

# 역산문제를 이용한 관망에서의 누수탐지 (Leak Detection in Pipe Networks Using Inverse Problem)

이 길성\*, 조 범준\*\*

## 1. 서론

### 1.1 연구 필요성과 목적

도시화 및 산업화의 영향으로 용수수요가 나날이 증가하고 있으나 실제로 이용가능한 물은 한정되어 있어서 사용할 수 있는 물이 감소하고 있다. 이러한 물을 용수공급규정에 따라 수요자들에게 적당한 수량과 수질로 수송해야 된다. 물의 수송은 관수로에서 행해진다. 하수의 누수는 지하에서 오염문제를 일으키는 반면에 용수공급관로에서의 누수는 중요한 경제적 손실을 가져다 준다. 오염된 지하수가 과도류(하나의 정상상태에서 또 다른 정상상태로 변해가는 과도기적인 단계의 유체흐름)동안에 관로에 유입된다면 수질에 악영향을 미칠 수 있기 때문에 누수의 문제점을 고려해야 된다. 관로에서의 이러한 누수현상이 발생하는 원인으로서는 관로 자체의 결함이나 압력의 급작스런 변화, 부식활동으로 일어난 파괴 또는 관리부족 등이 있으며 문제점으로는 상수도나 하수도에서 발생하는 누수 때문에 경제적 손실, 교통혼잡, 주변구조물의 손상 등이 있다.

실제로 누수조사는 주야간 물수요량의 급작스런 변화 때문에 이례적으로 물손실이 있을 때 행해지고 누수위치를 결정하는 현장관측방법은 지면을 통과하는 레이더나 적외선 분광기, 정수역학적인 실험, Microphonics 등이다. 노후된 관망에서의 누수량과 누수위치를 발견하기 위해서는 수많은 현장관측 자료들을 필요로 한다. 그러나 이러한 방법들을 이용하면 비용이 많고, 시간도 많이 소비된다.

일반적으로 배수계통의 분석에서는 모든 수요량이 절점(Node)에서만 발생한다고 가정한다. 본 연구내용에 해당하는 누수는 앞서도 설명했듯이 여러 가지 원인으로 발생한다. 특히 파이프 균열로 인한 누수보다는 절점에서 누수가 발생한다라는 내용에 중점을 맞춰서 연구하였다. 따라서 본 연구에서도 누수가 절점에서 발생한다라는 가정을 사용하였다.

관망에서 누수위치를 찾기 위한 수학적 알고리즘은 해석문제(Forward Problem)와 누수발견에

---

\* 서울대학교 공과대학 지구환경시스템공학부 교수

\*\* 서울대학교 대학원 지구환경시스템공학부 석사과정

적용되는 역산문제(Inverse Problem)라는 두 방법으로 이루어져 있다. 본 연구에서는 이러한 두 가지 절차를 따라 배수계통에서 압력과 유량 자료를 이용하여 역산문제를 풀어봄으로써 누수량과 누수위치를 발견하는 것이다.

## 1.2 연구 내용 및 범위

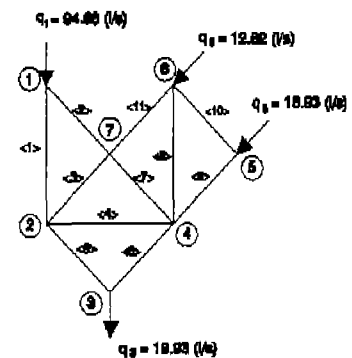
해석문제는 수요량과 시스템의 특징(예를 들면 파이프 마찰)을 알고 연속방정식과 에너지방정식을 이용함으로써 관망의 절점에서 압력을 구하고 파이프를 통해 물이 어떻게 나누어지는가를 알려고 하는 것이다.

역산문제에는 완전연립 문제(Even-determined Problem), 중복연립 문제(Over-determined Problem), 불완전연립 문제(Under-determined Problem)의 3가지 형태가 있다. 해석문제에서 구한 압력과 유량값을 이용하여 역산문제에 적용시켜 풀어줌으로써 관망의 매개변수(누수량과 누수위치)들을 결정하는 것이다. 누수량은 중복연립 문제를 통해서 알 수 있고, 누수위치는 불완전연립 문제를 통해서 알 수 있다.

적용대상은 가상 시나리오의 간단한 관망이다. 이 경우는 3개의 누수면적 시나리오가 주어지고 누수로 인하여 각 절점에서의 유출입량도 정해져 있다. 역산방법에 사용되는 알고리즘(중복연립 문제 : Levenberg-Marquardt 알고리즘 ; 불완전연립 문제 : Singular Value Decomposition)을 적용함으로써 누수면적값을 구하고 여기에서 구한 누수면적값을 누수면적 시나리오 값과 비교하여 이러한 알고리즘의 정확성을 입증하겠다.

