

# Kurtosis를 고려한 3차원 거친 표면의 탄성 접촉 해석

김태완 · 강민호 · 구영필\* · 조용주\*\*

부산대학교 대학원 정밀기계공학과

\*부산대학교 기계기술연구소

\*\*부산대학교 기계공학부

## The Elastic Contact Analysis of 3D Rough Surface including the Kurtosis

Tae-Wan Kim, Min-Ho Kang, Young-Pil Koo\* and Yong-Joo Cho\*\*

*Graduate School, Pusan National University*

*Research Institute of Mechanical Technology, Pusan National University*

*\*\*School of Mechanical Engineering, Pusan National University*

---

**Abstract** - Surface roughness plays a significant role in friction, wear, and lubrication in machine components. Most engineering surfaces have the nongaussian distribution. So, in this study, contact simulation are conducted for not only gaussian surfaces but also nongaussian surfaces. Nongaussian rough surface considering the kurtosis is generated numerically. And the effects of kurtosis on real contact area fraction, average gap, and mean asperity contact pressure are studied. It will be shown that the real contact area fraction and the mean asperity contact pressure are sensitive to the characteristics of surface geometry according to kurtosis.

**Key words** - Contact Analysis, Nongaussian Surface, Kurtosis, Real contact area, Average Gap, and Mean Asperity Contact Pressure

### 1. 서론

기계요소에 있어 면대면 접촉은 필연적이며 이러한 접촉의 심각한 정도에 따라 마찰 마모의 표면거칠기나 형상에 따라 극도로 높은 레벨에까지 다다를 수 있으며 이는 표면 내부의 응력집중을 야기시킬 수 있고 미세균열의 핵생성이나 마모입자의 형성을 가속시

킬 수 있다. 따라서 적절한 트라이보 시스템의 설계를 위해서는 접촉면의 미소 접촉거동에 대한 정확한 이해는 매우 중요하다 할 수 있다.

그동안 거친 표면의 접촉에 관한 많은 연구들이 있어왔다. 우선 고전적으로는 대체로 돌기들의 상호작용의 영향은 무시한 채 돌기들이 단지 어떤 기하학적인 형상과 높이 분

포를 가진다는 가정하에서 수행되어져 왔는데, Greenwood와 Willamson[1]은 접촉돌기들의 형상을 일정한 곡률을 갖는 구로써 근사시켜 접촉하중을 계산하였으며 Whitehouse와 Archard[2]는 가우시안 돌기 분포를 갖는 Random Surface에 대해서 rms 거칠기와 상관길이(Correlation length)의 파라메타를 사용하여 해석하였다. Onions와 Archard[3]는 이러한 결과를 이용하여 평균 압력과 겹보기 면적과는 독립적임을 밝혔고 Bush 등[4,5]은 Nayak[6]의 등방성 가우시안 Random Surface 모델을 적용시켜 실접촉 면적은 하중에 거의 선형적임을 밝혔고 이후 이 해석을 강한 이방성을 띄는 표면에까지 확대시켰다. 그러나 이러한 연구들은 작은 하중에 대해서는 그 결과가 유효하나 높은 하중에서는 돌기들의 상호영향을 배제시킴으로써 그 정확도가 결여된다.

최근에는 컴퓨터의 증가된 연산속도에 힘입어 많은 접촉 해석 모델들이 생기고 있다. Lai와 Cheng[7]은 컴퓨터로 생성시킨 표면 모델을 이용하여 실접촉 면적과의 접촉압력을 계산하였고 Lee와 Cheng[8]은 2차원 거칠기를 가진 표면에 대해서 돌기들의 탄성작용을 고려해 실접촉 면적, 평균 간극, 평균 돌기 접촉 압력의 관계식을 도출하였으며 Lee와 Ren[9,10]은 이 연구를 3차원 접촉거동에 대해 확장하였다.

이러한 모델들은 한 돌기의 변형이 다른 돌기의 변형에 영향을 미치게 되는 돌기들 사이의 탄성변형을 고려함으로써 기존의 고전적인 연구들에 비해 큰 이점이 있으나 이상의 연구들은 거의 대부분 가우시안 표면이라는 기본 가정하에서의 접촉 해석 결과이다. 그러나 대부분의 기계표면은 Non-gaussian Surface를 이루고 있기 때문에 위의 결과들을 실제의 기계표면에 적용하는 데는 많은 문제점이 있다.

