

분할 경계 보간곡선을 이용한 자유형태 곡면 변형방법

박 철 호

두원공과대학 컴퓨터그래픽스과

A Method of Free-form surface Deformation using Subdivision Boundary Interpolating Curves

Chulho Park

Dept. of Computer Graphics, Doowon Technical College

요 약

본 논문은 서로다른 스플라인 곡선들간의 위상적 상호관계로서 곡선과 곡면 설계 상에서 중요한 작업인 주어진 영역 안에 한정된 보간곡선 제어방법을 제안한다. 위상적 상호관계는 곡선들간의 영향범위 관계 그리고 스플라인 곡선들과 곡면간의 기하학적 관계를 의미한다. 기존의 방법은 선형 분모를 가지는 분수식 3차 보간법을 사용하여 주어진 영역에서 제한된 보간 곡선을 제어하는 방법을 제안하였으나, 일반적인 경우에서 실행 상의 많은 계산량과 오차가 나타나는 문제점을 나타내었다. 본 논문은 이러한 문제점을 해결하기 위한 선형분모를 가지는 가중치된 분수식 3차 보간법을 제안한다. 이 방법은 변형 보간된 물체상의 변화량을 계산하여 불규칙한 패치들간의 결합부분과 제어 및 국부수정의 변형을 제어하는 방법을 제안한다.

1. 서론

자유형태 모델링은 컴퓨터그래픽스의 한 분야로써 삼차원 물체의 기하학적인 표현방법을 위하여 곡선들과 곡면들의 형태를 제어하기 위한 효과적인 방법들은 가장 중요한 작업이다. 자유형태 모델링의 한 부분인 스플라인 보간법은 모델링을 위한 곡선과 곡면 제어 방법으로, 구조가 복잡한 물체를 모델링하는데 효과적으로 사용되는 기법이다. 기존의 많은 연구들이 곡선과 곡면제어를 위한 스플라인의 여러 가지 방법들은 분수식 스플라인과 분수식 3차 스플라인 그리고 형태 제어를 위한 응용방법이 제안되었다[2,4,5]. 기존의 방법[1,2]은 선형 분모를 가지는 분수식 3차 보간법을 사용하여 주어진 영역에서 제한된 보간 곡선을 제어하는 방법을 제안하였으나, 대부분의 일반적인 경우들에서는 실행될 수 없는 문제점을 나타내었다[1,7]. 본 논문은 이러한 문제점을 해결하기 위한 선형분모를 가지는 가중치된 분수식 3차 보간법을 제안한다. 이 방법은 스플라인의 위상적인 상호관계로서, 보간 변형된 물체상의 변화 데이터량을 계산하여 불규칙한 패치들간의 결합과 제어 및 국부수정의 변형 방법을 제시한다. 본 논문의 구성은 제 2장에서는, 선형 분모를 가지는 가중치화된 분수식 3차 스플라인을 구조화하여 나타내었다. 제 3장에서는 스플라인이 주어진 직선들의 위 혹은 아래 위치에 놓인 보간 곡선을 제어하는데 사용되는 방법과 제약조건의 종류에 대하여 만족할 수 있는 조건을 제안하고, 기존조건들의 문제점들을 해결할 수 있는 방법을 나타낸다. 제 4장에서는 직선들 대신에 2차 곡선들이 제어 곡선을 나타낼 수 있는 경우를 제안한다. 끝으로 제 5장에서는 결론으로 구성된다.

2. 가중치화된 분수식 3차 스플라인 보간법

가중치화된 분수식 스플라인을 구성하기 위하여 함수 값들을 기반으로 한 분모를 가지는 분수식 3차 스플라인은 첫 번째로 간단하게 변경할 수 있다. 주어진 데이터의 집합을 $\{(t_i, f_i, d_i), i=0,1,\dots,n\}$ 이라 하고, 이때, f_i 와 d_i 는 각각의 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 인 절점 공간에서 정의된 보간 함수 $f(t)$ 의 일차 미분계수 값과 함수 값을 나타낸다. 그리고 $h_i = t_{i+1} - t_i$, $L_i = (t - t_i)/h_i$ 그리고 α_i 와 β_i 는 양정수 매개변수들을 나타낸다. 따라서 선형분모를 가지는 C^1 연속성 구간, 분수식 3차 스플라인은 다음과 같이 $\{t_0, t_n\}$ 에서 보간되어 정의된다.

