

표면거칠기를 고려한 평행 스러스트 베어링의  
혼합윤활 해석

이동길, 임윤철\*

연세대학교 대학원 기계공학과

\*연세대학교 기계전자공학부

Mixed Lubrication Analysis of  
Parallel Thrust Bearing by Surface Topography

Dong-Gil Lee and Yoon-Chul Rhim\*

Graduate School Yonsei Univ.

\*School of Electrical and Mechanical Eng. Yonsei Univ.

**Abstract** - The real area of contacts, average film thickness, mean real pressure, and mean hydrodynamic pressure are investigated numerically in this study, especially for the parallel thrust bearing. Model surface is generated numerically with given autocorrelation function and some surface profile parameters. Then the average Reynolds equation contained flow factors and contact factor is applied to predict the effects of surface roughness in mixed lubrication regimes. In this equation, flow factors are defined as correction terms to smooth out high frequency surface roughness and contact factor is introduced to relieve from obtaining the average film thickness. Therefore the computation time to obtain  $\bar{h}$  can be reduced.

**Key words** - real area of contacts, average film thickness, mixed lubrication, contact factor, surface topography

1. 서론

표면 거칠기를 고려한 베어링의 해석방법은 몇몇 연구자에 의하여 기본적인 개념이 제안되었다. 1970년대 후반에 Patir 와 Cheng[1-2]은 표면 거칠기의 영향을 고려한 평균레이놀즈식(Average Reynolds equation)을 제시하였다. 이 논문에서 Patir 와 Cheng은 서로 다른 거칠기를 가진 두 표면이 움직이고 있을 때 매끈한 표면을 흐르는 유량과의 비교를 위해 유동계수(Flow factor,  $\phi_x, \phi_y, \phi_s$ )를 결정하여 줌으

로써 표면거칠기의 영향을 기존의 레이놀즈식(Reynolds Equation)을 이용하여 해석했다. 이 식을 이용하여 표면의 거칠기를 고려한 베어링 연구가 많이 진행되었고 좋은 결과를 보여주게 되었다. 그러나 평균레이놀즈식은 두 표면의 접촉에 의한 요철의 변형을 충분히 고려하여 주지는 못했다. 즉 요철의 변형을 고려한  $\bar{h}$ 를 구해야 하는 별도의 계산이 필요했다. 그러나 Wu 와 Cheng[3]은 두 표면의 거칠기의 확률적 분포함수를 이용하여 접촉계수를 고려한

단순화된 평균레이놀즈식을 제안했다.

본 연구에서는 Wu 와 Cheng의 단순화된 평균레이놀즈 식을 사용하여 2차원 표면거칠기를 가지는 평행스러스트 베어링에 대하여 혼합유향을 해석했다. 그리고 표면의 거칠기 분포를 가우시안 분포함수 (Gaussian distribution function)를 직접 사용하지 않고 모델링한 표면의 거칠기 분포를 이산화하여 사용했다. 이러한 거칠기 분포를 얻기 위해 표면거칠기 파라미터로 정의되는  $R_a$ ,  $S_k$ ,  $K_u$ ,  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ 를 고려하여 통계적인 방법을 사용했으며 거칠기 파라미터는 3차원 조도 측정기로 측정된 값을 수치해석에 대입했다. 또한 요철들간의 접촉에 의한 하중과 평균 접촉압력, 실접촉면적 등을 얻기 위해 Grweewood 와 Tripp[4]의 가정을 이용한 탄성접촉에 대한 통계적인 방법과 B. Bhushun[5]의 관계식을 사용했다. 그리고 두 표면이 미끄럼운동을 할 때 등가표면(equivalent surface)의  $R_q$ 는 공분산의 형태로 나타냈다.

또한 본 논문에서는 x, y방향의 압력구배가 있는 평균레이놀즈식에서  $h_0$ 를 계산하기 위해 뉴턴방법을 수치해석 프로그램에 적용하여 계산과정의 시간을 줄일 수 있었다.

## 2. 이론해석

### 2.1 표면 모델링(Surface Modeling)

표면의 거칠기를 지배방정식에 대입하기에 앞서 먼저 표면에 대한 정보가 있어야 한다. 본 논문에서는 수학적으로 표면을 모델링하기 위해 auto-correlation function (ACF)을 식(1)과 같이 가정하고 Gaussian 분포와 non-Gaussian 분포를 모두 얻었다. Non-Gaussian 분포를 얻기 위해 양의  $S_k$  값을 갖는 Gamma 분포를 구 하는 방법으로 거부법(Rejection Method)을 사용하여 난수를 발생시켰다.

