

역확산 방정식을 기반으로 한 최적 정규화 영상 복원 알고리즘

Optimal Regularized Image Restoration Algorithm based on Backward Diffusion Equation

최은철, 이석호, 강문기

연세대학교 전기 컴퓨터공학과

Eun Cheol Choi, Suk Ho Lee, Moon Gi Kang

Dept. of Electric and Electronic Engineering, Yonsei Univ.

요약

본 논문은 영상복원을 역확산 과정으로 해석하여 복원된 영상을 역확산 방정식의 해로 구하는 알고리즘을 제안한다. 역확산 과정은 물리적으로 불량위치(ill-posed)과정이기 때문에, 이를 정규화 해주어야 하는데 이를 위해서 역확산 과정을 고유함수(eigenfunction)들의 전개로 나타낸 후에 고유함수들의 계수들을 조작하였다. 본 논문에서는 계수들을 조작할 때 영상이 가지고 있는 주파수 특성을 고려하여 한계주파수(cut-off frequency)를 넘은 경우에 계수들을 시간과 주파수의 감소함수로 나타내어 불량위치문제를 해결하였다. 계수를 주파수에 대한 감소함수로 나타낸 것은 영상에 저주파 성분이 많고, 고주파 성분이 영상의 형성에 끼치는 영향이 상대적으로 적다는 영상의 특성을 고려한 것이다. 이러한 감소함수를 사용하였을 때 불량위치 문제를 해결할 수 있다는 것을 증명하였고, 실험적으로 양질의 영상을 산출함을 보였다.

I. 서론

Koenderick의 scale-space 이론[1]에 의해 확산방정식이 영상처리에 쓰이기 시작하면서 편미분방정식을 이용한 영상처리가 많은 분야에서 연구되어졌다[2]-[5]. 이 논문에서는 편미분방정식을 영상복원에 적용하였다. 즉, 영상복원 과정을 역확산 과정으로 해석하여 복원된 영상을 역확산 방정식의 해로 해석하였다. 영상복원을 역확산으로 구하는 것은 기존의 영상복원 알고리즘에 대해 다음과 같은 이점을 가지고 있다. 먼저, 역확산의 유일한 파라미터가 역확산의 경과 시간이기 때문에 기존의 영상 복원 알고리즘들과 달리 여러 개의 파라미터를 추정하는 과정을 생략할 수 있게 된다. 그러므로 잘못된 파라미터를 추정하여 생기는

문제점들을 지양할 수 있을 수 뿐만 아니라, 이 파라미터의 값을 자유로이 변경시킴으로써 필터링과 복원 과정의 사이를 자유로이 오갈 수 있다. 이렇게 하여 임의의 영상잡음 제거와 복원정도를 구현할 수 있다. 영상 복원을 역확산 과정으로 해석하는데 있어 또 다른 이점은 편미분 방정식의 여러 성질들을 이용할 수 있다는 데 있다. 예를 들어 편미분 방정식은 쉽게 알고리즘들을 결합시킬 수 있는 특징을 가진다. 이를 이용하여 영상잡음제거를 나타내는 미분항과 영상복원의 미분항을 단지 더함으로써 영상복원과 동시에 영상잡음제거를 하는 새로운 알고리즘을 쉽게 구현할 수 있다. 그러나 역확산 과정은 물리적으로 불량위치 과정이기 때문에, 이를 정규화해주어야 한다. 이를 위해서 역확산 과정을 고유함수들의 전개로

나타낸 후에 고유함수들의 계수들을 조작한다. 이 논문에서는 이 계수의 값이 어느 한계치를 넘을 경우, 계수를 한계시간과 주파수의 감소함수로 나타내어 불량위치문제를 해결하였다. 계수를 주파수에 대한 감소함수로 나타낸 것은 영상에 저주파 성분이 많고, 고주파 성분이 영상의 형성에 끼치는 영향이 상대적으로 적다는 영상의 특성을 고려한 것이다. 본 논문에서는 감소함수를 썼을 때, 불량위치문제를 해결할 수 있음을 수학적으로 증명하였다. 뿐만 아니라 보다 많은 고유함수들을 영상 복원과정에 포함시킬 수 있으므로 더 양질의 복원된 영상을 얻을 수 있음을 실험적으로 보였다.

