DCOC를 이용한 RC 프레임의 최소경비설계

Minimum Cost Design of Reinforced Concrete Frames Using DCOC

한상훈* 구봉근* 조홍동** 오현수***

Han, Sang Hoon Koo, Bong Kuen Cho, Hong Dong Oh, Hyun Soo

ABSTRACT

This paper describes the application of discretized continuum-type optimality criteria (DCOC) for minimum-cost design of the reinforced concrete frame structures consisting of beams and columns. The cost of construction as objective function which includes the costs of concrete, reinforced steel and formwork is minimized. The design constraints include limits on the maximum deflection at a prescribed node, bending and shear strengths in beams, uniaxial bending strength of columns according to design codes(CEB/FIP,1990). In the first stage, only beams with uniform cross-sectional parameters per span are considered. But the steel ratio is allowed to vary freely. The cross-sectional parameters and steel ratio in each column are assumed to be uniform for practical reasons.

Optimality criteria is given based on the well known Kuhn-Tucker necessary conditions, followed by an iterative procedure for designs when the design variables are the depth and the steel ratio. The versatility of the DCOC technique has been demonstrated by considering numerical examples which have one-bay four-storey frame.

1. 서론

본 연구에서는 설계변수와 제약조건의 수가 많은 거대 구조물이나 이산성의 공학구조물의 경우에 큰 장점을 갖는 해석적 구조최적화방법에 해당하는 이산성 연속형 최적성 규준(Discretized Continuum-type Optimality Criteria, 이하 DCOC로 표기) 방법을 도입하여 RC 프레임의 최소경비 설계를 위한 최적화 알고리즘을 도출하였다. 또한, 도출된 알고리즘에 의한 최적화 과정 중에 강성도법에 의한 구조해석과 Kuhn-Tucker 최적성 조건을 적용하였고, 보다 실제적인 실무 설계에 있어서 최적설계가 예비설계 단계에서 사용될 수 있도록 하기 위하여, RC프레임의 최소경비문제에 관한 수치예를 들어 DCOC방법을 근거로 한 최적화를 수행하였다.

보의 단면 매개변수는 시공성과 경제적인 면을 고려하여 같은 층에서는 보의 유효높이와 폭이 일

* 정회원, 충북대학교 공과대학 토목공학과 교수

** 충북대학교 공과대학 토목공학과 박사과정수료

*** 충북대학교 공과대학 토목공학과 석사과정

정하게 유지되도록 하였으나 철근비는 요소별로 변화하도록 하였다. 또한, 각각의 기둥에 대한 단면 매개변수와 철근비는 시공형편상 일정하다고 가정하였으며, 철근은 대칭으로 배근하였다

설계는 한계상태설계법(CEB/FIP)에 따라 기둥은 일축휨강도 그리고 보는 휨과 전단강도, 그리고 지정된 절점에서의 최대처짐을 제약조건으로 하였다.

2. RC 프레임의 문제정식화와 최적성 규준

2.1 목적함수

N_b개의 보와 N_c개의 기둥으로 구성된 RC평면 프레임의 경우, 각각의 보는 휨모멘트의 변화에 따라 N_e개의 요소로 더 나누어지고, 각각의 기둥은 단부모멘트와 축하중에 의하여 설계되며 균일단면으로 처리된다. 보는 폭 x_{1b}, 유효깊이 x_2^m, 그리고 철근비 x_3^{em} ($e=1,\ldots,N_e; m=1,\ldots,N_b$)를 갖는 직사각형단면이라 가정한다.