$$p_i(t) |_{[t_i, t_{i+1}]} = \frac{p_i^*(t)}{q_i^*(t)}, i=0,1,\dots,n-1 \quad (1)$$

$$\text{단, } p_i^*(t) = (1-\theta)^3 \alpha_i f_i + \theta(1-\theta)^2 V_i^* + \theta^2(1-\theta) W_i^* + \theta^2(1-\theta) W_i^* + \theta^3 \beta_i f_{i+1}$$

$$q_i^*(t) = (1-\theta)\alpha_i + \theta\beta_i$$

$$V_i^* = (2\alpha_i + \beta_i)f_i + \alpha_i h_i d_i, \quad W_i^* = (\alpha_i + 2\beta_i)f_{i+1} - \beta_i h_i d_{i+1}$$

그러므로, 분수식 3차 스플라인은 다음 관계를 만족한다.

$$p_*(t_i) = f_i, \quad p_*(t_i) = \Delta_i, \quad i=0,1,\dots,n-1$$

그러므로 선형 분모를 가지는 분수식 3차 스플라인을 나타낸다. 이때, $\Delta_i = (f_{i+1} - f_i)/h_i$ 이고, 함수 값을 기반으로 한 C^1 연속성, 구간, 분수식 3차 함수는 다음 식(2)과

같이 정의된다.

$$p_i(t) |_{[t_i, t_{i+1}]} = \frac{p_{i,*}(t)}{q_{i,*}(t)} \quad i=0,1,\dots,n-2 \quad (2)$$

단, $p_{i,*}(t) = (1-\theta)^3 \alpha f_i + \theta(1-\theta)^2 V_{i,*} + \theta^2(1-\theta) W_{i,*} + \theta^3 \beta f_{i+1}$

$$q_{i,*}(t) = (1-\theta)\alpha_i + \theta\beta_i$$

$$V_{i,*} = (\alpha_i + \beta_i)f_i + \alpha_i f_{i+1}, \quad W_{i,*} = (\alpha_i + 2\beta_i)f_{i+1} - h_i \beta_i \Delta_{i+1}$$

그러므로, 스플라인 $p^*(t)$ 는 식(2)에 의하여 보간 구간 $[t_0, t_{n-1}]$ 에서, C^1 연속성, 구간 분수식 3차 스플라인에 대한 다음 조건을 만족한다.

$$P_*(t_i) = f_i, \quad P'_*(t_i) = \Delta_i, \quad i=0,1,\dots,n-1$$

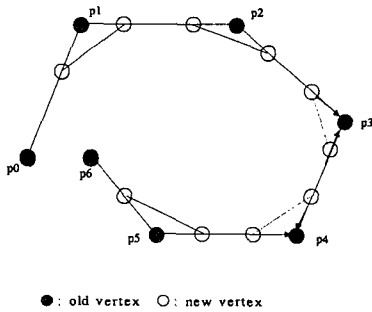


그림 1. 경계 분할에 의한 스플라인 보간방법

$$P(t) |_{[t_i, t_{i+1}]} = \lambda P^*(t) + (1-\lambda)P_*(t) = \frac{p_i(t)}{q_i(t)}, \quad i=0,1,\dots,n-2 \quad (3)$$

단, $p_i(t) = (1-\theta)^3 \alpha f_i + \theta(1-\theta)^2 V_i + \theta^2(1-\theta) W_i + \theta^3 \beta f_{i+1}$

$$q_i(t) = (1-\theta)\alpha_i + \theta\beta_i$$

$$V_i = (\lambda\alpha_i + \alpha_i + \beta_i)f_i + (1-\lambda)\alpha_i f_{i+1} + \lambda\alpha_i h_i d_i$$

$$W_{i,*} = (\alpha_i + 2\beta_i)f_{i+1} - (1-\lambda)h_i \beta_i \Delta_{i+1}, \quad \lambda \in R, -\lambda \beta_i h_i \Delta_{i+1}$$

