구멍이 있는 다각형에서 가시성 다각형을 구하는 상수 시간 RMESH 알고리즘

김 수 환
부 산 외 국 어 대 학 교 전 자 컴 퓨 터 공 학 부
shkim@taejo.pufs.ac.kr

Constant Time RMESH Algorithms for Computing the Visibility Polygon in a Polygon with Holes

Soo-Hwan Kim
Division of Electronic & Computer Engineering
Pusan University of Foreign Studies

요 약

본 논문은 재구성가능한 메쉬(RMESH) 병렬 모델에서 상수 시간에 구멍이 있는 다각형의 한 점으로부터의 가시성 다각형을 구하는 문제를 고려한다. 알고리즘의 기본 전략은 프로세서의 수에 있어 준-최적인 상수 시간 알고리즘을 사용하여 문제의 크기를 감소시킴으로써 최적인 상수 시간 알고리즘을 얻는 것이다. 이 전략을 사용해 모두 N개의 에지로 구성된 구멍이 있는 다각형에 대한 가시성 다각형을 N×N RMESH에서 상수 시간에 구하는 알고리즘을 제시한다. 이 알고리즘은 다각형들의 집합이 주어져 있을 때 외부의 한 점에서 가시 영역을 구하거나, 선분들의 집합이 주어져 있을 때 평면 상의 한 점에서 가시 영역을 구하는 문제도 해결할 수 있다.

1. 서 론

본 논문은 가시성 문제에 대한 상수 시간 RMESH 알고리즘에 대해서 고려한다. RMESH(Reconfigurable Mesh)는 재구성가능한 메쉬로서 1988년 Miller 등[2]에 의해 처음 소개된 병렬처리 모델이다. RMESH의 기본 구조는 프로세서들을 재구성가능한 버스 시스템(reconfigurable bus system)에 메쉬 형태로 연결한 것이다. 각 프로세서는 동(E)・서(W)・남(S)・북(N)의 4개 포트를 가지며, 알고리즘의 실행중에 버스 스위치에 의해 각 포트 사이를 연결하거나 또는 차단하는 것이 가능하다. 프로세서의 포트 연결을 적절히 조절하여 프로세서들을 여러 버스 조각(subbus)으로 분할할 수 있다. 한 순간에 하나의 프로세서만이 버스 조각에 대한 방송(broadcast)을 할 수 있고, 같은 버스 조각에 연결된 모든 프로세서들은 방송 자료를 상수 시간에 읽을 수 있다. N×N RMESH의 각 프로세서는 O(logN) 비트 크기의 워드(word)를 O(1) 개 저장할 수 있고, 사칙연산을 비롯한 기본 연산을 O(1) 시간에 수행할 수 있다. 또한, 각 프로세서는 자신이 속한 행과 열을 인지할 수 있다.

본 논문에서는 구멍이 있는 다각형 P와 내부의 한 점 q가 주어져 있을 때, 점 q로부터 가시적인 영역, 즉, 가시성 다각형을 구하는 문제를 고려한다. 이 문제는 계산 기하학의 기본적인 문제로서 컴퓨터 그래픽스, 영상 처리, 로봇 제어 등의 여러 응용 분야의 문제를 해결하는 데 사용된다. 순차 알고리즘으로는 O(NlogN) 시간의 알고리즘이 나와 있다[3]. 본 논문에서는 상수 시간에 수행되는 두 개의 알고리즘을 제시한다. 첫 번째 알고리즘은 $N\times N^2$ RMESH에서 상수 시간에 수행되고, 두 번째 알고리즘은 N×N RMESH에서 상수 시간에 수행된다. 두 번째 알고리즘은 문제를 부분 문제들로 분할한 다음 첫 번째 알고리즘을 이용해 부분 문제들을 풀고 부분해들을 적절히 활용하여 문제를 해결한다.

2. 용어 정의 및 기본 연산

다각형 P를 구멍이 있는 다각형이라고 하자. P는 에지들의 집합으로 표현된다. e(v, w)는 P의 두 정점 v와 w를 연결하는 에지를 나타낸다.

다음 소정리들은 다음 절 이후에 기술된 알고리즘에서 필요한 주요 연산을 보여 준다. 이 연산들은 참고문헌 [1]에서 참조되었다. 앞으로 RMESH RM의 i번째 행과 j번째 열에 위치한 프로세서를 RM(i, j)로 표현한다.

소정리 1. N개의 숫자가 N×N RMESH의 한 열에 놓여 있을 때, 이 숫자들에 대한 어떠한 순열도 상수 시간에 구할 수 있다.
소정리 2. N개의 숫자가 N×N RMESH의 한 열에 놓여 있을 때, 이 숫자들 중 최대값과 최소값을 상수 시간에 구할 수 있다.
소정리 3. N개의 숫자가 N×N RMESH의 한 열에 놓여 있을 때, 상수 시간에 이 숫자들을 정렬하여 배치할 수 있다.
소정리 4. N개의 이진값에 대한 전위합(prefix sum)은 N×N RMESH에서 상수 시간에 구할 수 있다.