RC프레임의 목적함수는 각각 보와 기둥에 대한 콘크리트 비용, 철근 비용, 그리고 거푸집 비용을 포함하는 총건설비용으로 식(1)과 같이 나타낼 수 있다

$$\phi = \sum_{m=1}^{N_b}\sum_{e=1}^{N_e}\psi_b^{em}(x_2^m, x_3^{em}) + \sum_{c=1}^{N_c}\psi_c^c(x_2^c, x_3^c) \tag{1}$$

2.1.1 처짐제약

휨과 압축을 받는 철근콘크리트 프레임은 지정된 절점에서의 최대처짐이 허용처짐보다 작아야 하며, 이때의 지정된 절점에서의 처짐을 나타내면 식(3)과 같다.

$$u_m - \triangle_{al} \le 0 \tag{2}$$

$$u_m = \sum_{m=1}^{N_b}\sum_{e=1}^{N_e}\left(\frac{Q_1^{em}}{A^mE} + \frac{Q_2^{em}}{EI^m}\right) + \sum_{c=1}^{N_c}\left(\frac{Q_1^c}{A^cE} + \frac{Q_2^c}{EI^c}\right) \tag{3}$$

여기서,

$$Q_1^i = H_A^i\overline{H}_A^iL^i - \frac{1}{2}w_y^i(L^i)\overline{H}_A^i$$

$$Q_2^i = \frac{M_A^iL^i}{2}(2\overline{M}_A^i - \overline{V}_A^iL^i) + \frac{V_A^i(L^i)^2}{6}(2\overline{V}_A^iL^i - 3\overline{M}_A^i) + \frac{w_x^i(L^i)^3}{24}(4\overline{M}_A^i - 3\overline{V}_A^iL^i)$$

2.1.2 강도제약

CEB-FIP의 한계상태설계법(LSD)에 기초한 축방향 압축과 휨을 동시에 받는 기둥의 설계강도는 최대압축력보다 작아야 하며, 다음식과 같다.

$$g_3^c = \frac{|P_{\max}^c|}{P_d} - 1.0 \le 0 \tag{4}$$

여기서, P_d : 축방향 설계강도

$P^c_{\max}$: 설계하중으로 인해 기둥에 발생하는 최대 압축력

2.2 최적성 규준

2.2.1 증대 라그랑지 함수

한계제약조건과 지금까지 정의된 제약조건식들을 포함하는 RC 프레임의 최소비용설계문제는 증대 라그랑지 함수를 이용하여 수학적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize } \overline{\Phi} = \;& \phi(z) + \mu\left[\{\overline{\mathrm{F}}_f\}^{\mathrm{T}}[\mathrm{f}]\{\mathrm{F}_f\} + \{\overline{\mathrm{F}}_f\}^{\mathrm{T}}\{\hat{\mathrm{u}}_f\} - \Delta_{\mathrm{al}} + \eta\right] \\
& + \sum_{m=1}^{N_b}\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{j=1}^{J_b}\lambda_j^{em}\left[\left\{\overline{\overline{\mathrm{R}}}_j^{\mathrm{em}}\right\}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{F}_f\} + \{\hat{\mathrm{R}}_j^{\mathrm{em}}\}^{\mathrm{T}}\{\overline{\mathrm{F}}_j^{\mathrm{em}}\} - 1.0 + w_j^{em}\right] \\
& + \sum_{c=1}^{N_c}\lambda_3^c\left[\left\{\overline{\overline{\mathrm{R}}}_3^{\mathrm{c}}\right\}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{F}_f\} - 1.0 + w_3^c\right] \\
& + \{\alpha^r\}^T\left[\{\mathrm{P}\} - [\mathrm{B}]\{\mathrm{F}_f\}\right] + \{\alpha^v\}^T\left[\{\overline{\mathrm{P}}^{\mathrm{v}}\} - [\mathrm{B}]\{\overline{\mathrm{F}}_f\}\right] \\
& + \sum_{m=1}^{N_b}\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{i=2}^{3}\left[\beta_i^{em}\left(-x_i^{em} + x_{ilb} + s_{ib}^{em}\right) + \gamma_i^{em}\left(x_i^{em} - x_{iub} + \bar{s}_i^{em}\right)\right] \\
& + \sum_{c=1}^{N_c}\sum_{i=2}^{3}\left[\beta_i^c\left(-x_i^c + x_{ilc} + s_i^c\right) + \gamma_i^c\left(x_i^c - x_{iuc} + \bar{s}_i^c\right)\right]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

여기서, μ, λ_j^{em}, λ_3^c, α^r, α^v, β_i^{em}, β_i^c, γ_i^{em}, γ_i^c는 라그랑지 승수들이다.