따라서 본 연구에서는 Gaussian Surface 뿐만 아니라 Nongaussian Surface에 대해서 접촉 해석을 수행하여 그 특성을 파악해 보

고자 한다. 이를 위해 비정규 분포의 특성을 나타내는 인자의 하나인 Kurtosis를 고려해 Nongaussian Surface를 컴퓨터로 생성시켰으며, 이러한 거친 표면의 접촉거동에 대해 실접촉 면적, 평균 간극 그리고 평균 돌기 접촉 압력 등을 통해 Kurtosis 성분에 대한 영향을 규명할 것이다.

## 2. 수치적 표면 생성

### 2.1 Kurtosis와 표면 거칠기

기존의 표면 거칠기를 고려한 연구에서는 표면 거칠기 파라미터로 중심선 평균 거칠기 (Ra)나 Rq(r.m.s)값을 많이 이용해왔다. 그러나, 중심선 평균 거칠기나 Rq값만으로는 표면 형상을 정확히 나타내지는 못한다. 같은 중심선 평균 거칠기나 Rq값을 가지더라도 다른 돌기 분포를 가지는 표면 형상을 가질 수 있다. 따라서 표면 형상을 더욱 정확히 나타내기 위해서는 돌기의 분포상태를 나타내는 Skewness와 Kurtosis를 사용해야만 한다. Kurtosis는 돌기들의 분포가 어떤 높이에서 집중이 되는지를 나타내는 것이다. 돌기들의 분포가 어떤 높이에서 집중적으로 분포되어 있다면, 분포곡선은 뾰족한 모양을 나타내고 kurtosis값은 커지게 되며, 돌기들의 분포가 넓게 분산된다면, 분포곡선모양은 평평하게 변하며 이 값은 낮아지게 된다. Kurtosis의 계산에는 식(1)이 이용된다.

$$Ku = \frac{1}{Rq^4} \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \bar{\psi} dz \quad (1)$$

where, Rq : rms Roughness

z : Surface Roughness Height

$\bar{\psi}$  : Power Spectral Density Function

Kurtosis값이 3이 되는 경우에는 표면 형상은 정규분포를 이루고, 3보다 큰 경우는 Leptokurtic, 3보다 작은 경우는 Platykurtic 이라 한다[11].

## 2.2 표면 생성 절차

표면 거칠기가 윤활 해석에 고려되어지기 위해서는 우선 거칠기를 갖는 표면 데이터를 얻어야한다. 표면 거칠기를 구하는 방법은 측정장비를 이용하는 방법과 수치적으로 표면을 생성하는 방법이 있다. 측정에 의한 방법은 정도가 높은 측정장비를 요구하고 표면의 구조를 알기 위해서는 단면을 수많이 측정하여 재배열해야하는 어려움이 따르고 있다. 그러나, 수치적 방법은 측정장비가 필요치 않으며, 거칠기 높이의 상관관계, 거칠기 높이의 분포를 원하는 형태로 쉽게 부여할 수 있어서 거칠기의 특성을 나타내는 각 파라메타의 영향을 분리하여 파악할 수 있는 장점이 있다.

따라서, 본 연구에서는 임의의 Kurtosis 값을 표면에 부여하기 위하여 수치적으로 생성된 표면을 사용하였다.

표면 구조의 통계적 물성치는 확률밀도함수(Power Spectral Density Function)와 자기상관함수(Autocorrelation Function)로부터 특정 지워진다. 즉, 어떤 고려해야할 통계적 물성치를 갖는 면을 생성하는 편리한 방법은 미리 정해진 확률밀도함수와 자기상관함수를 갖는 면을 생성하는 것이다. 면의 자기상관함수는 식(2)와 같이 정의된다.

$$R(\lambda_x, \lambda_y) = E\{z(x, y)z(x + \lambda_x, y + \lambda_y)\} \quad (2)$$

