m과 n이 짝수인 이중 루프 네트워크 $G(mn;1,m)$의 고장 해밀톤 성질*

박 정흠○, 김 희철†

○가톨릭대학교 컴퓨터공학부 (jhpark@tcs.cuk.ac.kr)
†한국외국어대학교 컴퓨터공학과 (hckim@maincc.hufs.ac.kr)

Fault Hamiltonicity of Double Loop Network $G(mn;1,m)$ with Even m and n

Jung-Heum Park○ and Hee-Chul Kim†

○School of Computer Science and Engineering, The Catholic University of Korea
†Department of Computer Science and Engineering, Hankuk University of Foreign Studies

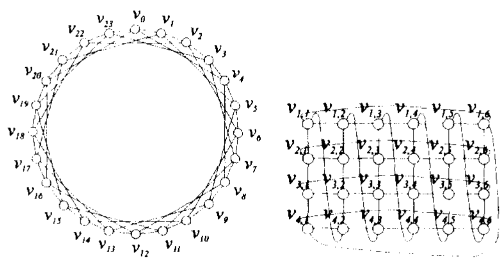
요약

이 논문은 에지와 정점에 고장이 있는 이중 루프 네트워크의 해밀톤 성질을 고려한다. 이중 루프 네트워크 $G(mn;1,m)$은 $m \times n$ 그리드 그래프에 에지를 추가한 4-정규 그래프이다. m과 n이 모두 짝수인 이중 루프 네트워크 $G(mn;1,m)$은 고장난 요소(에지와 정점)의 수가 1 이하인 경우에 해밀톤 연결되어 있고, 고장난 요소의 수가 2 이하인 경우에 항상 해밀톤 사이클을 가짐을 보인다.

1 서론

고성능 컴퓨터를 설계하기 위해서 다중 컴퓨터 네트워크를 구성하는 것은 비용이 적게 드는 방식이다 [4]. 다중 컴퓨터 네트워크는 개별 기억장치를 가지는 노드와 노드를 서로 이어주는 통신 링크로 이루어져 있다. 다중 컴퓨터 네트워크에서 연결망 구조는 전체 시스템의 성능에 크게 영향을 미치는 것으로 알려져 있다. 연결망 구조는 그래프로 자연스럽게 모델할 수 있는데, 이 때 노드는 그래프의 정점에 대응되고 통신 링크는 에지에 대응된다.

이중 루프 네트워크(double loop network)는 링 네트워크와 비교할 때 에지수를 늘임으로써 연결도를 높이고 지름을 낮춘 것이라고 볼 수 있다. 이중 루프 네트워크 $G(N;a_1,a_2)$는 N개의 노드 $\{v_0,v_1,\cdots,v_{N-1}\}$을 가지고 $s+a_i \equiv t \pmod N$을 만족하는 정수 i, $1 \le i \le 2$가 존재하면 두 노드 v_s, v_t를 잇는 에지가 있다. 다시 말하면, $G(N;a_1,a_2)$는 정점의 수가 N이고 점프가 a_1, a_2인 circulant 그래프 $C_N(a_1,a_2)$라고 정의할 수 있다. 이중 루프 네트워크 $G(24;1,4)$의 예가 그림 1에 있다. 그림 1 (b)에 있는 그래프는 (a)에 있는 그래프와 동형이다.



(a) (b)

그림 1: 이중 루프 네트워크 $G(24;1,4)$

이 논문에서는 $a_1 = 1$, a_2는 짝수, 그리고 N이 a_2의 짝수 배인 이중 루프 네트워크, 즉 m과 n이 짝수인 $G(mn;1,m)$을 고려하기로 한다. 그리고 $n=2$이면 분지수가 3이 되므로, $n \ge 4$ 라고 가정한다. 이중 루프 네트워

*이 논문은 한국과학재단 특정기초연구(98-0102-07-01-3)의 연구비를 지원받았음.

크 $G(mn;1,m)$은 $m \times n$ 그리드 그래프와 동형인 스패닝 부그래프를 가진다. 다시 말하면, $G(mn;1,m)$은 $m \times n$ 그리드 그래프에 랩어라운드(wraparound) 에지를 추가하여 만든 4-정규 그래프이다. 앞으로 $G(mn;1,m)$을 $m \times n$ DLN (Double Loop Network)이라고 말하기로 한다.