2.2.2 수학적 유도

정류해를 위한 필요조건인 Kuhn-Tucker조건을 증대 라그랑지함수 $\overline{\Phi}$에 적용하여 수학적으로 유도하면 다음과 같다.

1) 보의 유효깊이 z_2^m 에 의한 변분

$$
\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{N_e}\left\{\left[x_3^{em}c_{2b} + c_{1b}\right]L^{em} - \mu\left(\frac{Q_1^{em}}{s_{1b}\left(x_2^m\right)^2} + \frac{3Q_2^{em}}{s_{2b}\left(x_2^m\right)^4}\right)\right\} \\
& + \sum_{e=1}^{N_e}\lambda_1^{em}\left[-\frac{2}{x_2^m}\left\{\mathbf{R}_1^{em}\right\}^T\left\{\mathbf{F}_A^{em}\right\} - \frac{2}{x_2^m}\left\{\hat{\mathbf{R}}_1^{em}\right\}^T\left\{\hat{\mathbf{F}}_1^{em}\right\}\right] \\
& + \sum_{e=1}^{N_e}\left\{\lambda_2^{em}\left[-\frac{1}{x_2^m}\left\{\mathbf{R}_2^{em}\right\}^T\left\{\mathbf{F}_A^{em}\right\} - \frac{1}{x_2^m}\left\{\hat{\mathbf{R}}_2^{em}\right\}^T\left\{\hat{\mathbf{F}}_2^{em}\right\}\right]\right\} \\
& - \left(\beta_2^{em} - \gamma_2^{em}\right) + \{\alpha^r\}^T\left\{\frac{\partial\,\mathrm{P}}{\partial x_2^m}\right\} = 0; \quad m = 1,\ \ldots,\ N_b
\end{aligned}
\tag{6}
$$

2) 기둥의 유효깊이 z_2^c에 의한 변분

$$(x_3^c c_{2c} + c_{1c})L^c - \mu\left(\frac{Q_1^c}{s_{1c}(x_2^c)^2} + \frac{3Q_2^c}{s_{2c}(x_2^c)^4}\right) + \lambda_3^c\left[-\frac{1}{P_n}\frac{\partial P_n}{\partial x_2^c}\{\mathbf{R}_3^c\}^T\{\mathbf{F}_A^c\}\right] + \{\alpha^r\}^T\left\{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_2^c}\right\} - (\beta_2^c - \lambda_2^c) = 0; \quad c = 1, \ldots, N_c \tag{7}$$

3) 보의 철근비 x_3^{em}에 의한 변분

$$\left\{(x_2^m c_{2b} L^{em}) + \lambda_1^{em}\left[-\frac{(y_1 - 2y_2 x_3^{em})}{x_3^{em}(y_1 - y_2 x_3^{em})}\{\mathbf{R}_1^{em}\}^T\{\mathbf{F}_A^{em}\} - \frac{(y_1 - 2y_2 x_3^{em})}{x_3^{em}(y_1 - y_2 x_3^{em})}\{\widehat{\mathbf{R}}_1^{em}\}^T\{\widehat{\mathbf{F}}_1^e\}\right]\right\} - (\beta_3^{em} - \gamma_3^{em}) = 0; \tag{8}$$

$e = 1, \ldots, N_e;\ m = 1, \ldots, N_b$

4) 기둥의 철근비 x_3^c에 의한 변분

$$c_{2c}L^c(x_2^c + d_c') + \lambda_3^c\left[-\frac{1}{P_n}\frac{\partial P_n}{\partial x_3^c}\{\mathbf{R}_3^c\}^T\{\mathbf{F}_A^c\}\right] - (\beta_3^c - \gamma_3^c) = 0 \tag{9}$$

3. 반복 알고리즘

DCOC 방법을 이용한 RC프레임의 최소경비 설계문제를 해결하기 위한 갱신 과정은 다음과 같다.