$E$  : Expectancy Operator

$\lambda_x, \lambda_y$  : Autocorrelation Length along  $x$  and  $y$ -directions

표면 거칠기의 계수형태를 고려해야 하므로 Index Notation을 사용하는 것이 편리하다. 즉,  $z_{ij}$ 가  $x = i\Delta x$ ,  $y = j\Delta y$ 에서의 거칠기 높이를 나타낸다면  $R_{pq}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$R_{pq} = R(p\Delta x, q\Delta y) = E(z_{ij}, z_{i+p, j+q}) \quad (3)$$

where,  $\Delta x, \Delta y$  : Sampling Interval

확률밀도함수는 거칠기 높이의 분포에 관계하여 정규분포 또는 비 정규분포로 구분할 수 있다. 식(4)에 정규분포에 대한 확률밀도 함수를 나타내었으며 이 경우에 거칠기 높이의 표준편차와 평균치를 부여하여 원하는 거칠기 높이분포를 구할 수 있다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Rq^2}} \exp\{-(x - \bar{x})^2 / 2Rq^2\} \quad (4)$$

where,  $Rq$  : Standard Deviation

$\bar{x}$  : Average Value

식(5)는 비정규 분포에 대한 확률밀도함수이며 가중치  $a, b$ 를 변경하여 원하는 거칠기 높이 분포를 구한다. 즉,  $a < b$ 가 되도록  $a, b$ 를 취하면 거칠기 높이는 골짜기로 편중되고  $a > b$ 인 경우에는 높은 값들이 많아진다( $Sk$ ).  $a = b < 3$ 이거나  $a = b > 3$ 인 경우에는 symmetric 하지만 거칠기 높이 분포가 비 정규분포 형태를 가진다( $Ku$ ).

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a, b)} x^{(a-1)} \cdot (1-x)^{(b-1)} \quad (5)$$

where,  $\beta(a, b)$  : Beta Function

$a, b$  : Weighting Factor

Random Matrix에 대한 Linear Transformation을 이용하여 주어진 확률밀도 함수와  $n \times m$  Autocorrelation Matrix [ $R_{pq}$ ]에 대한 거칠기 높이 [ $z_{ij}$ ]의  $N \times M$  matrix를 생성할 수 있다. Random Number Generator를 이용하여  $(N \times n) \times (M \times m)$  matrix [ $\eta_{ij}$ ]를 생성한 다음 Linear Transformation을 통하여 거칠기 높이가 구해진다[6],[12]. Fig. 1은 표면 거칠기의 수치적 생성과정을 나타낸 것이다.

본 연구에서는 Kurtosis에 따른 접촉상황을 해석하기 위해  $Ku=3.0$ 인 Gaussian Surface와 함께  $Ku=2.0$ 과  $Ku=4.0$ 의 Nongaussian Surface를 생성시켜 접촉해석을 수행할 것이다.

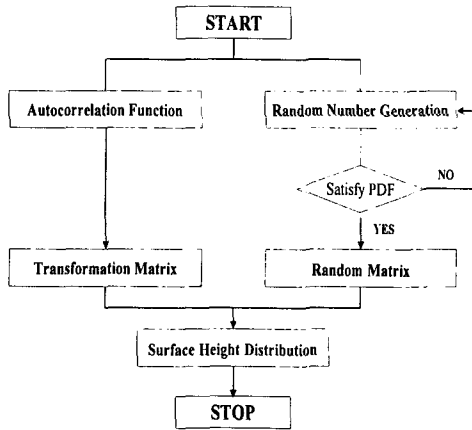


Fig. 1 Flowchart of generation of random rough surface

### 3. 접촉 해석

본 연구에서는 기본적으로 Influence Matrix를 이용한 방법으로 3차원 접촉해석을 수행하였으며 접촉 영역은 한 변의 길이가  $2a$ 인 사각영역으로 가정하였다. 본 연구에서 사용한 수치해석 과정은 먼저 앞 절에서 상술한 방법으로 거친 표면을 수치적으로 생성시키고 두 거친 표면 사이의 접근 거리를 변화시켜 탄성 변형량을 부여하여 초기 접촉점들의 수와 초기 변형량을 계산한다. 그리고 돌기들의 상호 작용을 고려하기 위한 Influence Matrix를 구성하여 초기 접촉 압력을 계산한 다음, 음의 압력값을 갖는 접촉점은 배제시키고 새로운 접촉점 수에 대응하는 Influence Matrix를 재구성하는 반복계산을 수행하여 접촉압력을 계산하고 아울러 실 접촉 면적, 평균 간극 그리고 평균 돌기 접촉 압력을 계산하게 된다. 이상의 파라메타들은 모두 무차원화된 수치로써 나타낼 것이다.