해밀톤 문제는 그래프 이론 분야에서 널리 알려진 문제중의 하나이다. 그래프의 *해밀톤 사이클*은 그 그래프의 스패닝 사이클, 즉 모든 정점을 포함하는 사이클을 말하고, 모든 정점을 지나는 경로는 *해밀톤 경로*라고 한다. 해밀톤 사이클을 가진 그래프를 해밀톤 그래프라고 한다. 연결망 구조가 해밀톤 사이클을 가지고 있으면 노드나 통신 링크에 고장이 발생하더라도 선형배열을 쉽게 실현할 수 있어서 파이프라인 계산 등에 유용하다고 알려져 있다.

$m \times n$ DLN은 해밀톤 사이클을 가지고 있다. 게다가 $m \times n$ DLN은 임의의 두 정점을 잇는 해밀톤 경로를 가지고 있는 해밀톤 연결된 그래프이며 [1], 또한 [3]을 이용하면 에지가 서로소인(disjoint) 두 개의 해밀톤 사이클로 분할이 가능함을 어렵지 않게 보일 수 있다. 이 논문에서는 이중 루프 네트워크 $m \times n$ DLN의 고장 해밀톤 성질, 즉 에지나 정점에 고장이 발생하였을 때의 해밀톤 성질을 고찰한다.

그래프 G에 있는 k개 혹은 그 이하의 에지에 고장이 발생하더라도(에지를 삭제하더라도) G가 해밀톤 사이클을 가지면, G를 *k-에지 고장 해밀톤 그래프*(k-edge-fault hamiltonian)라고 말한다. k개 혹은 그 이하의 에지에 고장이 발생하더라도 해밀톤 연결되어 있으면, *k-에지 고장 해밀톤 연결된 그래프*(k-edge-fault hamiltonian-connected)라고 한다. 그래프의 에지 고장뿐만 아니라 정점 고장에 대해서도 마찬가지로 *k-정점 고장 해밀톤 그래프*(k-vertex-fault hamiltonian), *k-정점 고장 해밀톤 연결된 그래프*(k-vertex-fault hamiltonian-connected)를 정의할 수 있다.

에지나 정점 어떤 요소에 고장이 발생하더라도 그 수가 k 이하인 경우 해밀톤 사이클을 가지면 *k-고장 해밀톤 그래프*(k-fault hamiltonian)라고 말하고, 마찬가지로 *k-고장 해밀톤 연결된 그래프*(k-fault hamiltonian-connected)를 정의할 수 있다. 그래프가 해밀톤 사이클을 가지기 위해서는 최소 분지수가 2 이상이라는 조건을 만족해야 하므로, G가 k-고장 해밀톤 그래프이면 $k \leq \delta(G) - 2$이다. 여기서 $\delta(G)$는 G의 최소 분지수이다. 그리고 그래프가 해밀톤 연결되기 위해서는 최소 분지수가 3 이상이므로, G가 k-고장 해밀톤 연결된 그래프이라면 반드시 $k \leq \delta(G) - 3$이다.

이 논문에서는 m과 $n(n \geq 4)$이 모두 짝수인 $m \times n$ DLN은 1-고장 해밀톤 연결된 그래프이며 2-고장 해밀톤 그래프임을 보인다. 이 결과는 이중 루프 네트워크의 분지수가 4이므로 2-고장 해밀톤 연결된 그래프나 3-고장 해밀톤 그래프가 될 수 없다는 점에서 최적이다.

하이퍼큐브 Q_n에서는 고장인 요소의 수가 $n-1$ 이하일 때 $f_v > 0$이면 길이 $2^n - 2f_v$ 이상인 사이클을 가지고, $f_v = 0$이면 길이 $2^n - 2$ 이상인 사이클을 가지고 있음이 알려져 있다 [5]. 여기서 f_v는 정점 고장의 수이다. 스타 그래프 S_n의 고장 해밀톤 성질은 [7]에서 고려하였는데, 고장인 요소의 수가 $n-3$ 이하일 때 S_n은 길이가 $n! - 4f_v$ 이상인 사이클이 존재함을 보였다. 하이퍼큐브나 스타 그래프는 모두 이분 그래프이기 때문에, 1-고장 해밀톤 그래프나 1-고장 해밀톤 연결된 그래프가 될 수 없다. 유향 이중 루프 네트워크에서 노드나 에지에 고장이 하나 발생할 때 해밀톤 사이클을 가질 필요충분조건은 [6]에 알려져 있다.