## 2. 본론

문제설명 : 그림과 같이 11개의 파이프와 7개의 절점으로 이루어진 가상 시나리오의 관망이 있다. 절점①(저수지 수위)은 수두가 30.48 m로 일정하며 유입량은 누수가 생김에 따라 변한다. 절점③은 유출량 절점이고 수두에 따라 유출량이 변한다. 절점⑤와 절점⑥에서의 유입량은 일정하다. 즉, 누수가 발생하더라도 유입량은 변하지 않는다. 누수가 없을 때 절점에서의 유량들이 그림에 나타나 있다. Hazen-Williams 계수  $W$ 는 모두 120이다. 이 문제는 절점②, ④, ⑦에서만 누수가 일어난다고 정해져 있고 이러한 누수가 일어날 수 있는 갯수에 따라 3개의 시나리오 구성되어 있다.



Pipe Numbers : < >  
Node Numbers : Circles  
Fig.1. Small Network (Pudar, and Liggett, 1992)

해석문제로 누수가 없는 상태에서 절점에서의 수두와 파이프에서의 유량을 구했으며 수두와 유량값은 EPANET Package(Rossman, 1992)를 실행시켜서 구했다. EPANET Package는 1994년 미

국 환경부 안전공학 연구소에 근무하고 있는 Rossman이 개발한 프로그램이고 부정류현상과 수질 상태를 모의할 수 있다. 표 2.1은 파이프직경, 길이, 파이프에서의 유량을 나타낸 것이다. 각 절점에서의 수두값은 누수가 생겼을 때 수두값과 비교하려고 뒷 부분 표 2.3에 두었다.

표 2.1 파이프 직경, 파이프 길이, 파이프에서의 유량

파이프번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
직경( m )	0.25	0.25	0.20	0.20	0.25	0.25	0.25	0.25	0.20	0.15	0.15
파이프길이( m)	305	215	215	305	215	215	215	305	215	215	215
유량( L/s)	46.97	47.66	15.73	0.38	63.08	63.10	28.28	19.71	15.48	3.45	3.65

누수량을 파악하는데 필요한 압력의 관측점을 선정해야 되는데 이 과정에서 민감도 행렬 (Sensitivity Matrix)이 필요하기 때문에 Hazen-Williams 계수변화로 인한 민감도 분석을 하였다. 1번 파이프 경우만 민감도 행렬 계산을 설명하겠다. 1번 파이프 경우 1번 파이프만 Hazen-Williams 계수를 130으로 대입하고 나머지 모든 파이프는 Hazen-Williams 계수를 120으로 대입하여 해석 문제를 풀어서 수두값을 구한다. 이와 같은 방식으로 파이프 갯수만큼 해석문제를 풀어준다. 민감도 분석을 계산한 식은 다음과 같다. 표 2.2는 민감도 분석을 한 결과이다.

$$\text{Sensitivity Matrix} = \left( \frac{\delta h}{\delta W} \right)^2 \times 10^5 \quad (1)$$

$\delta h$ 는 초기상태(Hazen-Williams 계수를 변화시키지 않는 상태)일 때 수두값에서 Hazen-Williams 계수 변화로 인한 수두값을 뺀 값이고  $\delta W$ 는 Hazen-Williams 계수 변화량 즉, 10이다.

표 2.2 Sensitivity Matrix

Node number	Pipe number										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	8.1	4.9	0.0	0.0	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
3	10.0	6.4	0.1	0.0	16.9	14.4	0.4	0.1	0.1	0.0	0.1
4	8.1	4.9	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
5	10.0	6.4	0.1	0.0	0.1	0.0	0.4	0.0	0.9	0.0	0.1
6	8.1	6.4	0.1	0.0	0.1	0.0	0.1	0.4	0.1	0.0	0.1
7	4.9	8.1	0.1	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.1

절점에서 누수면적(시나리오값)을 알았을 때 수두값이 어떻게 변하는가를 알아보았다. 중복연립 방법을 이용하여 누수면적을 구해서 가상 시나리오의 처음 누수면적과 비교분석함으로써 중복

연립 방법의 정확성을 검증하였다.

누수면적 시나리오 값을 알았을 때 미지수의 갯수가 총 6개이고 방정식의 갯수가 6개인 완전 연립 문제에 해당된다. 위에서 설명한 3개의 시나리오는 누수가 절점②에서만 있을 때, 누수가 절점②와 절점④에서 일어날 때, 누수가 일어날 수 있는 모든 절점②, ④, ⑦에서 누수가 발생할 때로 구성되며 문제가 가상 시나리오라는 것을 생각해야 된다. 가상 시나리오이기 때문에 누수가 생겼을 때 각 절점에서의 유출입량은 정해져 있다. 누수가 일어났을 때 각 절점에서의 수두값은 표 2.3에 나타나 있다.