3. N×N^2 RMESH 알고리즘

본 절에서는 구멍이 있는 다각형 P의 한 점 q로부터의 가시성 다각형을 구하는 상수 시간 N×N^2 RMESH 알고리즘을 소개한다, 여기서 N은 다각형의 에지의 개수이다. 알고리즘의 기본 아이디어는 다각형의 각 정점을 점 q를 원점으로 하여 각도에 따라 정렬하고, 정렬된 정점 리스트에서의 인접한 두 정점과 원점으로 구성되는 섹터(sector)별로 q로부터의 가시 영역 체인을 구하는 것이다(그림 1 참조).

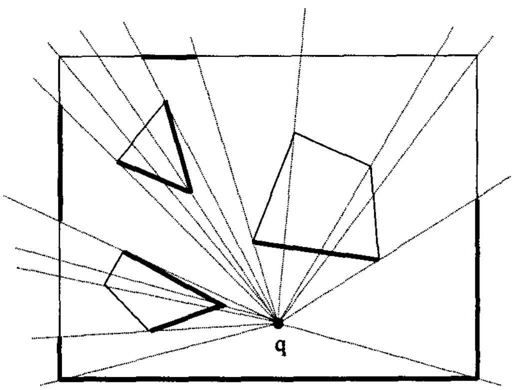

그림 1. 다각형에서의 가시 영역

알고리즘의 입력으로 다각형 P의 에지 집합과 점 q가 주어진다고 하자. 알고리즘이 시작되기 전의 RMESH 상태와 종결후의 상태는 다음과 같다.

초기 조건

다각형 P의 각 에지 e(p_k, p_{k+1})이 RMESH RM의 0번째 열에 차례로 배치된다, k = 0, 1, ⋯ , N-1. 즉, RM(k, 0)는 P의 에지 e(p_k, p_{k+1})이 배치된다. 그리고, RM(0,0)에 점 q가 배치된다.

종결 상태

점 q로부터의 가시성 다각형의 정점 리스트가 RMESH RM의 0번째 열에 배치되고, RM(0, 0)에 정점의 개수가 배치된다.

정리 1. 다각형 P의 점 q로부터의 가시성 다각형은 N×N^2 RMESH에서 상수 시간에 구할 수 있다.
증명. 다음의 알고리즘을 제시함으로써 증명한다.

알고리즘 1

1. P의 각 정점 p_k를 점 q를 원점으로 하여 각도에 따라 정렬한다, 0≤k≤N-1.
2. RMESH RM을 N×N 크기의 부메쉬 RM_k로 분할한 다음 각 RM_k의 0번째 열에 정렬된 정점 리스트 (v_0, v_1, ⋯ , v_{N-1}), 에지 리스트, 점 q를 배치한다.
3. 각 부메쉬 RM_k는 섹터 S_k = (v_{k-1}, q, v_k)를 가로지르는 에지들 중에서 점 q에 가장 가까운 에지를 찾아 S_k에 포함되는 부분(선분)을 구한다.
4. 각 섹터별로 구한 선분들을 RM의 0번째 열로 배치한 다음, 각 프로세서 RM(k, 0)는 이웃한 RM(k-1, 0)과 RM(k+1, 0)이 가지고 있는 선분들과 비교하여 자신이 보유하고 있는 선분의 끝 점이 가시성 다각형의 정점이 되는 가를 조사한다. 그 다음, 정점들을 다시 0번째 열에 차례로 배치하고 종료한다.

위의 과정에서 단계 1, 2는 소정리 1, 3에 의해 상수 시간에 수행되고, 단계 3에서 각 섹터에 포함되는 에지들은 서로 교차하지 않으므로 소정리 2에 의해 상수 시간에 가장 가까이 있는 에지를 찾을 수 있다. 단계 4는 소정리 1, 3, 4에 의해 상수 시간에 수행될 수 있다. 따라서, 정리 1이 성립한다. (끝)

4 N×N RMESH 알고리즘

이제, N×N 크기의 RMESH에서 상수 시간에 가시성 다각형을 구하는 알고리즘을 살펴보자. 이 알고리즘의 기본 아이디어는 다각형 P를 구성하는 N개의 에지들을 $\sqrt{N}$ 개의 에지들로 구성된 집합으로 분할한 다음, 각각 에지 집합에 대해 알고리즘 1로 가시 영역 체인을 구하는 것이다. 전처리 과정을 거치지 않은 경우는 점 q를 끝 점으로 하여 그은 반직선과 P의 경계선이 최대 N 개의 점에서 만날 수 있지만, 전처리 과정을 거치고 나면 기껏해야 $\sqrt{N}$ 개의 점들만 만나게 되어 다각형 경계선의 구성 형태가 단순화됨을 알 수 있다. 다음의 알고리즘 2는 가시성 다각형을 구하는 N×N RMESH 알고리즘이다. 알고리즘이 시작되기 전의 초기 조건과 종결 상태는 알고리즘 1과 동일하다.