즉 임의의 거칠기를 갖는 표면을 만들기

위해 식(3)과 같이 2차원 표면거칠기  $Z_{ij}$ 를 표현했으며 식(1)을 수치계산에 적용하기에 앞서 식(2)와 같은 형태로 바꾸었다 [6].

$$R(\lambda_x, \lambda_y) = R_0^2 \left(1 - \frac{|\lambda_x|}{\lambda_x^*}\right) \left(1 - \frac{|\lambda_y|}{\lambda_y^*}\right), \quad \begin{matrix} |\lambda_x| \leq \lambda_x^* \\ |\lambda_y| \leq \lambda_y^* \\ \text{otherwise} \end{matrix} \quad (1)$$

$$R_{pq} = R_0^2 \left(1 - \frac{p}{n}\right) \left(1 - \frac{q}{m}\right), \quad \begin{matrix} p \leq n, q \leq m \\ \text{otherwise} \end{matrix} \quad (2)$$

$$Z_{i,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl} \eta_{i+k, j+l}, \quad i=1,2,\dots,N, \quad j=1,2,\dots,M$$

$$[Z_{i,j}] = [N \times M], \quad [R_{p,q}] = [n \times m] \quad (3)$$

$$E(\eta_{ij}, \eta_{kl}) = \begin{cases} 1, & \text{if } i=k, j=l \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

여기서  $\eta_{ij}$ 는 식(5)와 같으며 correlation length와 다른 변수들과의 관계는 식(6)과 같다.

$$\eta_{ij} [(N+n) \times (M+m)]: \text{ zero mean, unit standard deviation} \quad (5)$$

$$\lambda_x = n\Delta x, \lambda_y = m\Delta y, \gamma = \frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{n}{m}, \text{ if } \Delta x = \Delta y \quad (6)$$

### 2.2 평행스러스트의 혼합유향 모델링

Figure 1은 두 개의 거친 표면이 상대운동을 할 때 표면의 형상 및 유막의 두께를 표현하는 좌표계를 나타내며 각 표면에서 요철들간의 접촉에 의해  $\bar{h}$ 는 식(7)과 같다.

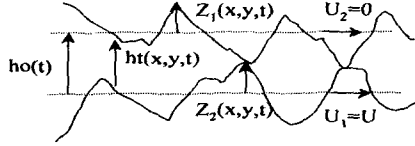


Fig. 1. Coordinates system for analysis

$$\bar{h} = \int_{-h_0}^{\infty} (h_0 + z) \phi(z) dz \quad (7)$$

평균레이놀즈식 (8)에서 유막사이에 발생하는 평균압력을 구하기 위해 평균유막두께를 구하여야 한다. 그러나 2차원 표면에 대하여 평균유막두께를 구하는 것은 많은 계산과정을 요구한다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_x \frac{h_0^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi_y \frac{h_0^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) \\ & = \left( \frac{U_1 + U_2}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \frac{U_1 - U_2}{2} \sigma \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

따라서 본 연구에서는 식(9)와 같은 접촉 계수를 이용하여 식(8)을 식(10)과 같은  $\phi_c$ 를 포함하는 식으로 바꾸어 주었다.

$$\begin{aligned} \phi_c & = \frac{\partial \bar{h}}{\partial h_0} = \int_{-h_0}^{\infty} \phi(z) dz \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} & = \frac{\partial \bar{h}}{\partial h_0} \frac{\partial h_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial h_0} \frac{\partial h_0}{\partial t} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_x \frac{h_0^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi_y \frac{h_0^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) \\ & = \left( \phi_c \frac{U_1 + U_2}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \frac{U_1 - U_2}{2} \sigma \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \phi_c \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)을 평행스러스트 베어링에 적용하

기 위해 아래의 식(11)과 같은 무차원 변수로 나타내면 식(12)와 같고 경계조건은 식(13)과 같다. 경계조건의 기준압력은 모두 대기압으로 정했다.