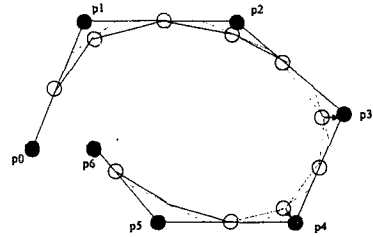
3. 구간 변형데이터 보간방법

$g(t)$ 가 분할 $A: t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 에서 결합하는 주어진 직선 혹은 구간 직선에 의하여 식(3)을 정의하는 보간함수 $P(t)$ 를 $f(t)$ 가 보간 한다고 가정할 경우, 자료집합 $\{(t_i, f_i, d_i) \mid i=0,1,\dots,n\}$ 은 $f_i \geq$ (or \leq) $g(t_i) \quad i=0,1,\dots,n$ 을 만족한다. 만약 모든 $t \in [t_0, t_n]$ 에 대하여 $P(t) \geq$ (or \leq) $g(t)$ 일 경우, $P(t)$ 는 위의 곡선 혹은 $g(t)$ 를 포함하는 곡선들인 제약조건에 의하여 가중치 분수식 보간방법을 나타낸다. 절점들은 본 논문의 다음부분에 동일한 구간으로 나타난다. 가중치화된 분수식 보간 방법은 보간 도구로서 식 (3)에 의하여 정의되고 주어진 구간 안에 나타난 직선들 아래에 놓인 보간 곡선들에 대하여 충분한 조건을 다음과 같이 나타낸다.

정리 1.

$\{(t_i, f_i, d_i, g_i^*), i=0,1,\dots,n\}$ 는 주어진 데이터 집합에

$f_i \leq g_i^*$ 을 만족한다. 가중치화된 분수식 3차 $P(t)$ 에 대한 충분한 조건은 매개변수들 $\alpha_i, \beta_i > 0$ 인 $[t_i, t_{i+1}]$ 에서 선형함수 $g^*(t)$ 아래에 놓인 식(3)에 의하여 정의된다. 가중치 계수 $\lambda \in R$ 은 다음 선형 차등식을 만족한다.



● : old vertex ○ : new vertex

그림 2. 경계분할에 의한 가중치 구간변형 보간방법

$$\lambda \alpha_i (f_i + f_{i+1} + h_i d_i) + \alpha_i (f_i + f_{i+1} - g_{i+1}^* - g_i^*) + \beta_i (f_i - g_i^*) \leq 0 \quad (4)$$

$$\lambda \beta_i (f_{i+2} - f_{i+1} + h_i d_{i+1}) + \beta_i (3f_{i+1} - f_{i+2} - g_{i+1}^* - g_i^*) + \alpha_i (f_{i+1} - g_{i+1}^*) \leq 0 \quad (5)$$

만약, $\alpha_i (f_i - g_i^*) \leq 0, \beta_i (f_{i+1} - g_{i+1}^*) \leq 0$ 의 조건일 경우, 또한 $A_i \leq 0, B_i \leq 0$ 이라면, $U_i(t) \leq 0$ 은 모든 $t \in [t_i, t_{i+1}]$ 에 대하여 보간 곡선 제약이 가능하다. 그러므로, 정리 1과 같이 주어진 구간에서 나타난 직선 위에 놓인 보간 곡선에 대한 위의 조건을 만족한다.

정리 2.

$\{(t_i, f_i, d_i, g_i, g_i^*), i=0,1,\dots,n\}$ 는 $g_i < f_i < g_i^*$ 를 만족하는 주어진 데이터 집합을 나타내고, 매개변수 $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$ 이 존재한다.

그리고 가중치화된 분수식 스플라인에 계수 $\lambda \in R^+$ 는 보조구간 $[t_i, t_{i+1}]$ 에서 나타난 직선들 $g(t)$ 와 $g_i^*(t)$ 은 식 (3)을 만족한다. 그러므로 정확한 변형구간의 보간해를 계산하기 위하여 다음 보조정리 1을 이용하여 정리 2의 내용을 보충한다.