2 $m \times n$ DLN의 고장 해밀톤 성질

$m \times n$ DLN에서 같은 행에 속한 두 정점을 잇는 에지를 *가로 에지*, 나머지를 *세로 에지*라고 한다. 가로 에지는 m개의 서로소이고 길이 n인 사이클을 이루며, 세로 에지는 하나의 해밀톤 사이클을 이룬다. m과 n이 모두 짝수일 경우 $m \times n$ DLN은 길이 $m+1$인 사이클을 가지므로 이분 그래프가 아니다.

또한 $m \times n$ DLN은 정점 대칭이지만, 에지 대칭이지는 않다. 그림 1 (b)에 있는 4×6 DLN에서 가로 에지 $(v_{1,3}, v_{1,4})$를 지나는 길이 5인 사이클은 하나 밖에 없지만, 에지 $(v_{1,4}, v_{2,4})$를 지나는 길이 5인 사이클은 둘 있다. 그러나 두 가로 에지 (혹은 세로 에지)는 서로 similar하다. 즉, 임의의 두 가로 에지 (혹은 세로 에지) (x,y)와 (x',y')에 대해서 $g(x)=x'$이고 $g(y)=y'$인 automorphism g가 존재한다.

$m \times n$ DLN은 $m \times n$ 그리드 그래프에서 랩어라운드 에지를 추가하여 얻어지는 그래프이므로, 다음 보조정리 1과 같은 그리드 그래프의 해밀톤 성질은 $m \times n$ DLN의 해밀톤 성질을 고찰하는데 유용하다. $m \times n$ 그리드 그래프는 두가지 색, 예를 들면 흰색, 검정색으로 인접한 정점은 서로 다른 색을 가지도록 정점에 색을 할당할 수 있는 이분 그래프이다. 흰색 정점의 수와 검정색 정점의 수가 같은 이분 그래프에서 서로 다른 색을 가진 임의의 두 정점사이에 해밀톤 경로가 존재하면 *bihamiltonian 연결된 그래프*라고 말한다.

보조정리 1 *(a) m, n이 모두 4 이상이고 짝수인 $m \times n$ 그리드 그래프는 bihamiltonian 연결된 그래프이다. $n \geq 4$인 $2 \times n$ 그리드 그래프의 서로 다른 색을 가진 두 정점이 서로 다른 열에 있거나, 혹은 두 정점이 모두 열 1이나 열 n에 있으면 이 두 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다 [2]. (b) m, n이 모두 2 이상이고 mn이 짝수이면 $m \times n$ 그리드 그래프는 한 꼭지 정점과 색이 다른 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로를 가진다 [1].*

$m \times n$ DLN에서 인접한 두 행에 속한 정점으로 유도되는(induced) 그래프는 $K_2 \times C_n$과 동형이다. 여기서 C_n은 길이 n인 사이클 그래프이다. m에 대한 수학적 귀납법으로 $m \times n$ DLN의 해밀톤 성질을 증명할 때 다음과 같은 $K_2 \times C_n$의 성질은 매우 유용하다.

보조정리 2 *(a) $K_2 \times C_n$은 bihamiltonian 연결된 그래프이다. (b) $K_2 \times C_n$에서 흰색 정점 s_1, s_2와 검정색 정점 t_1, t_2 사이에 두 개의 정점이 서로소인 경로 P_1, P_2가 존재해서 이 그래프의 모든 정점을 지난다.*

2.1 에지 고장

정리 1 *(a) $m \times n$ DLN은 1-에지 고장 해밀톤 연결된 그래프이다. (b) $m \times n$ DLN은 2-에지 고장 해밀톤 그래프이다.*

위 정리에서 (a)가 성립함을 보이기 위해서 먼저 $2 \times n$ DLN이 1-에지 고장 해밀톤 연결된 그래프임을 보인 후, m에 대한 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다. $m \times n$ DLN이 에지 대칭이지는 않지만 가로 에지들은(혹은 세로 에지들은) 서로 similar하므로, 가로 에지 $(v_{2,1}, v_{2,n})$과 세로 에지 $(v_{1,1}, v_{m,2})$가 동시에 고장이라고 생각하고, $m-2 \times n$ DLN이 1-에지 고장 해밀톤 연결된 그래프임을 이용하여 임의의 두 정점 s, t를 잇는 해밀톤 경로가 존재함을 보이면 충분하다. (b)를 증명하기 위해서 에지 고장의 수가 2라고 가정한다. 에지 고장의 수가 1 이하인 경우는 해밀톤 연결되어 있고, 따라서 해밀톤 사이클을 가진다. 두 고장 에지가 모두 가로 에지인 경우는 세로 에지만으로 해밀톤 사이클을 이루므로, 고장 에지중 적어도 하나는 세로 에지인 경우에 해밀톤 사이클이 존재함을 증명하면 충분하다. 증명은 생략한다.