무차원 변수

$$\begin{aligned} X & = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{B}, \quad H_0 = \frac{h_0}{Rq}, \quad \bar{p} = \frac{(\bar{p} - p_0) h_0^2}{\mu U S} \\ W_{hyd} & = \frac{\bar{W} h_0^2}{\mu U S^3}, \quad \tau = \frac{t}{S/U}, \quad S = \sqrt{L^2 + B^2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial X^2} + \left( \frac{\phi_x}{\phi_c} \right) \left( \frac{L}{B} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial Y^2} = \frac{12}{H_0} \left( \frac{\phi_c}{\phi_x} \right) \left( \frac{L}{S} \right)^2 \frac{\partial H_0}{\partial \tau} \quad (12)$$

경계조건

$$\begin{aligned} P & = P_A \text{ along } x=0, \quad P = P_B \text{ along } x=L \\ P & = P_C \text{ along } y=0, \quad P = P_D \text{ along } y=B \end{aligned} \quad (13)$$

해석영역은 Fig. 2와 같고 식(12)를 차분화하여 전 해석영역에서 평균유막압력을 적분함으로써 무차원 평균지지하중( $W_{hyd}$ )을 얻을 수 있다.

그러나 유막에 대한 평균압력분포를 얻기 위해  $H_0$ 와  $\partial H_0 / \partial \tau$ 에 관한 정보가 필요하다라는 것을 식(12)로부터 알 수 있다. 이 값은 평행스러스트에 작용하는 힘들의 수직방향(z방향)의 평형관계식 (14)로 부터 얻을 수 있다. 수치해석과정에 대한 Flow Chart는 부록 그림1에 수록했다.

$$F_{tot} = W_{asp} + \bar{W} - W \quad (14)$$

여기서  $W_{asp}$ 는 탄성접촉에 대하여 식(15)와 같이 주어지는 힘으로[5] 요철들간의 접촉을 고려한 접촉하중이다.

B. Bhushan의 이론을 근거로 하여 접촉에 대한 통계적해석 방법을 통해  $W_{asp}$ 를 얻을 수 있다. 또한 Fig. 1과 같이 두 개의

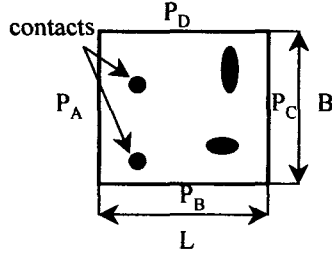
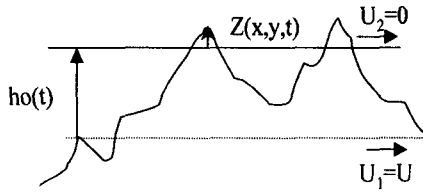


Fig. 2. Boundary conditions for analysis domain



$$z = z_1 + z_2$$

Fig. 3. Equivalent surface for two rough surfaces

표면이 모두 거칠기를 가지고 있는 경우 Fig. 3과 같은 한 개의 표면은 완전히 매끄러운 표면과 다른 표면은 두 표면의 조합 거칠기를 갖는 것으로 해석하여도 타당하므로 등가표면 (equivalent surface)의 곡률 ( $R_p$ )은 각각의 곡률( $R_{p1}$ ,  $R_{p2}$ )의 합으로 나타내었다.

$$\begin{aligned} W_{asp} &= p_r A_{re} \\ &= \frac{4}{3} NE' R_p^{1/2} \int_{h_o}^{\infty} (z - h_o)^{3/2} \phi(z) dz \end{aligned} \quad (15)$$

여기서  $A_{re}$ 는 실접촉면적으로 식(16)과 같으며  $p_r$ 은 평균접촉압력이다.

$$A_{re} = \pi N R_p \int_{h_o}^{\infty} (z - h_o) \phi(z) \quad (16)$$

위의 식(15)와 (16)은 탄성변형에 대하여 제한적으로 사용된 식이다. 따라서 소성지수는 식(17)과 같이 '1'보다 작게 하여 적용했다.

$$\phi = \frac{E'}{H} \left( \frac{R_q}{R_p} \right) < 1 \quad (17)$$

또한 두 표면이 서로 슬라이딩 할 때 요철은 매 순간마다 계속 변할 것이므로 이를 고려하기 위해 두 표면의 조합  $R_q$  값을 공분산의 형태로 식(18)과 같이 나타냈다.

$$R_q = \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (18)$$

여기서  $X, Y$ 는 확률변수로써 서로 독립적인 난수(independent random variables)이며  $E$ 는 기대값(Expected value)을 나타낸다. 그리고 본 논문에서는 곡률반경  $R_p$ 와 단위면적당 요철의 밀도사이에는 식(19)와 같은 관계가 있음을 이용하여 수치해석에 적용했다. [7]

