

# B-spline을 이용한 기하 모델링에서 Universal Parametrization의 특성

임충규, 서영호, 오원근  
한국전자통신연구원, 가상현실(VR)연구개발센터  
{cglim, syh, owg}@etri.re.kr

## The Properties of The Universal Parametrization in Geometric Modeling Using B-splines

Choong-Gyoo Lim, Young-Ho Suh, Weon Geun Oh  
Electronics and Telecommunications Research Institute(ETRI), VR R&D Center

### 요 약

이 논문에서는 CAGD 및 기하모델링 분야에서 최근 발표된 Universal Parametrization의 계산적 또는 응용적 특성을 고찰하고자 한다. Universal Parametrization을 이용하여 구한 B-spline의 곡선이나 곡면이 아주 자연스러운 특성을 가지고 있다. 뿐만 아니라, 다른 매개변수법(parametrization)을 이용하는 경우, 점들의 기하학적 분포나 곡선/곡면의 차수에 따라 결과의 차이가 심한 경우가 있으나 새로운 방법은 B-spline이라는 기초함수의 특성을 고려한 매개변수법이므로 이러한 결과의 차이를 최대한 줄이는 특성이 있다. 또한 점 데이터에 관해서 Affine Invariant하고 Semi-localness의 특성을 보인다. 이외에도, 계산적인 관점에서 강인성을 보유하고 있고, 많은 응용 분야에서 쉽게 자유곡선이나 자유곡면 모델링을 할 수 있도록 한다. 한 예로, 3D 다각형 메쉬로부터 B-spline을 이용한 자유곡면 모델을 구하는 소프트웨어 툴을 설명한다.

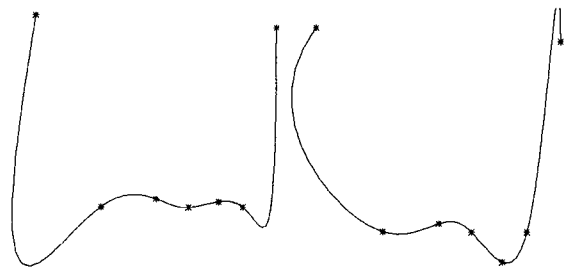
### 1. 서론

CAGD나 기하모델링에서 자유곡선이나 자유곡면을 이용해서 많은 모델링이 이루어진다. 이는 원래 모델의 표현성이 뛰어나고 변형을 쉽게 할 수 있기 때문이다. 자유곡선/곡면 모델링에서 B-spline이라는 기초함수가 많이 이용되어지고 있으나 실제 모델링에서 중요한 부분인 매개변수법에 대해서 연구는 극히 일부에 제한되어져 왔다.

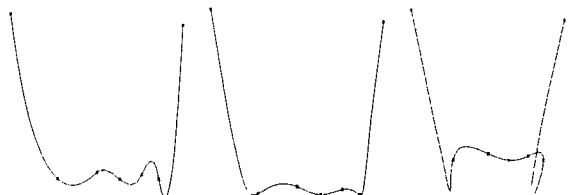
지금까지의 연구는 주어진 점 데이터의 기하적 특성을 고려하는 연구가 진행되었고 이들의 한계는 점들의 변화나 곡선/곡면의 차수에 결과가 그림 1, 2와 같이 많은 차이를 나타내는 단점이 있다. 기하적 특성을 이용한 방법의 한계를 극복하고자 최적 함수를 이용하거나 반복적 방법을 이용하는 방법이 시도되어져 왔다. 하지만, 적절한 최적함수를 구하기 어렵거나, 경우에 따라서 수렴하지 않는다는 문제점이 있다.

### 2. 매개변수법

Interpolation이나 Approximation을 이용, 수식을 구하는 모델링에서 매개변수는 선과 면의 모양을 결정하는 주요한 요소인데, 이를 결정하는 법을 매개변수법이라고 한다. 점 데이터의 기하적 특성(점간 거리나 연속한 점들이 갖는 각도)을 이용하는 매개변수법에는 Equidistant, Chordal, Centripetal 등의 방법이 있다. 최근에 발표된 Foley의 방법도 이 범주에 포함된다.



(a) 주어진 점 데이터 (b) 점5를 변화시킨 후  
그림 1. Centripetal 매개변수법에서 점 데이터의 변화에 의한 결과의 차이



(a) degree 2 (b) degree 3 (c) degree 4  
그림 2. Foley Parametrization를 이용한 곡선의 차수에 따른 변화

이러한 방법은 점들의 변화에 그림 1에서 처럼 민감한 변화를 보이는 경우가 있고 그림 2와 같이 다른 차수인 경우 전혀 다른 결과를 보여주기도 한다. 이러한 기하적 방법의 단점을 극복하기 위해 시도된 방법에는 최적함수를 이용하는 방법이 있다. 일반적으로 최적함수를 적절한 함수를 구하기 어렵다는 문제점이 있다. 이외에도, 반복적으로 적절한 매개변수 값을 찾는 계산적 방법이 이용되지만 역시, 수렴을 보장할 수 없다는 문제가 있다.