2.2 정점 고장

정리 2 *(a) $m \times n$ DLN은 1-정점 고장 해밀톤 연결된 그래프이다. (b) $m \times n$ DLN은 2-정점 고장 해밀톤 그래프이다.*

$m \times n$ DLN이 정점 대칭이므로 정점 $v_{1,n}$이 고장이라고 가정할 수 있다. 먼저 $2 \times n$ DLN이 1-정점 고장 해밀톤 연결된 그래프임을 보인다. 그리고 m에 대한 귀납법으로 $m \times n$ DLN은 1-정점 고장 해밀톤 연결된 그래프임을 증명할 수 있다. (b)도 m에 대한 귀납법으로 증명할 수 있다. 증명은 생략한다.

2.3 에지와 정점 고장

정리 3 *(a) $m \times n$ DLN은 1-고장 해밀톤 연결된 그래프이다. (b) $m \times n$ DLN은 2-고장 해밀톤 그래프이다.*

고장이 하나인 경우는 에지 고장이거나 정점 고장이므로 (a)는 정리 1 (a)와 2 (a)에 의해서 성립한다. (b)를 증명하기 위해서 고장인 정점과 에지가 각각 하나씩 있다고 가정한다. 나머지 경우는 정리 1 (b)와 2 (b)로부터 분명하다. 일반성을 잃지 않고 고장인 정점은 $v_{1,n}$이라고 가정한다. 증명을 위하여 에지 고장은 없다고 생각하고 세 개의 해밀톤 사이클을 구하여, 이것들이 공통으로 지나는 에지가 없음을 보임으로써 추가로 어떤 에지 하나에 고장이 있더라도 셋중 하나의 해밀톤 사이클이 존재함을 보인다. 증명은 생략한다.

3 결론

이 논문은 에지나 정점에 고장이 있는 이중 루프 네트워크 $m \times n$ DLN의 해밀톤 성질을 고려하여, m과 $n(n \geq 4)$이 모두 짝수인 경우에 DLN은 1-고장 해밀톤 연결된 그래프이고 또한 2-고장 해밀톤 그래프임을 증명하였다. m, n이 짝수로 제한되지 않은 경우, 더 나아가서는 일반적인 이중 루프 네트워크의 고장 해밀톤 성질을 밝히는 것은 미해결 문제이다.

참고문헌

[1] C. C. Chen and N. F. Quimpo, "On strongly hamiltonian abelian group graphs" in. *Australian Conference on Combinatorial Mathematics (Lecture Notes in Mathematics #884)*, pp. 23-34, 1980.

[2] A. Itai, C. H. Papadimitriou, and J. L. Czwarcfiter, "Hamiltonian paths in grid graphs," *SIAM J. Comput.* **11(4)**, pp. 676-686, 1982.

[3] J.-H. Park, "Hamiltonian decomposition of recursive circulants," in *Proc. 9th International Symposium on Algorithms and Computation ISAAC'98 (LNCS #1533)*, Taejon, Korea, pp. 297-306, 1998.

[4] D. A. Reed and R. M. Fujimoto, *Multicomputer Networks: Message-Based Parallel Processing*, The MIT Press, 1987.

[5] A. Sengupta, "On ring embedding in hypercubes with faulty nodes and links", *Inform. Proc. Lett.* **68**, pp. 207-214, 1998.

[6] T.-Y. Sung, C.-Y. Lin, Y.-C. Chuang, and L.-H. Hsu, "Fault tolerant token ring embedding in double loop networks," *Inform. Proc. Lett.* **66**, pp. 201-207, 1998.

[7] Y.-C. Tseng, S.-H. Chang, and J.-P. Sheu, "Fault-tolerant ring embedding in a star graph with both link and node failures," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems* **8(12)**, pp. 1185-1195, 1997.