보조정리 1.

어떤 실수들 $a, b > 0$ 과 $c \in R$ 에 대하여, $cx + a \geq 0, -cx + b \geq 0$ 는 정수 해를 가진다. 이에 대한 조건은 다음과 같다.

(a) 만약 $c=0$ 이라면, $x > 0$ 을 만족하는 값이 존재한다.

(b) 만약 $c > 0$ 이라면, $0 < x < \frac{b}{c}$ 을 만족하는 값이 존재한다.

(c) 만약 $c < 0$ 이라면, $0 < x < \frac{-a}{c}$ 을 만족하는 값이 존재한다.

또한, $x^* = \max \left\{ \left| \frac{b}{c} \right|, \left| \frac{a}{c} \right| \right\}$ 을 만족하고, 만약 $c \neq 0$

이라면, $x < 0 < x^*$ 을 만족하는 어떤 x 는 그들의 해가 될 수 있다. 따라서 위의 조건을 이용하여 다음 정리 4를 증명한다. 보조정리 1에 의하여 $\lambda_i > 0$ 을 만족하고,

$0 < \lambda < \lambda_i$ 를 만족하는 어떤 λ 에 대하여 다음 차분식을 나타낸다.

$$\lambda(f_i - f_{i+1} + h_i d_i) + (f_i + f_{i+1} - g_{i+1} - g_i) \geq 0 \quad (6)$$

$$\lambda(f_{i+1} - f_i - h_i d_i) + (g_{i+1}^* + g_i^* - f_i - f_{i+1}) \geq 0 \quad (7)$$

그러므로 $\xi_i > 0$ 에 대하여 식(6)과 (7)을 만족한다.

4. 구간 변형 보간 스플라인 곡선들의 제어 방법

$f(t)$ 는 식(3)에 의하여 정의된 가중치된 분수식 보간함수 $P(t)$ 를 보간한 함수이다. 제약조건 정의는 식(3)과 같다. $g^*(t)$ 는 분할 $\Delta: t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 에서 연결된 $[t_0, t_n]$ 에 정의된 2차 혹은 구간 2차 함수를 나타낸다. $t \in [t_i, t_{i+1}]$ 일 때, $f_i \leq g^*(t_i)$ 를 만족하는 주어진 데이터 집합 $\{(t_i, f_i, d_i, g_i^*, g_{i+1}^*), i=0, 1, \dots, n\}$ 에 대하여 다음 식(8)을 만족할 경우, 정리 1에 대한 조건을 만족한다.

$$g_i^*(t) = (1-\theta)^2 g_i^* + \theta(1-\theta)(2g_i^* + g_i^* h_i) + \theta^2 g_{i+1}^* \quad (8)$$

단, $g_i^* = g^*(t_i)$, $g_{i+1}^* = g^*(t_{i+1})$, $g_i^* = g^*(t)$

그러므로, $[t_i, t_{i+1}]$ 에서 2차식 곡선 $g(t)$ 위에 놓인 가중치화된 분수식 보간곡선들에 대한 충분조건은 위의 식(8)과 같다.

5. 실험 결과 및 분석

주어진 스플라인 보간곡선은 동일 현에 두 호들로 구성되고 C^1 의 성질을 가지는 두 호의 최전곡선에 의하여 자유형태 변형 곡면을 생성할 수 있다. 결과적으로 변형 보간 곡면은 변형 보간 스플라인 곡선 세그먼트들에 의하여 나타난다. 변형 보간된 3차 분수식 스플라인 곡선은 그림 3과 같이 나타낼 수 있다. 본 논문에서는 두 호 구조와 분수식 스플라인 보간방법을 비교하기 위하여 보간 함수식에 분수식 스플라인을 이용하여 변형보간 구간을 계산한다. 따라서 본 논문에서는 12개의 원 호들로 구성된 두 호의 보간곡선을 이용하여 그림 4와 같은 결과를 나타낸다.