최근에 발표된 Universal Parametrization은 종전의 방법들의 문제점을 해결하기 위해 기초함수인 B-spline의 특성을 이용하는 새로운 접근법을 시도한다. 이 방법에서는 기초함수  $N_{i,k}(t)$ 가 최대가 되는 매개변수 값  $t_i$ 를 각 점  $P_i$ 의 매개변수 값으로 정한다. 이 간단한 방법은 3장과 4장에서 설명되는 것처럼 효과적이면서도 쉽게 응용될 수 있는 장점이 있다.

**3. Universal Parametrization의 특성**

지금까지 발견된 Universal Parametrization의 특성은 다음과 같이 열거할 수 있다[5].

1. 곡선이나 곡면이 보다 부드럽다.
2. 짝수 차수 곡선이나 곡면에서도 만족할 만한 결과를 얻을 수 있다. 기존의 방법들을 짝수 차수에서 적용하면 만족할 만한 결과를 얻기 힘들다. 그림3 참조.
3. B-spline 곡선이나 곡면이 점 데이터에 대해서 Affine Invariant하다. 그림4 참조.
4. 곡선이나 곡면의 결과가 각 점 데이터에 대해 semi-localness[5]의 특성을 갖고 있다. B-spline 곡선/곡면은 각 제어점에 대해서 localness의 특성을 갖고 있다. 그림5 참조. 이러한 특성은 다음 Interpolation 식에서 행렬  $A$ 가 diagonally dominant하고 그의 역행렬도 대부분 같은 특성을 보유하기 때문이다.

$$Ad = P$$

$$\text{여기서, } A = \begin{pmatrix} N_{0,k}(t_0) & N_{1,k}(t_0) & \cdots & N_{n,k}(t_0) \\ N_{0,k}(t_1) & N_{1,k}(t_1) & \cdots & N_{n,k}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,k}(t_n) & N_{1,k}(t_n) & \cdots & N_{n,k}(t_n) \end{pmatrix}$$

$$d = (d_0 \ d_1 \ \cdots \ d_n)^T,$$

$$P = (P_0 \ P_1 \ \cdots \ P_n)^T \text{이다.}$$

이외에도 다음과 같은 계산적인 특성을 보유한다.

1. 매개변수 값의 분포를 조정할 필요가 없다. 다른 방법에서 매개변수 값은 고르게 분포되지 않기 때문에 종종 계산이 불가능하거나 신뢰할 수 없는 결과를 얻게 된다.
2. Interpolation 행렬이 점 데이터의 기하적 특성에 의하여 결정되지 않고 점 데이터의 크기와 차수에 의해서 결정되기 때문에 계산이 빠르다.

응용적인 관점에서 Universal Parametrization은 여러 개의 곡면 Patch가  $G^0$ 의 연속성을 갖는다[7]. 가로와 세로의 점 데이터의 수가 각각으로 같은 경우에 Tensor-Product를 이용하여 쉽게 곡면을 구할 수 있다.

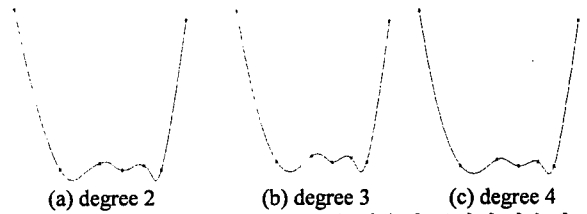


그림 3. Universal Parametrization을 이용한 곡선의 차수에 따른 변화.

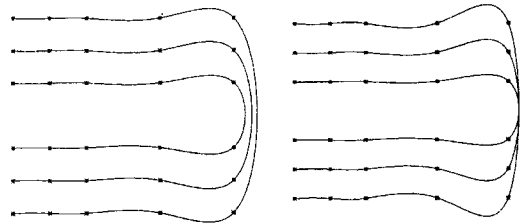


그림 4. Universal Parametrization을 이용한 경우 곡선은 점 데이터에 관하여 Affine Invariant하다.