표 2.3 누수가 없을 때와 3개의 누수 시나리오에 따라 EPANET를 실행시킨 수두값( 단위: m)

수두형태	절점①	절점②	절점③	절점④	절점⑤	절점⑥	절점⑦
누수가 없을 때	30.48	29.11	27.43	29.11	29.47	29.38	29.49
누수가 하나일 때	30.48	27.34	25.91	27.67	28.07	28.01	28.34
누수가 두 개일 때	30.48	25.53	23.94	25.34	25.81	25.79	26.72
누수가 세 개일 때	30.48	25.47	23.87	25.26	25.73	25.71	26.62

중복연립 문제를 해결하는데 있어서 지배방정식은 연속방정식과 에너지방정식을 결합한 형태의 다음과 같은 비선형 연립방정식이다.

$$\sum_{j=1}^{n_i} \text{sgn}(h_i - h_j) \left| \frac{h_i - h_j}{K_{K_i}} \right|^{1/n} = D_i^c + C_{oi}^d A_i^d \sqrt{2gh_i} + C_{oi}^l A_i^l \sqrt{2gh_i} \quad \forall i \quad (2)$$

이 식에서  $n_i$ 는 절점  $i$ 에서 서로 만나는 파이프의 총갯수이다.  $j$ 는 파이프 번호이고  $i$ 에 인접한 절점이다.  $h$ 는 위압수두(Piezometric Head)이고  $\text{sgn}(h_i - h_j)$ 는 절점  $i$ 와  $j$ 의 수두차의 부호를 나타낸다.  $D_i^c$ 는 압력과 관계없는 일정한 수요량이고  $D_i^d$ 는 압력에 의존한 수요량이다.

절점①에서 수두가 일정하기 때문에 비선형 연립방정식의 갯수는 총 6개이고 구하려는 미지수는 3개  $A_2^l$ ,  $A_4^l$ ,  $A_7^l$ 이다. 완전연립 문제를 통해서 구한 수두값을 각각 3개의 시나리오 즉, 누수 절점이 하나일 때, 누수절점이 두 개일 때, 누수절점이 세 개일 때 에 맞게끔 비선형 연립방정식에 대입하여 누수면적을 구했다.

본 연구에서는 이러한 중복연립 문제형태인 이 식을 Levenberg-Marquardt 알고리즘을 이용하였다. 이 알고리즘은 IMSL Library 서브루틴(Numerics, Inc., 1997)을 참조하였다. 표 2.4는 3개의 누수 시나리오에 따른 각 절점에서의 유출입량과 누수면적을 구한 것이다.

다음 단계로 프로그램에서 3개의 시나리오 중에서 세 번째 해당하는 누수 시나리오에 따른 입력자료의 초기값과 실행된 결과값에 대해서 설명하겠다. 시나리오의 세 번째에 해당하는 누수가 일어날 수 있는 모든 절점②, ④, ⑦에서 발생할 때 누수면적의 초기값을  $A_2^l = 2.14$ ,  $A_4^l = 1.57$ ,

$A_7^i = 1.68$ 로 가정하여 입력시킨 결과 반복횟수는 3이고 실행된 누수면적값은  $A_2^i = 0.00233$ ,  $A_4^i = 0.00234$ ,  $A_7^i = 0.00010$ 이다. 누수면적의 초기값을 다르게  $A_2^i = 0$ ,  $A_4^i = 0$ ,  $A_7^i = 0$ 로 가정하여 입력시킨 결과 반복횟수는 2이고 실행된 누수면적값은 이전의 초기값을 실행시킨 누수면적의 결과값과 똑같이  $A_2^i = 0.00233$ ,  $A_4^i = 0.00234$ ,  $A_7^i = 0.00010$ 로 나온다. 절점⑦에서의 누수면적값이 다른 절점에서의 누수면적값보다 작긴 하지만 누수가 발생한다라고 볼 수 있고 절점②와 절점④에서 누수가 일어난다라는 결론을 내릴 수 있다. 시나리오의 누수면적값도 절점②, ④, ⑦ 각각 0.00232, 0.00232, 0.0001로 프로그램을 실행한 결과값과 거의 같다는 사실을 알았다. 표 2.5는 이러한 내용을 요약정리하였다.