일반적으로 한 쌍의 거친 표면의 접촉은 하나의 상당 표면(Equivalent Surface)과 가압하는 강체면으로 모델링 할 수 있으며, 본

연구에서도 이를 적용시켰다. Fig. 2와 같은 유한폭을 가진 걸보기엔 평평한 거친 표면에 강체면을 압착시키게 되면 돌기 압력 분포는 전체적으로 균일하지 않고 에지(Edge)부위에 압력이 집중되는 바람직하지 못한 문제가 발생한다. 이상적으로는 이러한 에지 부분의 영향을 피하기 위해서 접촉 영역을 무한히 넓은 것으로 두어야 하지만 이는 수치적으로는 명백히 불가능한 것이다. 이를 해결하기 위해 본 연구에서는 상당 표면을 프로파일링시키는 방법을 사용하였는데, 그 절차는 다음과 같다.

우선, 상당 표면을 기준면과 표면 거칠기 성분으로 분리시켜 사각 기준면에 대해 접촉 해석을 수행하여 탄성 변형량과 수직 압력 분포를 구한다. 여기서 구한 압력 분포로부터 사각면 한가운데의 압력으로써 전 접촉영역에 걸쳐 대체시켜 피크 압력이 없는 균일한 사각 압력 분포를 만든다. 다음에는 변경한 압력분포로써 다시 접촉해석을 수행하여 탄성 변형량을 계산하여 원래의 사각 기준면에서 기존의 탄성 변형량과 변경후의 탄성 변형량의 차를 감하고 여기에 다시 표면 거칠기 성분을 중첩함으로써 상당 표면의 프로파일링을 완성한다. 이러한 프로파일링 방법으로써 에지 부위의 압력스파이크를 효과적으로 없앨 수 있고 무한체의 접촉시뮬레이션이 가능하다.

이상과 같은 접촉영역에 작용하는 균일한 하중  $p$ 에 의한 반무한체 표면의 변위해는 다음과 같이 주어진다.[13]

$$\frac{\delta(x, y) E'}{p} = (x+a) \ln \left\{ \frac{(y+a) + \sqrt{(y+a)^2 + (x+a)^2}}{(y-a) + \sqrt{(y-a)^2 + (x+a)^2}} \right\} + (y+a) \ln \left\{ \frac{(x+a) + \sqrt{(y+a)^2 + (x+a)^2}}{(x-a) + \sqrt{(y+a)^2 + (x-a)^2}} \right\} + (y-a) \ln \left\{ \frac{(y-a) + \sqrt{(y-a)^2 + (x-a)^2}}{(y+a) + \sqrt{(y+a)^2 + (x-a)^2}} \right\} + (y-a) \ln \left\{ \frac{(x-a) + \sqrt{(y-a)^2 + (x-a)^2}}{(x+a) + \sqrt{(y-a)^2 + (x+a)^2}} \right\} \quad (6)$$

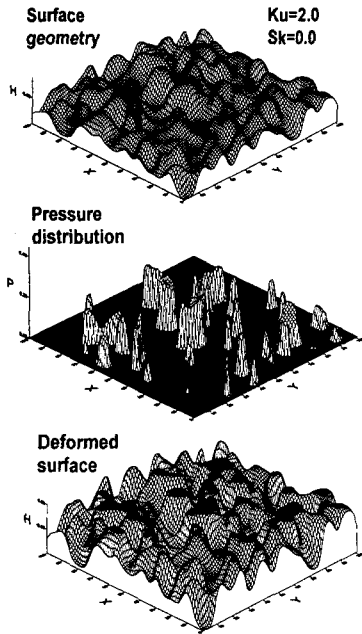


Fig. 2 Surface geometry, pressure distribution and surface displacement(Ku=2.0, platykurtic)