II. 영상 모델링

역확산 방정식은 고전적인 불량위치문제이다. 확산방정식의 해가 촘촘해짐에 따라 역확산 방정식의 해는 초기값에 연속적이지 않은 해가 나온다. 그러나 초기의 데이터에 적당한 한계를 줌으로써 해를 안정화시킬 수 있다는 것이 알려져 있다[6][7]. 이것은 [8]에서 정량적으로 증명되었다.

불량위치문제를 다루는 방안이 [9]에서 제안되었고, 이 방안으로 역확산방정식을 푼 시도가 이루어졌다[10]. 역확산 방정식의 매핑을 다음과 같이 정의할 때,

$$A: w \rightarrow -\nabla \cdot a \nabla u + qu. \quad (1)$$

$0 < a(\cdot)$ 이고 $q(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ 이면 고유함수 $\{w_k(\cdot)\}$ 들의 직교 기저가 존재한다. 그러므로,

$$\begin{aligned} Aw_k &= -\lambda_k w_k \quad (\langle w_j, w_k \rangle = \delta_{jk}) \\ \text{with } \lambda_k &\in \mathbb{R}_+ \quad \lambda_k \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2)$$

이 된다. 식 (2)의 '전방'의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$u(t, \cdot) = \sum_k c_k e^{-\lambda_k t} w_k(\cdot). \quad (3)$$

특히 $t = 0$ 일 때,

$$u(0, \cdot) = \sum_k c_k w_k(\cdot). \quad (4)$$

이다.

역확산 방정식은 $\|u(0, \cdot)\| \leq M_0$ 과 같이 미지의 초기 데이터에 사전 경계(a priori bound)를 줌으로써 해를 안정화시킬 수 있다. 고유함수들의 정규직교성질로부터

$$\left[\sum_k |c_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \|u(0, \cdot)\| \leq M_0. \quad (5)$$

이 된다.

열화된 영상 $\bar{v}(\cdot)$ 이 주어졌을 때, '정확한 역확산식은' 식 (3)으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\dot{v}(t) := \sum_k \dot{\rho}_k(t) \bar{\gamma}_k w_k \quad (6)$$

여기서 $\bar{\gamma}_k = \langle \bar{v}(\cdot), w_k(\cdot) \rangle$ 그리고 $\dot{\rho}_k = e^{+\lambda_k(T-t)}$ 이다. 그러나 이것은 다음의 식에 나온 에러가 $\dot{\rho}_k \rightarrow \infty$ 일 때 발산되기 때문에 완전히 쓸모 없는 식이다.

$$\|\dot{v}(t) - u(t)\|^2 = \sum_k [\dot{\rho}_k(t)]^2 |\bar{\gamma}_k - \gamma_k|^2 \quad (7)$$

이것이 바로 불량위치의 성질을 나타내준 것이다. [10]에서는 해를 안정화시킬 수 있는 다음과 같은 식을 제안하였다.

$$v(t, \cdot) = R(t) \bar{u} = \sum_k \rho_k(t) \bar{\gamma}_k w_k(\cdot) \quad (8)$$

여기서 $v(t, \cdot)$ 는 해를, $R(t)$ 는 역확산의 선형연산자를 나타내고, $\{\rho_k(t)\}$ 는 모든 k 에 대해서 $|\rho_k(t)| \leq \beta$ 이 되도록 선택하였다. 여기서 $\beta(t)$ 와 $\rho_k(t)$ 는 에러가 최소화되도록 결정된다. 그러면 에러는 다음과 같이 안정화된다.

