의 틈새 가까이에서 정체점이 발생되고 그 점을 지나 원통의 회전 방향과 반대 방향인 유동이 보여지고 있다. 또한 원통의 표면에서는 $\theta=0$ 인 부근에서 압력이 매우 큰 음의 값을 갖게되므로 두 원통 사이로 지나가는 유체에서 공동현상의 발생 가능성이 있고, 전단응력의 분포에서 알 수 있듯이 원통의 회전 속도보다 큰 유속이 두 원통 사이에서 나타남을 알 수 있다. 그리고 원통에서 점성에 의하여 발생하는 모멘트는 무한대로 접근함을 알 수 있으며, 원통이 받는 힘의 합력은 0으로 두 원통의 간격은 항상 일정함을 알 수 있다.

이러한 유동은 볼베어링이나 저널베어링 사이와 같이 고체 접촉이라 할 수 있는 좁은 간격에서 최소 유막 두께가 존재하는 경우 두 원통 사이에서 역방향의 유동이 생성될 수 있음을 알 수 있다. 또한 유체의 점성 때문에 발생하는 두 원통 사이의 거리에 따르는 모멘트를 알 수 있으므로 저널 베어링에서 축과 저널의 간격에 따라 회전에 영향을 주는 모멘트를 예측할 수 있다.

본 연구는 점성 유체에 잠겨 회전하는 원통의 거동을 해석적으로 규명하였으며, 연구 결과는 각종 베어링사이 윤활유의 유동이나 쌍롤 사이에서 주물의 유동 등과 같은 고점성 유체 유동의 해석에 유용하게 사용될 수 있을 것이라 판단된다.

참고문헌

1. John Happel, Howard Brenner "Low Reynolds Number Hydrodynamics" Prentice-Hall Inc., 1965
2. Shoichi Wakiya "Application of Bipolar Coordinates to the Two-Dimensional Creeping Motion of liquid"
 - I. Flow over a Projection or a Depression on a Wall
J. Phys. Soc. Japan vol 39, pp.1113-1120, 1975
 3. Shoichi Wakiya "Application of Bipolar Coordinates to the Two-Dimensional Creeping Motion of liquid"

II. Some Problems for Two Circular
Cylinders in Viscous Fluid

J. Phys. Soc. Japan vol 39, pp.1603-1607,
1975

4. Shoichi Wakiya "Application of Bipolar
Coordinates to the Two-Dimensional
Creeping Motion of liquid"

III. Separation in Stokes Flows

J. Phys. Soc. Japan vol 45, pp.1756-1763,
1978

5. Frank M. White "Viscous Fluid Flow" 2nd
Ed., McGraw-Hill Inc., pp.173-174, 1991
6. F. B. Hildebrand "Advanced Calculus for
Applications" 2nd. Ed., Prentice-Hill Inc.,
1976
7. S. J. Farlow "Partial Differential Equation
for Scientists & Engineers" John Wiley &
Sons Inc., 1982
8. James Ward Brown, Ruel V. Churchill
"Complex Variables and Applications" 6th.
Ed., McGraw-Hill Inc., pp.48-50, 1996
9. Frederick S. Sherman "Viscous Flow"
McGraw-Hill Inc., pp.240-244, 1990