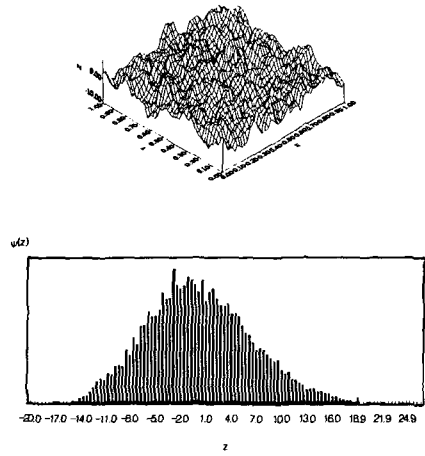
$$N R_q R_p = \text{const}, \quad \sqrt{\frac{R_q}{R_p}} = \text{const} \quad (19)$$

### 3. 결과 및 고찰

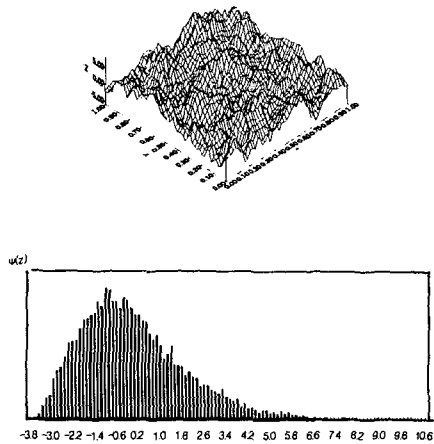
#### 3.1 파라미터에 따른 표면 모델링

표면을 모델링 하기 위하여 가정한 파라미터는  $R_q$ ,  $Sk$ , correlation length,  $\lambda_x, \lambda_y$ ,  $\gamma = \lambda_x / \lambda_y$  이다. Figure 4(a)는 가우시안 분포를 근사적으로 모델링한 표면과 그에 따른 거칠기 분포이며 Fig. 4(b)는 양의  $Sk$  값을 가지는 감마분포를 근사적으로 모델링한 표면과 그에 따른 거칠기의 분포이다.

수치적으로 계산된 파라미터의 값은 가정한 파라미터와 비교했을 때 상대오차가 0.1-2%의 상대오차가 있었다. 그리고 가정한 autocorrelation function은 모델링된 표면의 autocorrelation function과 비슷했다.



$Rq = 5.0 \mu m, Sk = 0.031, Ku = 2.96, \gamma = 1$   
 (a) Gaussian distribution



$Rq = 2.07 \mu m, Sk = 0.3, Ku = 3.09, \gamma = 1$   
 (b) Gamma distribution

Fig. 4. Generated model surfaces

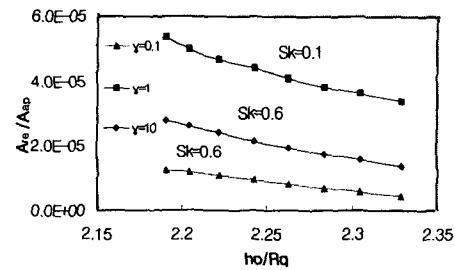
$\lambda_x, \lambda_y$ 의 값이  $dx, dy$ 와 같다면 표면 거칠기의 주된 구조를 모델링할 수 있으며  $\lambda_x, \lambda_y$  값이  $dx, dy$  값의 10배이면 작은

wavelength를 갖는 표면을 모델링할 수 있다[7]. 즉 correlation length는 표면의 전체적인 구조에 영향을 미치며 그에 따라 윤활상태도 바뀐다고 볼 수 있다.

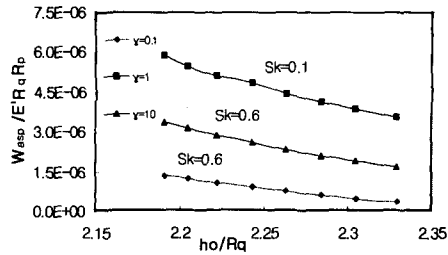
Figure 5(a)는 공칭유막두께의 변화에 따른 실점촉면적의 변화이다. 하중이 증가하면  $h_0$ 가 감소하면서 실점촉면적이 증가하는 것을 볼 수가 있다. 또한 실점촉면적은 두 표면이 isotropic 일 때 크게 나왔다. Figure 5(b)에서도 알 수 있듯이  $h_0$  값이 증가하면서 요철들간의 접촉에 의한 하중이 감소하게 된다. 이것은 실점촉면적이 감소하는 것과 관련이 있다고 볼 수 있다.