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \varepsilon(t) := [M_0]^{1-H} T [\bar{\varepsilon}]^{H/T} \quad (9)$$

여기서 $\bar{\varepsilon}$ 은 열화된 데이터의 관측과 이론적인 값간의 관측 에러이다. $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$ 일 때 에러 한계가 0으로 가기 때문에 식 (8)은 $0 < t < T$ 에 대해 안정하다. 그러므로 위의 최적화과정을 통해서 안정되고, 에러가 유계(bound)인 역확산방정식의 해를 얻을 수 있다. 스펙트럼 분석의 관점에서 식 (8)을 해석한다면 다음과 같다. 저주파수영역에서는 고유함수들의 계수가 지수적으로 증가하다가 어느 일정한 주파수(cut-off frequency)에서부터는 계수들이 β 라는 상수값을 가지는데 이 상수는 에러 측정의 관점에서 볼 때 최적화된 경계이다. 고주파수 성분들이 유계이기 때문에 고주파수 성분의 손실이 있는 반면에 해가 안정화되었다. 이것을 정규화(Regularization)라고 한다.

그러나 영상처리를 할 때 식 (8)의 경계를 상수값으로 놓아야만 하는가하는 문제를 제기할 수 있다. 이는 영상에서 저주파수 성분이 절대적으로 많은 반면 고주파수 성분은 상대적으로 적기 때문이다. 그러므로 영상복원에 영상의 특성을 고려한 역확산방정식을 설계할 필요가 있다.

III. 최적화된 감소함수를 사용한 역확산방정식을 통한 영상복원

영상복원의 경우 영상의 스펙트럼 특성을 고려하여 식 (8)을 더욱 최적화시킬 수 있다. 그러므로 다음 조건을 만족하는 새로운 알고리즘의 설계를 제안한다.

- 1) 영상이 대부분 저주파수 성분으로 이루어져 있고, 영상의 형성에 절대적인 영향을 끼치는 사실을 고려할 때, 저주파수 영역의 고유함수들의 계수들은 식 (6)에 나오는 계수들을 그대로 따르는 것이 좋다. 즉 지수적으로 증가한다.
- 2) 주파수가 증가할수록 영상의 형성에 대한 기여도가 떨어지기 때문에 고주파수에

해당하는 계수들은 λ 에 대하여 감소하여, 에러를 줄이는 것이 좋다. 이는 해를 더욱 안정화시킬 뿐만 아니라, 고주파수의 계수값을 감소시킨 만큼 더 많은 저주파수성분을 복원과정에 포함시킬 수 있으므로 더 고품질의 복원된 영상을 얻을 수 있게 된다.

위와 같은 조건을 만족하는 감소함수를 간단하게 분류할 때 세 개의 모드로 분류할 수 있다. 지수적으로 감소하는 감소함수, 비례적으로 감소하는 감소함수, 그리고 로그함수의 꼴로 감소하는 감소함수이다. 본 논문에서는 지수적으로 감소하는 감소함수가 가장 좋은 복원 결과를 산출한다는 것을 실험적으로 보였다. 수학적 전개는 다음의 두 개의 다른 형태의 지수적으로 감소하는 감소함수에 대해서 행하였다: $e^{-(T-t)\lambda}$ 의 λ 에 대한 대칭함수에 상수를 곱한 함수인 $\beta(t, \lambda) = ke^{-(T-t)\lambda}$, 그리고 $e^{-(T-t)\lambda}$ 의 λ 에 대한 대칭함수를 이동시킨 함수 $\beta(\lambda, t) = e^{-(T-t)(\lambda-\lambda_0)}$ 가 그것이다.

A. $\beta(t, \lambda) = ke^{-(T-t)\lambda}$ 를 이용한 최적화

$v(t) := R(t)\bar{v}$ 로 놓고, $\|u(t) - v(t)\|$ 를 다음과 같이 전개한다.