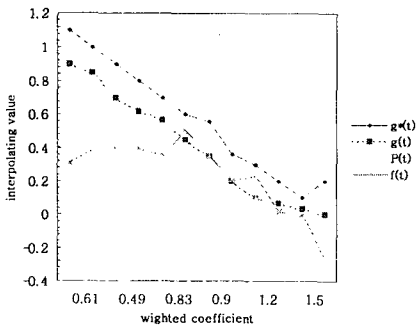
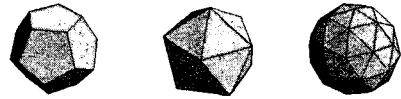


그림 3. 변형 보간 곡선의 가중치 계수와 변형 보간 데이터

이 방법은 단지 4개 세그먼트들로 변형 보간하는 방법으로서 유사한 데이터 양을 가지는 변형 매칭 곡면을 계산한다. 또한, 각 세그먼트들의 경계 제어점들은 단지 한 번만 계산하면 된다. 그림 4는 구간 보간 곡선을 이용한

결과이다. 두 곡선세그먼트의 보간 방법과 두 호 각 속도의 방향은 각 원 세그먼트에 일정하다. 만약, 많은 수의 원 세그먼트가 상대적으로 큰 값을 가진다면, 정확한 각 속도와 두 호 근사값 간에 큰 차이를 나타내게 된다.



(a)주어진 물체 (b) 분수식 스플라인보간 (c)경계분할 가중치보간 보간 변형적용

그림 4. 자유형태 곡면 변형매칭 결과의 예

또한, 분수식과 두 호 구조 모두는 스플라인 보간 곡선 세그먼트로 근사된다. 결과는 그림 4.(c)와 같다. 즉 6개 원 호 세그먼트들로서, 두 호 세그먼트와 두 호 근사값을 비교한 결과, 분수식과 두 호 근사 모두는 유사한 데이터 양을 가짐을 나타낸다.

6. 결론

기존의 방법은 선형 분모를 가지는 3차 보간법을 사용하여 주어진 영역에서 제한된 보간 곡선을 제어하는 방법을 제안하였으나, 대부분의 일반적인 경우들에서 실행상의 많은 계산량과 오차가 나타나는 문제점을 나타내었다. 본 논문은 이러한 문제점을 해결하기 위한 선형 분모를 가지는 분수식 3차 스플라인 보간법을 제안하였다. 이 방법은 스플라인의 위상적인 상호관계로서, 보간 변형된 물체상의 변화 데이터량을 계산하여 불규칙한 패치들간의 결합과 제어 및 국부수정의 변형 방법을 제시하였다. 앞으로의 향후연구과제는 동일한 위치에서 변형할 수 없는 물체의 변형방법 및 제어기법과 non-uniform 보간 데이터의 적용에 대한 연구가 필요하다.

[참고문헌]

- [1] Alfeld, P., Neamtu, M. & Schumaker, L.L., " Fitting scattered data on sphere-like surfaces using spherical splines," Journal of Computational and Applied Mathematics, pp. 5-43, 1996.
- [2] Alt, H., Behrends, B. and Blomer, J., "Approximate Matching of Polygonal Shapes," 7th ACM Symposium on Computational Geometry, 1991, pp. 186-193, 1991.
- [3] Besl, P., "The Free-form Surface Matching Problem," In H.Freeman, editor, Machine Vision for Three-Dimensional Scenes, Academic, New York, pp. 25-69, 1990.
- [4] Chang, L.H.T. & Said, H.B., " C^2 interpolant for spherical scattered data," Technical Report No. 6, Universiti Sains Malaysia, 1998.
- [5] Coque, H.G., "Extended Free-form deformation: A sculpturing tool for 3D geometric modeling," ACM SIGGRAPH Conference Proceeding 24, 4, pp. 187-196, 1990.
- [6] Elber, G., "Metamorphosis of Free-form curves and surface," Computer Graphics International, 1995, 14(1), pp. 25-34, 1995.
- [7] M.Kohler, H.Muller, "Efficient calculation of subdivision surface for visualization," Visualisation an Mathematics, Springer-Verlag. pp. 165-179, 1997.