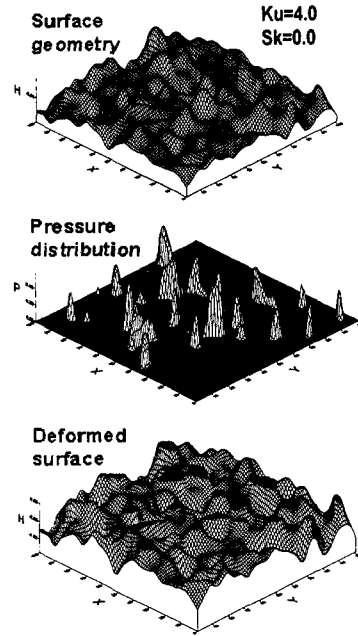


Fig. 4 Surface geometry, pressure distribution and surface displacement(Ku=4.0, leptokurtic)

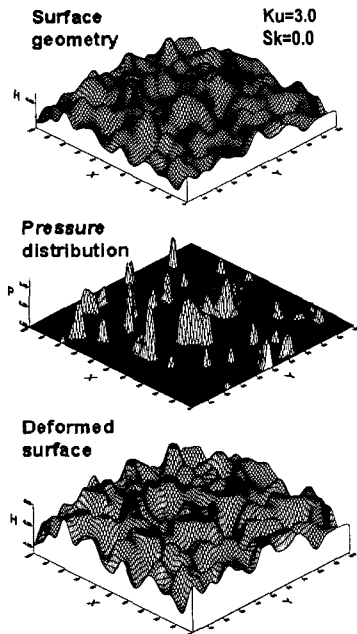


Fig. 3 Surface geometry, pressure distribution and surface displacement(Ku=3.0, gaussian)

#### 4. 결과 및 고찰

Fig. 2~Fig. 4는 Kurtosis가 각각 2.0, 3.0, 4.0인 표면에 대해 동일한 평균 접촉 압력 하에서의 결과를 도시하였다. 우선 Fig. 2~Fig. 4의 표면형을 살펴보면, Fig. 2의 표면 형상은 Ku=2.0의 Platykurtic으로 Fig. 3의 Gaussian 표면에 비해 상대적으로 돌기들이 평평한 경향을 가지고 있음을 알 수 있는 반면, Fig. 4의 표면 형상은 Ku=4.0인 Leptokurtic 표면에 비해 상대적으로 돌기들이 뾰족한 경향을 나타낼 수 있다. Fig. 2~Fig. 4의 두 번째 그림들은 접촉 압력의 분포를 나타낸 것으로 무차원 평균 접촉 압력은 세 경우 모두  $\bar{P} = \frac{\bar{p}}{E'} = 0.0279$ 이다. 그리고 압력분포의 그림으로부터 에지 부분의 돌기들의 압력 스파이크가 나타나지 않음을 알 수 있고 이는 반

무한체의 거친 표면 접촉을 시뮬레이션 할 때 본 연구의 접근 방법의 유용성을 잘 나타내 주고 있다.

Fig. 2~Fig. 4의 세 번째 그림들은 변형후의 표면 형상을 도시한 것으로 실접촉율은 각각 0.134(Ku=2.0), 0.106(Ku=3.0), 0.0803(Ku=4.0)으로서 Kurtosis 값이 커질수록 더 적은 실접촉면적을 가짐을 알 수 있는데 이는 Kurtosis 값이 커질수록 돌기 윗부분의 형상이 뾰족하고 또 하중조건이 비교적 낮은 레벨이기 때문에 나타나는 결과라 할 수 있다.

Fig. 5~Fig. 7은 세 가지의 다른 Kurtosis에 대해서 걸보기 평균 접촉압력에 따른 실접촉율, 평균 간극, 평균 돌기 접촉 압력의 변화를 도시한 것이다. 그래프의 각 점은 같은 성질을 지니는 7개의 다른 표면들의 결과를 평균하여 계산한 것이다.