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &= \|u(t) - R(t)u(T) + R(t) \\ &u(T) - v(t)\| \leq \|u(t) - R(t)u(T)\| + \\ &\beta_{\text{seci}}(t, \lambda) \bar{\varepsilon} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $\beta_{\text{seci}}(t, \lambda)$ 는 지수적으로 증가하는 고유함수의 계수함수와 지수적으로 감소하는 고유함수의 계수함수가 교차하는 점이다. 식(10)에서 먼저 $\|u(t) - R(t)u(T)\|$ 를 $\beta(t, \lambda)$ 에 대한 함수로 나타낸 후, 식 (10) 전체를 최소화하는 $\beta(t, \lambda)$ 함수를 구한다. $\beta(t, \lambda)$ 중에서 미지수는 k 뿐이므로 결국에는 k 값을 구하는 것이 목표이다.

$$\begin{aligned}
& \|u(t) - R(t)u(T)\|^2 \\
&= \sum_k |\rho_k(t) - \dot{\rho}_k(t)|^2 |r_k|^2 \\
&= \sum_k \{ |\rho_k(t) - e^{\lambda_k(T-t)} |e^{-\lambda_k T}\}^2 |c_k|^2 \\
&\leq M_0 \sup\{ |\rho_k(t) - e^{\lambda_k(T-t)} |e^{-\lambda_k T}\} \quad (11)
\end{aligned}$$

이다. 식 (12)의 마지막 항은 해에 $[\sum_k |c_k|^2]^{\frac{1}{2}} = \|u(0, \cdot)\| \leq M_0$ 의 경계를 준 결과이다. 저주파수 영역에 대해서는 $\|u(t) - R(t)u(T)\|^2 = 0$ 이므로 식 (11)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
& \|u(t) - R(t)u(T)\|^2 \\
&\leq M_0 \sup\{ [e^{-\lambda_k t} - \beta(t, \lambda_k)e^{-\lambda_k T}]: \lambda_k > B \} \\
&\leq M_0 \sup\{ [e^{-\lambda t} - \beta(t, \lambda)e^{-\lambda T}]: \lambda \in \mathbb{R} \}. \quad (12)
\end{aligned}$$

여기서 B 는 지수적으로 증가하는 고유함수의 계수함수와 지수적으로 감소하는 고유함수의 감소함수가 교차하는 한계주파수를 나타낸다. 식(12)의 마지막항을 계산하기 위해, 변수 λ 를 소거시킨다. 이를 위해 먼저 $f(\lambda) = e^{-\lambda t} - \beta(t, \lambda)e^{-\lambda T}$ 라고 정의한 후 $f'(\lambda) = 0$ 이 되는 λ 를 구한다. 다음에 $e^\alpha = (2kT - kt)/t$ 이 되는 α 를 정의하면 $f'(\lambda) = 0$ 으로부터 $\lambda = \frac{\alpha}{2(T-t)}$ 임을 얻을 수 있다. 그러면 $f(\lambda)$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \left(\frac{2-2\tau}{2-\tau}\right) k^{\frac{\tau}{2\tau-2}} \left(\frac{2-\tau}{\tau}\right)^{\frac{\tau}{2\tau-2}} \\
&= \mu k^s m^s \quad (13)
\end{aligned}$$

여기서 $s = \frac{\tau}{2\tau-2}$, $\mu = \frac{2-2\tau}{2-\tau}$, $m = \frac{2-\tau}{\tau}$, $\tau = \frac{t}{T}$ 이다. 식 (14)를 식 (10)의 마지막 항에 대입시킨 후, M_0 로 나누면 다음과 같이 된다.

$$\|u(t) - v(t)\|/M_0 \leq \mu k^s m^s + \nu k^{1/2} \bar{\epsilon} \quad (14)$$

단, $\nu = \frac{\bar{\epsilon}}{M_0}$ 고 $\beta_{\text{sect}} = k e^{-(T-t)(\frac{1}{2} \log k)/(T-t)}$
 $= k^{\frac{1}{2}}$ 이 됨을 이용하였다.