Figure 5(c)은 유체유티활에 의한 하중과 공칭유막두께와의 관계를 나타낸 그림이다. Figure 5(b)에서의 결과와 같이  $h_0$ 가 증가하면서 무차원하중이 감소하는 것을 볼 수가 있다. 그러나 두 표면이 isotropic ( $\gamma=1$ ) 한 경우 유체유티활에 의한 무차원하중은 표면이 longitudinal ( $\gamma>1$ ) 혹은 transverse ( $\gamma<1$ ) 한 경우보다 작다.

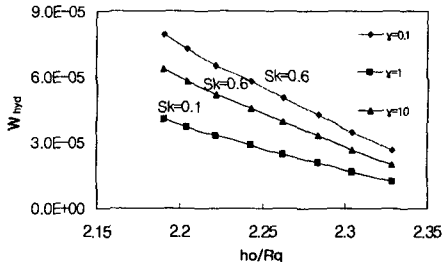
즉 표면의 길이방향과 폭 방향의 상관도 길이(correlation length)가 다르게 되면 상관도길이비(correlation length ratio)가 '1'이 되지 않는다. 따라서 표면의 요철과 요철사이가 윤활유를 담아두는 역할을 하게되어 점성저항의 증가로 표면이 isotropic 한 경우 보다 지지하중이 크게 된다.



(a) Real area of contacts w.r.t  $h_0/Rq$



(b) Dimensionless asperities load w.r.t  $h_o/R_q$



(c) Dimensionless mean hydrodynamic load w.r.t  $h_o/R_q$

Fig. 5. Bearing performance variables due to surface roughness for correlation length ratio

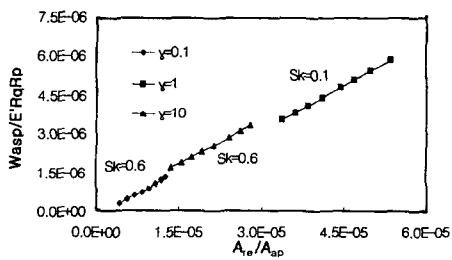


그림6 Dimensionless asperities' load w.r.t real area of contacts

Figure 6은 실접촉면적의 증가에 따른 접촉하중의 변화를 보여주는 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이 표면의  $\gamma$ 값에 관계없

이 그림의 기울기는 거의 일정함을 보여주고 있다. 이것은 주어진 하중이 증가하면서 실접촉면적이 증가하여 식(15)에 나타나있는 평균접촉압력이 거의 일정하게 유지됨을 말해준다.

즉 주어진 하중에서 각 표면의 요철에 작용하는 평균접촉압력은 탄성변형 내에서 변화가 작다고 볼 수 있다. B. Bhushan은 평균접촉압력( $p_r$ )이 겉보기압력(apparent pressure)의 0.04승에 비례한다고 하였고[5] Onions 과 Archard[8]는 평균접촉압력은 공칭하중(nominal load)에 거의 무관하다고 주장하였는데, 이는 본 논문 결과의 타당함을 뒷받침한다고 생각된다.

#### 4. 결론

주어진  $R_q$ 와  $Sk$  그리고 correlation length를 이용하여 표면을 수학적으로 모델링할 수 있었다. 비록, 두 표면이 거시적으로는 평행하여도 표면 거칠기로 인하여 간극에서의 국소유량이 변하고 국부적인 압력이 발생하여서 표면 전체에 걸쳐 평균압력분포가 형성되며 요철의 접촉에 의한 하중이 함께 발생되어 이로부터 지지하중이 계산되었다.

주어진 하중이 증가하면서  $h_o$ 값이 감소하였으며 두 표면이 모두 isotropic할 때 유막에 의한 하중( $W_{hyd}$ )은 적으나 접촉하중( $W_{asp}$ )은 longitudinal 혹은 transverse 표면에서의 하중보다 크게 됨을 밝혔다.

평행스러스트 베어링에서 외부작용 하중이 증가하여도 요철의 탄성변형 내에서는 평균접촉압력은 거의 일정했다.