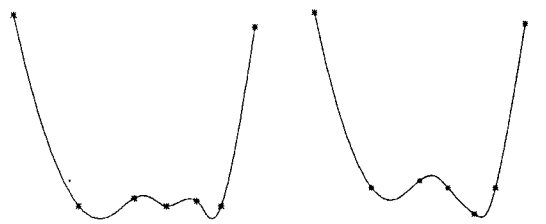


그림 5. Universal Parametrization의 Semi-localness 특성

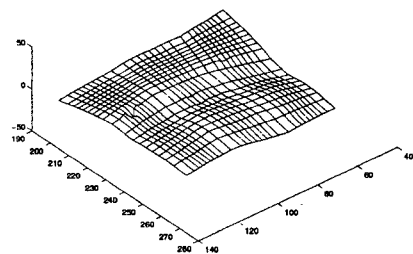


그림 6. 독립적으로 구한 6개의 Patch의  $G^0$  연속성

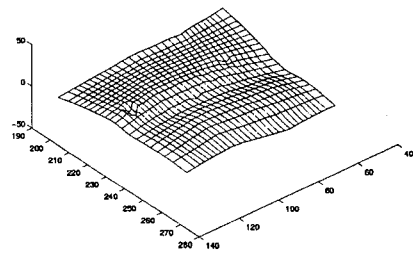


그림 7. Blending 방법을 이용한  $C^{n-1}$  연속성

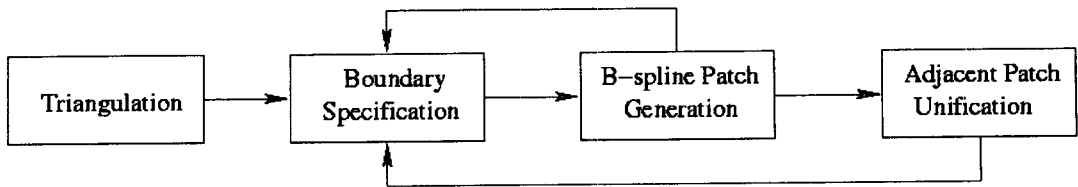


그림 8. 3차원 다각형 모델의 자유곡면 모델로의 변환

인접하는 두개의 곡면 Patch가 같은 수의 같은 점 데이터를 이용한다면 두개의 Patch는 경계에서 일치하게 된다. 따라서,  $G^0$ 의 연속성을 갖는다. 그림 6은 6개의 독립적으로 구해진 Patch가 각 경계에서 일치함을 보여주고 있다. 그림 7은 간단한 Blending 방법[7]을 이용, 경계에서  $C^{n-1}$  연속성을 부여하는 예이다. 이 방법은 Universal Parametrization이 갖는 Semi-localness 특성을 고려한 방법이다. Patch를 생성하는 점 데이터 중에서 가장자리에 있는 점들은 Patch의 제어망이 크면 클 수록 전체 Patch모양에 주는 영향이 줄어들기 때문이다.

4. 자유곡면 모델링의 예

Universal Parametrization이 실제의 응용 프로그램에서 적용되는 사례를 설명한다.

ETRI의 VR 센터에서는 3차원 인물 캐릭터를 자유곡면 모델로 전환하고자 툴을 개발하고 있다. 이 툴은 IRIX 6.4를 운영체제로 하는 SGI Octane에서 Maya Plug-In으로 개발되고 있다.

그림 8은 이 툴을 이용해서 3차원 다각형 모델을 자유곡면 모델로 변환할 때의 작업흐름도이다. 이 흐름도에 맞게 이 툴은 네개의 부 Plug-In으로 개발되어지고 있다. B-spline Patch 생성 단계에서 Universal Parametrization을 사용, 보다 자연스러운 곡면을 생성하고, 마지막 단계인 Adjacent Patch Unification에서는 Blending 방법을 사용, 경계에서  $C^{n-1}$  연속성을 부여하면서 동시에 Patch의 수를 줄이고 있다. 그림 9는 6개의 독립적으로 생성된 Patch와 통합 과정을 통해 4개로 줄어든 Patch를 보여주고 있다. 그림 9에서 위 Patch를 제외한 전·후·좌·우의 4개의 Patch가 하나로 통합되었다.

5. 결론

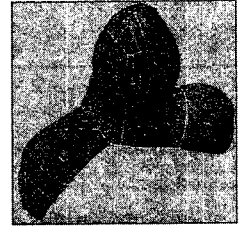
이 논문에서는 최근에 발표된 Universal Parametrization의 특성을 살펴보고 특히, Universal Parametrization의 특성을 고려한 Blending 방법을 이용하여 자유곡면에서  $C^{n-1}$  연속성을 부여하는 소프트웨어 툴에 대해서 설명하였다.

6. 참고 문헌

[1] Gerald Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design - A Practical Guide*. Academic Press, Inc., 1992.  
 [2] Thomas A. Foley and Gregory M. Nielson. Knot selection for parametric spline interpolation. In Tom Lyche and Larry L. Schumaker, editors, *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, pages 261-272. Academic Press, 1989  
 [3] Josef Hoscheck and Dieter Laster. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A.K. Peters, 1993.



(a) 6개의 곡면 Patch



(b) 4개의 곡면 Patch

그림 9. 자유곡면 모델로의 변환의 예

[4] Peter Lancaster and Kestutis Salkauskas. *Curve and Surface Fitting : An Introduction*. Academic Press, 1986.  
 [5] E.T.Y. Lee. Choosing nodes in parametric curve interpolation. *Computer Aided Geometric Design*, 21(6):363-370, 1989.  
 [6] Choong-Gyoo Lim. *A Universal Parametrization in B-spline Curve and Surface Interpolation and Its Performance Evaluation*. Ph.D. Dissertation, Louisiana State University, 1998.  
 [7] Choong-Gyoo Lim. A universal parametrization in B-spline curve and surface interpolation. *Computer Aided Geometric Design*, 16(5):407-422, 1999.  
 [8] Choong-Gyoo Lim. A blending method in constructing  $c^{n-1}$  B-spline surfaces. 2000. *In manuscript*.