$\text{minimize}_k \{ \mu k^s m^s + \nu k^{1/2} \bar{\epsilon} : k > 0 \}$ 의 문제를 풀면, 식 (14)의 오른쪽 항을 최소화하는 k 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$k = \left[-\frac{\nu}{2sm^s\mu} \right]^{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}} = \left[\frac{\nu}{2m^{s-1}} \right]^{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}}. \quad (15)$$

그러므로 최적화된 감소함수는 다음과 같이 된다.

$$\beta(t, \lambda) = \left[\frac{\nu}{2m^{s-1}} \right]^{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}} e^{-(T-t)\lambda} \quad (16)$$

식 (16)에서 볼 수 있듯이 $\beta(t, \lambda)$ 는 t 에 대한 함수일뿐만 아니라, λ 에 대한 함수이기도 하다. 이는 주파수 성분에 대하여 적용적이다. 이 함수는 영상의 주파수 특성을 고려하기 때문에 영상복원이라는 특수한 적용에 대해서 적합한 알고리즘이다. 최적화된 감소함수가 주어졌으면 에러추정치(error estimate)를 구할 수 있다. k 를 식 (17)의 오른쪽 항에 대입하면 에러 추정치 ϵ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \mu \left[\frac{\nu}{2m^{s-1}} \right]^{\frac{s}{s-\frac{1}{2}}} m^s + \nu \left[\frac{\nu}{2m^{s-1}} \right]^{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}} \\
&= \nu^\tau \left(\frac{1}{2}\right)^\tau \left(\frac{2}{2-\tau}\right) m^{\frac{\tau}{2}} \quad (17)
\end{aligned}$$

여기서 우리의 관심은 복원된 영상에 있으며

로 $\tau=0$ 에 대해서 계산하면

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\right)^\tau \left(\frac{2}{2-\tau}\right) m^{\frac{\tau}{2}} = 1 \quad (18)$$

이므로, ν 는 임의의 작은 값이 될 수 있으므로 식 (16)의 에러추정치는 $\bar{\epsilon} \rightarrow 0$ 일 때 0으로 간다. 그러므로 주어진 해는 안정적임을 볼 수 있다.

B. $\beta(\lambda, t) = e^{-(T-t)(\lambda-\lambda_0)}$ 를 이용한 최적화

이번에는 $\beta(\lambda, t) = e^{-(T-t)(\lambda-\lambda_0)}$ (그림 2)에 대하여 A절과 같은 전개를 행하면 이는 최적화된 감소함수는 다음과 같이 된다.

$$\beta(\lambda, t) = \frac{e^{(T-t)\lambda}}{e^{-(T-t)\lambda_0}} \left[\frac{1}{2} \frac{\nu}{\left(\frac{2-\tau}{\tau}\right)^{s-1} e^{-\tau}} \right]^{\frac{2}{s-1/2}} \quad (19)$$

이 함수 역시 t 와 λ 의 함수이다. 식 (19)을 사용하여 A절에서와 같은 방법으로 에러(ϵ)를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\epsilon = \nu^\tau \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau-1} \left(\frac{2-\tau}{\tau}\right)^{\frac{\tau-2}{\tau}} e^{t-T} \right] \quad (20)$$

여기서도

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau-1} \left(\frac{2-\tau}{\tau}\right)^{\frac{\tau-2}{\tau}} e^{t-T} \right] = 0 \quad (21)$$

이므로 식 (20)의 에러는 유계임을 알 수 있다. 즉, 안정적인 해가 나옴을 알 수 있다.

IV. 실험결과

첫 번째 실험은 가우시안 열화가 있는 256×256 영상에 대하여 행하였다. 그림 1는 가우시안 열화가 발생한 영상이고 그림 2는 제안한 최적화된 감소함수를 이용한 역확산방정식으로 영상을 복원한 결과이다. 표 1에는 감소함

수를 이용한 경우와 단순하게 상수로 제한한 경우의 복원된 결과간의 ISNR을 비교하였다. 그림 3-5는 128×128 의 영상에 대하여 여러개의 다른 모드의 감소함수를 영상복원에 사용했을 때의 결과를 비교하였다. 표 2에서 볼 수 있듯이 감소함수 중에서 지수적으로 감소하는 감소함수를 사용하였을 때 가장 좋은 결과가 나온다는 것을 확인할 수 있었다.