3.1 설계변수의 갱신

RC프레임의 보와 기둥에 대한 설계변수인 유효깊이와 철근비의 분포를 제어하는 활성거동제약들의 가능한 조합은 다음과 같다.

A. 보

A1. 처짐 제약조건과 휨강도 제약조건에 제어되는 요소

A2. 처짐 제약조건과 철근비 x_3^{em}의 하한치에 지배되는 요소

A3. 전단강도제약와 휨강도 제약에 의해 제어되는 요소

A4. 전단강도와 철근비 x_3^{em}의 하한치에 지배되는 요소

A5 휨강도 제약조건과 철근비 x_3^{em}의 상한치에 지배되는 요소

A6. 휨강도 제약조건만에 의해 지배되는 요소

A7. 휨강도 제약조건과 철근비의 하한치에 지배되는 요소

A8. 유효깊이 하한과 휨강도제약에 의해 지배되는 요소

A9. 유효깊이의 하한과 철근비 하한에 의해 지배되는 요소

B. 기둥

처짐제약조건은 항상 활성제약 ($\mu > 0$)이므로, 기둥의 설계는 축하중제약조건이 처짐제약조건과 조합되어 설계를 지배하는 경우에 대해서 주로 고려된다.

B1. 처짐 제약과 단축 휨강도 제약조건에 지배되는 기둥

B2. 처짐 제약조건과 철근비 x_3^c의 하한치에 지배되는 기둥

B3. 단축 휨강도 제약조건과 철근비 x_3^c의 상한치에 지배되는 기둥

B4. 단축 휨강도 제약조건과 유효깊이 x_2^c의 하한치에 지배되는 기둥

B5. 유효깊이 x_2^c와 철근비 x_3^c가 모두 하한치에 지배되는 기둥

설계에 이용되는 보 또는 기둥의 유효깊이 x_2^m는 각 Case로부터 계산된 후보유효깊이 중 가장 큰 값을 선택한다.

3.2 라그랑지승수의 갱신과 수반하중벡터의 계산

기변형 효과에 의한 고정단력을 계산하기 위해서는 강도제약에 의해 제어되는 요소에 대한 적절한 라그랑지 승수의 표현이 필요하다. 그러므로 각 라그랑지 승수는 3.1의 설계변수 갱신과정에서 선택된 제어 영역에 의해 적절한 값으로 갱신된다. 또한 갱신된 라그랑지 승수에 의해 다음 반복과정의 수반 시스템해석에 필요한 수반하중벡터가 계산된다.

4. 수치예제

DCOC알고리즘의 적용성 및 효율성을 보이기위해 1경간 4층 RC프레임에 대하여 경비 최소화 문제를 수행하였다. 여기에서 사용된 재료의 데이터와 설계 상수들은 다음과 같다:

표 1. Material properties and cost data

재료 특성치		실제경비*	상대경비**
콘크리트	철 근		
$f_c = 25$ MPa, $E_c = 26,000$ MPa. $w_c = 24.5$ kN/m^3	$f_y = 400$ MPa, $E_s = 200,000$ MPa	$c_c = 43,610$ 원/m^3 $c_f = 8,200$ 원/m^2 $c_s = 2,128,244$ 원/m	$c_{cc} = 1$ $c_{fc} = 0.19$ $c_{sc} = 48.80$

*콘크리트를 기준으로 한 철근과 거푸집의 상대경비

각층의 보의 중간에서의 최대 처짐은 11mm로 제한되고, 제하 하중은 그림 1.과 같으며 자중은 선택된 단면에 의해 별도로 고려된다. 설계변수와 경비의 상대경비가 상대오차 10^{-5} 이내에 수렴하고 제어 영역에 변화가 없을 때 까지 반복하였다. 수행결과 반복횟수 3~4회 만에 경비가 거의 일정한 값에 수렴하였으며, Pentium 120MHz의 일반 PC에서 1.69초만에 최적해에 도달하였다.