#### NOTATION

$a_{kl}$  :coefficient of the transformation matrix

$A_{re}$  :real area of contacts,  $m^2$

$A_{ap}$  :apparent area of contacts,  $m^2$

$E'$  :composite Young's modulus, [Pa]

$$\frac{1}{E'} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

$E_1, E_2$  :Young's moduli of each surface, [Pa]

$\bar{h}$  :average film thickness,  $\mu m$

$h_o$  :nominal film thickness,  $\mu m$

$h_t$  :total film thickness,  $\mu m$

$H$  :hardness of surfaces

$H_o$  :dimensionless nominal film thickness

$Ku$  :Kurtosis of sliding surface

$N$  :number of asperities

$N'$  :number of asperities of unit area

$\bar{p}$  :mean hydrodynamic pressure, [Pa]

$1/R_p$  :sum of the curvatures of two surfaces, 1/m

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_{p1}} + \frac{1}{R_{p2}}$$

$Sk$  :Skewness of sliding surface

$U_1, U_2$  :sliding speed of each surface  
m/s

$\bar{W}$  :mean hydrodynamic load

$W$  :applied load [N]

$W_{asp}$  :asperities load [N]

$W_{hyd}$  :dimensionless mean hydrodynamic load

$z_1, z_2$  :roughness height of surfaces measured from their mean line,  $\mu m$

$\gamma = \lambda_x^* / \lambda_y^*$  :asperity aspect ratio

$\eta_{ij}$  :independent identically distributed random numbers

$\lambda_x^*, \lambda_y^*$  :correlation lengths along x and y directions.  $\mu m$

$\mu$  :absolute viscosity of lubricant,

$$N \cdot s / m^2$$

$\phi_x, \phi_y$  :pressure flow factors

$\phi_s$  :shear flow factor

$\phi_c$  :contactor factor

$\psi(z)$  :probability density function of roughness height

$\psi$  :plasticity index

## 5. 참고문헌

1. Patir N. and Cheng H. S., "An Average Flow model for Determining Effect of three dimensional Roughness on Partial Hydrodynamic Lubrication," ASME, J. Lubri. Tech. Vol. 100, pp 12-17, 1978
2. Patir N. and Cheng H. S., "Application of Average Flow model to Lubrication Between Rough Sliding Surface", ASME, J. Lubri. Tech. Vol 101, pp 220-230, 1979
3. Wu C. and Zheng L., "An Average Reynolds Equation for Partial Film Lubrication with a Contact Factor." ASME, J. of Tribology, Vol. 111, pp 188-191, 1989.
4. J. A. Greenwood and J. H. Tripp, "The Contact of Two Nominally Flat Rough Surface", Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol. 185, pp 625-633, 1971
5. B. Bhushan, "Contact mechanics of Rough Surfaces in Tribology : multiple asperity contact", Tribology Letters Vol. 4 pp 1-35, 1998
6. Nadir Patir, "A Numerical Procedure for Random Generation of Rough Surface", Wear, Vol 47, pp 263-277, 1978
7. Y. Hu, H. S. Cheng, T. Arai, Y. Kobayashi, and S. Aoyama, "Numerical Simulation of Piston Ring in Mixed Lubrication - A Nonaxisymmetrical Analysis", ASME, J. of Tribology, Vol.

116, 1994

8. Onions, R. A. and Achard, J. F. "The Contact Surfaces Having a Random Surface Structure", J. of Phys. D. Appl. Phys. Vol. 6, pp. 289-304, 1973

### Appendix

1. pressure flow factor

$$\phi_x = 1 - C e^{-rH} \text{ for } \gamma \leq 1$$

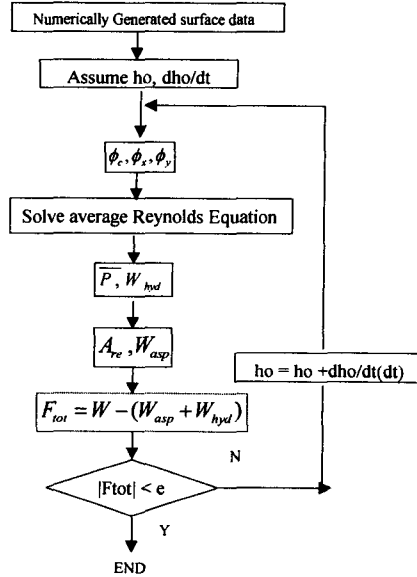
$$\phi_x = 1 + C H^{-r} \text{ for } \gamma > 1$$

2. shear flow factor

$$\phi_s = V_{r1} \Phi_{s1}(h_o/Rq, \gamma_1) - V_{r2} \Phi_{s2}(h_o/Rq, \gamma_2)$$

$$V_{r1} = \left(\frac{Rq_1}{Rq}\right)^2, V_{r2} = \left(\frac{Rq_2}{Rq}\right)^2 = 1 - V_{r1}$$

3. Flow Chart for numerical calculation



A.Fig. 1. Flow Chart for numerical calculation