우선, Fig. 5에서는 세 경우 모두 평균 접촉압력(하중)이 증가함에 따라 실접촉율이 증가하고 있는데, 낮은 하중에서는 하중과 실접촉 면적의 관계가 선형적이거나 낮은 하중에서는 돌기들의 탄성 작용의 영향에 의해 선형적인 관계가 나타나지 않음을 알 수 있다. 또 Ku=4.0인 경우 낮은 하중에서는 돌기 끝단의 형상이 뾰족하기 때문에 실접촉율이 상대적으로 낮으나, 높은 하중에서는 돌기 골 부위의 Bearing Length Ratio가 커짐으로 실접촉율이 커짐을 알 수 있다

Fig. 6은 평균 접촉 압력에 따른 평균 간극을 도시한 것인데 전체적으로 하중이 증가함에 따라 평균간극이 비선형적으로 감소하고 있음을 알 수 있다. Kurtosis값에 대해서는 큰 차이를 발견할 수 없으나, 적은 하중에서는 Kurtosis가 클수록 평균간극이 다소 크고, 낮은 하중에서는 다소 작아짐을 알 수 있는데 이 역시 Kurtosis에 따른 표면형상의 특성에 기인하는 것으로 분석될 수 있다.

대부분의 트라이블로지 현상은 표면들의 미시적인 상호작용에 의해 결정이 되므로 거시적인 걸보기 평균 접촉압력은 면접촉의 상

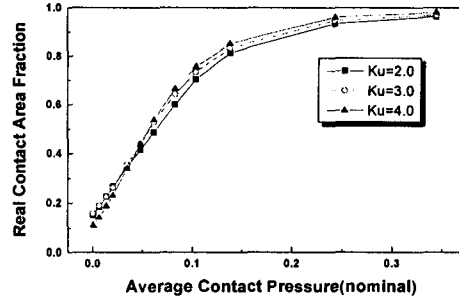


Fig. 5 The real contact area against the nominal contact pressure for different kurtosis

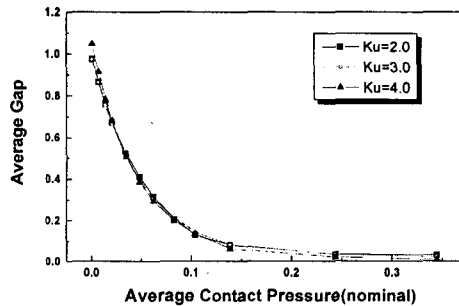


Fig. 6 The average gap against the nominal contact pressure for different kurtosis

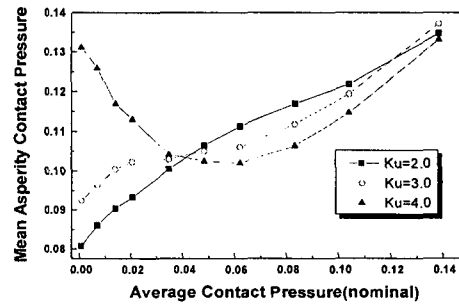


Fig. 7 The mean asperity contact pressure against the nominal contact pressure for different kurtosis

호작용을 밝혀내는데 부적절하다. 따라서 이러한 미비점을 보완한 인자로 평균 돌기 접촉 압력을 들 수 있는데, 이는 평균 압력을 실접촉면적으로 나눈 값으로 계산될 수 있다. Fig. 7에 걸보기 압력에 따른 평균 돌기

접촉 압력의 변화를 도시하였는데  $Ku=4.0$ 인 경우, 작은 하중에서는 실접촉 면적인 적음에 기인하여 평균 돌기 접촉 압력이 상대적으로 크나 하중이 증가할수록 실접촉 면적의 증가에 따라 줄어든다. 그러나 일정 수중의 하중에 다다르면 더 이상의 실접촉면의 증가가 없기 때문에 평균 돌기 접촉 압력은 다시 증가하게 된다.