5 결론

본 연구에서는 RC프레임의 최소 경비 설계를 위해 DCOC 기법을 적용하였다. 일반적으로 복잡한 구조물이나 거대구조물의 경우에 설계변수와 제약조건의 수가 상당히 증가하게 되면 수치적 구조 최적화 방법은 능력에 제한을 받게 되지만, 본 논문에서 제시한 이산성 연속형 최적성 규준방법(DCOC)에 의한 최적설계는 설계변수와 제약조건의 수에 거의 영향을 받지 않을 뿐만 아니라 국부해로 빠질 염려가 거의 없다. 또한 요소수의 증가에 따른 설계변수의 수와 제약조건의 수가 상당히 증가함에도 불구하고 고차의 비선형 최적화 문제의 최적해에 빠르게 수렴하였으며, 최적해는 초기치의 변화에 영향을 받지 않고 거의 동일한 값으로 수렴하였다. 그러므로 DCOC방법에 의한 알고리즘은 실제 설계실무에서 철근 콘크리트 프레임의 예비설계로 이용하기에 매우 적합하다고 판단된다.

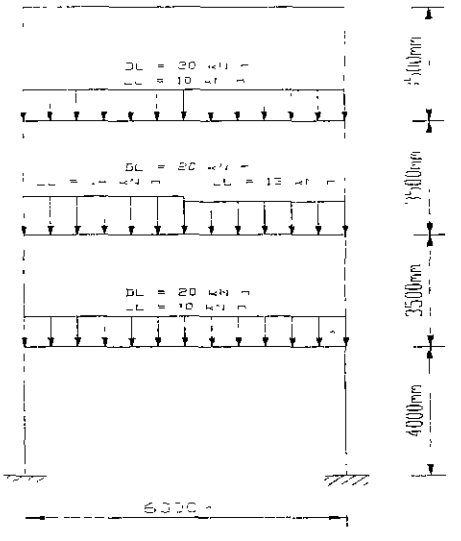

그림 1. 1경간 4층 프레임

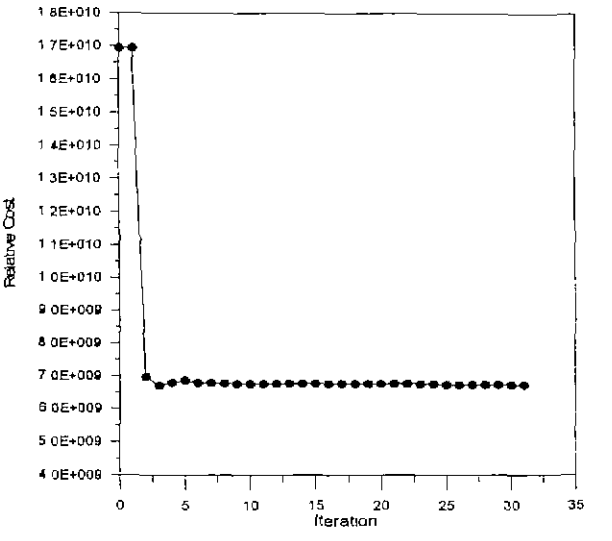

그림 2. 경비 수렴 곡선

참 고 문 헌

1. Rozvany, G.I.N., and Zhou, M., "Continuum-based Optimality Criteria(COC) Methods : An Introduction" Structural Optimization 1, pp. 1~26, 1993.

2. Zhou, M., and Rozvany, G.I.N., "DCOC : An Optimality Criteria Method for Large System Part I : Theory" Structural Optimization 5, pp. 12~25, 1992

3. Zhou, M., and Rozvany, G.I.N., "DCOC : An Optimality Criteria Method for Large System Part II : Algorithms" Structural Optimization 6, pp. 250~262, 1993.

4. 변동균, 신현묵, 문재길, "철근 콘크리트" 동명사, 1999.

5. 한국콘크리트학회 · 대한건축학회, "콘크리트구조설계기준" 건설교통부, 1999.

6. William Weaver, Jr. and James M. Gere., "Matrix Analysis of Framed Structures" Champman & Hall, 1990.