표 2.4 3개의 누수 시나리오 따른 절점에서의 유출입량과 누수면적

node	1	2	3	4	5	6	7
(a) 누수가 없을 때 ( 유입량 : + , 유출량 : - )							
Inflow( L/s)	94.64	0	-126.18	0	18.93	12.62	0
(b) 시나리오 1 : 절점②에서 발생하는 하나의 누수							
Inflow( L/s)	145.46	-54.07	-122.93	0	18.93	12.62	0
Leak area( m <sup>2</sup> )		0.00234		0			0
(c) 시나리오 2 : 절점②, ④에서 발생하는 두 개의 누수							
Inflow( L/s)	191.68	-52.41	-118.61	-52.22	18.93	12.62	0
Leak area( m <sup>2</sup> )		0.00236		0.00233			0
(d) 시나리오 3 : 절점②, ④, ⑦에서 발생하는 세 개의 누수							
Inflow( L/s)	193.61	-52.35	-118.61	-52.03	18.93	12.62	-2.30
Leak area( m <sup>2</sup> )		0.00233		0.00234			0.0001

표 2.5 누수 시나리오에 따른 프로그램의 입력자료 초기값, 결과값, 반복횟수

	누수가 없을 때			누수가 세 개일 때(②, ④, ⑦)		
	$A_2^i$	$A_4^i$	$A_7^i$	$A_2^i$	$A_4^i$	$A_7^i$
누수면적초기값	2.14	1.57	1.68	2.14	1.57	1.68
실행시킨결과값	-0.00003	-0.00001	-0.00001	0.00233	0.00234	0.0001
반복횟수	3	3	3	3	3	3
누수면적초기값	0	0	0	0	0	0
실행시킨결과값	-0.00003	-0.00001	-0.00001	0.00233	0.00234	0.0001
반복횟수	1	1	1	2	2	2

불완전연립 문제 대한 해는 Press 등이 적용한 Singular Value Decomposition(Press et al, 1986)을 사용하여 구한다. 불완전연립 문제는 중복연립 문제에 해당하는 비선형 연립방정식을 만족하는 동시에 누수면적벡터를 최소화하는 것이다. 라그랑지 승수(Lagrange Multipliers)와 더불어 최소화 되는 함수를 나타내면 다음과 같다.

$$F = \sum_{i=1}^I (A_i^l)^2 + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left( \sum_{m=1}^{n_i} \text{sgn}(h_i - h_m) \left| \frac{h_i - h_m}{K_{\kappa_i}} \right|^{1/n} - D_i^c - D_i^d - q_i^l \right) \quad (3)$$

이 식에서  $\lambda_i$ 는 라그랑지 승수이다. (3)식을 누수면적  $A_i^l$ 에 관하여 미분하고 그 결과를 0으로 놓은 것이  $J'$  방정식이다. 이  $J'$  방정식도 비선형 연립방정식이고 반복과정(Iterative Process) 등 여러 가지 방법으로 풀어질 수 있다. 본 연구에서는 이러한 불완전연립문제를 Singular Value Decomposition을 이용하여 해결함으로써 이러한 알고리즘이 정확하다는 것을 보여 주려고 한다.

### 3. 결론 및 향후연구과제

중복연립 문제에서 Levenberg-Marquardt 알고리즘을 이용하여 누수면적을 구하였는데 처음 주어진 누수면적 시나리오값과 비교하여 거의 같다는 사실을 알았다. 또한 누수면적 시나리오에 따른 Levenberg-Marquardt 알고리즘이 정확한 알고리즘임을 확인할 수 있었다.

이러한 알고리즘을 이용하여 실제 관망에서 누수면적을 구할 수 있을 것으로 생각된다. 또한 연구내용 중에서 수록된 누수위치는 연구 중이다. 누수위치는 실질적으로 관측을 통해서만 정확히 알 수 있다. 불완전연립 문제를 풀어봄으로써 누수위치를 확실하게 알 수는 없지만 어느 정도까지는 누수가 일어날 수 있는 위치를 파악할 수 있고 이러한 누수위치에 대한 자료를 토대로 현장관측횟수를 줄일 수 있는 이점 때문에 불완전연립 문제 개념이 도입된 것이다.

### 4. 참고문헌

- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1986). *Numerical recipes in fortran*. Cambridge University Press, pp. 51-63, pp. 675-683.
- Pudar, R. S., and Liggett, J. A. (1992). "Leaks in pipe networks." *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, Vol. 118, pp. 1031-1046.
- Rossman, L. A. (1994). *Verson 1.1 : EPANET Users Manual*. U.S. Environmental Protection Agency.
- Visual Numerics, Inc. (1997). *Version 3.0 : IMSL FORTRAN 90 MP Library Users Manual*.