## 5. 결 론

비정규 분포의 특성을 나타내는 인자의 하나인 Kurtosis를 고려한 Nongaussian Surface를 수치적으로 생성하고 이러한 거친 표면의 접촉거동에 대해 실접촉 면적, 평균 간극 그리고 평균 돌기 접촉 압력 등을 통해 Kurtosis 성분에 대한 영향을 살펴본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 반무한체의 거친 표면 접촉의 시뮬레이션시 상당 표면의 프로파일링을 통해 에지부위의 압력 스파이크가 나타나지 않음으로써 본 연구의 접근 방법의 유용성을 입증하였다.
2. 큰 Kurtosis의 표면은 작은 Kurtosis의 표면에 비해 낮은 하중에서는 돌기 끝단의 형상이 뾰족하기 때문에 실접촉율이 상대적으로 낮으나, 높은 하중에서는 돌기 끝 부위의 Bearing Length Ratio가 커짐으로 실접촉율이 커짐을 알 수 있다
3. Kurtosis 값에 따라서 실접촉율과 평균 돌기 접촉 압력에 상당한 영향을 미치나 평균간극에 대해서는 그 영향이 적음을 알 수 있었다.

## 기호설명

$A_n$  = nominal contact area

$A_r$  = real contact area

$$E' = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \right]^{-1},$$

$E_{1,2}$  is Young's module

$h(x, y)$  = height of the deformed surface measured from the rigid plane during contact

$$\bar{h} = \text{average gap, } \frac{1}{A_n} \int_w h(s, t) ds dt$$

$H$  = dimensionless average gap,  $\frac{\bar{h}}{\sigma}$

$\bar{p}$  = average contact pressure,

$$\frac{1}{A_n} \int_w P(s, t) ds dt$$

$P$  = dimensionless average contact

pressure,  $\frac{\bar{p}}{E'}$

$\gamma$  = asperity aspect ratio,  $\frac{\lambda_y^*}{\lambda_x^*}$

$\lambda_x^*, \lambda_y^*$  = autocorrelation length along  $x$

and  $y$ -directions respectively

$\sigma$  = root mean square roughness

$w$  = contact simulation domain

$Ku$  = Kurtosis

$a$  = the length of sides of contact domain

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{a}$$

## 참 고 문 헌

1. Greenwood, J. A., and Williamson, J. B. P., 1966, "Contact of Nominally Flat Surfaces," Proc. Roy. Soc., Vol. A295, pp.300-319.
2. Whitehouse, D. J., and Archard, J. F., 1970, "The Properties or Random Surfaces of Significance in Their Contact," Proc. Roy. Soc., Vol. A316, pp.97-121.
3. Onions, R. A., and Archard, J. F., 1973, "The Contact of Surfaces Having a Random Surface Structure," J. of Phys. D. Appl. Phys., Vol. 6, pp. 289-304.

4. Bush, A. W., R. D. Gibson, et al., 1979, "Strongly Anisotropic Rough Surface," ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 101, pp.15-20.
5. Bush, A. W., R. F. Gibson, et al., 1975, "The Elastic Contact of a Rough Surface," Wear, Vol. 35, pp.87-111.
6. Nayak, P. R., 1971, "Random Pressure Model of Rough Surfaces," ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 93, pp.398-407.
7. Lai, W. T. and Cheng, H. S., 1985 "Computer Simulation of Elastic Rough Contact," ASLE Trans., Vol. 28, No. 2, pp.172-180
8. Lee, S. C., and Cheng, H. S., 1992, "On the Relation of Load to Average Gap in the Contact Between Surfaces with Longitudinal Roughness," STLE Tribology Transactions, Vol. 35, pp.523-529
9. Ren, N., and Lee, S. C., 1993, "Contact Simulation of 3-Dimensional Rough Surfaces Using Moving Grid Method." ASME Journal of Tribology, Vol. 115, No.4, Oct., pp.597-601.
10. Ren, N., and Lee, S. C., 1994, "The Effects of Surface Roughness and Topography on the Contact Behavior of Elastic Bodies." ASME Journal of Tribology, Vol. 116, No.4, Oct., pp.804-811.
11. Hamrock, B. J. "Fundamentals of Fluid Film Lubrication," McGRAW-HILL, 1994.
12. Patir, N., 1978, "A Numerical Procedure for Random Generation of Rough Surfaces," Wear, Vol. 47, pp.263-277.
13. Love, A. E. H., 1929, "The Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary," Proc. Roy. Soc. London, Vol. A228, pp.377