V. 결론

본 논문에서는 역확산방정식으로 영상복원하는 알고리즘을 제안하였다. 영상복원에서 역확산방정식을 쓸 때의 이점은 서론에서 언급하였다. 영상의 주파수 특성을 이용하여 한계주파수이상의 고유함수들의 계수는 에러에 대하여 최적인 감소함수가 되게 하였다. 이는 해를 안정시킬 뿐만 아니라 영상처리라는 특수한 적용에 있어서 단순히 제한시키는 것보다 더 양질의 결과영상을 산출함을 실험적으로 보였다. 앞으로 순방향과 역방향의 확산이 하나의 식안에서 이루어지는 확산방정식에 대한 연구가 이루어질 것을 제안한다.

참고문헌

- [1] J. Koenderink, "The structures of images," *Biol. Cybern.*, vol. 50, pp. 363-370, 1984.
- [2] P. Perona and Malik, "Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion," *IEEE Trans. PAMI*, vol. 12, no. 7, July 1990, pp. 629-639.
- [3] S. J. Osher and J. A. Sethian, "Fronts propagation with curvature dependent speed: ALgorithms based on Hamilton-Jacobi formulations," *J. Comput. Phys.*, vol. 79, pp. 12-49, 1988.
- [4] S. Lee, Moon Gi Kang and K. Park, "CCD noise filtering based on 3-D nonlinear partial differential equation," *IEEE Trans. on Consumer Electronics*, Vol. 44, No. 3, pp. 1086-1090, August 1998. (SCI impact factor: 0.233)
- [5] S. Lee and Moon Gi Kang, "Spatio-temporal video filtering algorithm based on 3-D anisotropic diffusion equation," *IEEE ICIP 98*, Oct. 1998.
- [6] A. Hummel, "Representation based on zero-crossings in scale-space," in *Proc. IEEE*

Computer Vision and Pattern Recognition Conf., June 1986, pp. 204-209.

[7] F. John, Continuous dependence on data for solutions with a prescribed bound, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), pp. 551-585.

[8] L.E. Payne, "Improperly posed Problems in partial differential Equations," SIAM, Philadelphia, 1975.

[9] Thomas. I. Seidman "Optimal filtering for some ill-posed problems," in Wave Propagation and Inversion (W.Fitzgibbon and M. Wheeler, eds.), SIAM (1992), pp. 108-123.

[10] Thomas. I. Seidman "Optimal filtering for the backward heat equation," SIAM J. Numer. Anal. 1994.



그림 1 열화된 영상



그림 2 제한된 알고리즘으로 복원된 영상

표 1. 제안된 알고리즘과 상수제한된 알고리즘간의 ISNR비교

영상	ISNR
열화된 영상	0.45
상수한정된 방법으로 복원	1.23
제안한 방법으로 복원	2.24

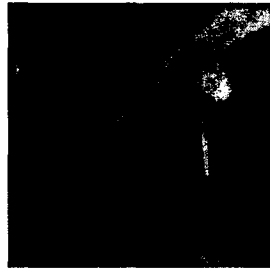


그림 3 열화된 영상



그림 4 선형적 감소함수로 복원된 영상 (ISNR = 0.82)



그림 5 로그함수꼴로 감소하는 함수로 복원된 영상 (ISNR = 0.71)

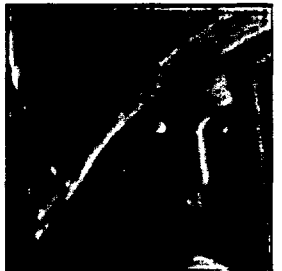


그림 6 지수적으로 감소하는 함수로 복원된 영상 (ISNR = 0.92)

표 2. 각기 다른 감소함수간의 ISNR 비교

감소함수	ISNR
로그함수꼴로 감소하는 함수 (Fig. 5)	0.71
선형적으로 감소하는 함수 (Fig. 4)	0.82
지수적으로 감소하는 함수 (Fig.. 6)	0.91