알고리즘 2

1. P의 에지 집합을 $\sqrt{N}$ 개의 그룹으로 분할한다. 즉, RMESH RM을 $\sqrt{N} \times N$크기의 부메쉬 RM_k, $k = 0, 1, \cdots, \sqrt{N}-1$,로 분할하여, 각 부메쉬의 0번째 열에 각각 $\sqrt{N}$개의 에지들을 배치한다.
2. 각 부메쉬 RM_k는 알고리즘 1을 이용해 $\sqrt{N}$ 개의 에지들에 대해 점 q로부터의 가시성 다각형을 구한다.
3. $\sqrt{N}$ 개의 가시성 다각형의 에지들을 RMESH RM의 0번째 열에 배치한 후, 각 정점들을 점 q를 원점으로 하여 각도에 따라 정렬한 후 다시 0번째 열에 배치한다.
4. 정렬된 정점 리스트를 $(v_0, v_1, \cdots, v_{N-1})$이라고 하자. RMESH RM을 $\sqrt{N} \times N$ 크기의 부메쉬 RM_k로 다시 분할한다. 그러면, 각 부메쉬의 0번째 열에는 $\sqrt{N}$ 개의 정점들 $(v_{k\sqrt{N}}, v_{k\sqrt{N}+1}, \cdots, v_{(k+1)\sqrt{N}-1})$이 배치된다, $k = 0, 1, \cdots, \sqrt{N}-1$. 정점을 가진 각 프로세서는 이 정점에 인접한 두 에지를 함께 보유한다.
5. 부메쉬 RM_{2k}, RM_{2k+1}을 합친 부메쉬를 2-RM_k라고 하자. 따라서, 2-RM_k의 크기는 $2 \cdot \sqrt{N} \times N$이 된다. 각 부메쉬 2-$RM_k$는 다음을 수행한다.

   for t ← 2k **to** 2k+1 **do**

   5.1 2-RM_k는 RM_t가 보유하고 있는 M 개의 에지들을 0번째 열에 배치한다, 여기서 M은 $2\sqrt{N}$ 이하이다. (소정리 5 참조)

   5.2 2-RM_k는 $2\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ 크기의 부메쉬 $R_{k,h}$, $h = v_{t\sqrt{N}}, \cdots, v_{(t+1)\sqrt{N}-1}$.로 분할하고, 각 부메쉬 $R_{k,h}$의 0번째 열에 M 개의 에지를 배치한다,

   5.3 각 부메쉬 $R_{k,h}$는 각 섹터 $S_{t,h} = (v_h, q, v_{h+1})$에 포함되는 에지들 중에서 q에 가장 가까운 선분(에지)를 찾는다.

   5.4 각 섹터별로 구한 선분들을 2-RM_k의 0번째 열에 배치한 다음 하나의 연결된 가시 체인을 구해 RM_t의 0번째 열에 배치한다.

   end for
6. RM은 각 부메쉬 RM_k, $k = 0, 1, \cdots, \sqrt{N}-1$,에 저장된 가시 체인들로 구성되는 가시성 다각형의 에지들을 RM의 0번째 열에 차례대로 배치하고 종료한다.

알고리즘 2의 단계 5.1에서 RM_t가 보유하고 있는 에지의 개수에 대한 내용을 소정리 5에서 증명한다.

소정리 5. RM_t가 보유하고 있는 에지들의 개수는 기껏해야 $2\sqrt{N}$개이다.

증명. RM_t는 섹터 $S_t = (v_{t\sqrt{N}}, q, v_{(t+1)\sqrt{N}-1})$에 포함된 정점들을 보유하고 있다(그림 2 참조). 각 정점은 양쪽에 하나씩 두 개의 에지에 인접하다. 각 정점에서 반시계방향으로 인접한 에지의 개수를 계산해 보자. 전처리 과정에서 나온 가시 체인의 개수가 $\sqrt{N}$ 개 이므로, 섹터 S_t의 아래 경계선과 가시 체인의 에지들과의 교차점(정점 포함)의 수는 $\sqrt{N}$ 이다. 그리고 섹터 내부에 $\sqrt{N}-1$개의 정점이 있다. 따라서, 교차점 및 정점의 개수는 모두 $2\sqrt{N}-1$ 이다. 각 교차점 및 정점마다 하나씩 인접한 에지가 있으므로, 섹터 S_t에는 모두 $2\sqrt{N}-1$ 개의 에지가 있다. (끝)

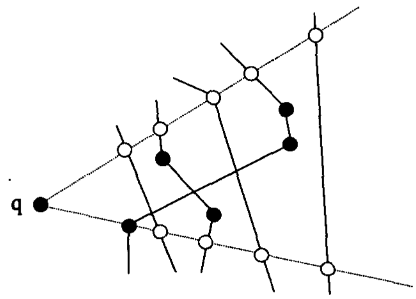

그림 2. 소정리 5의 증명

정리 2. 알고리즘 2는 모두 N개의 에지로 구성된 구멍이 있는 다각형에서 한 점 q로부터의 가시성 다각형을 $N \times N$ RMESH에서 상수 시간에 구한다.

증명. 소정리들과 정리 1의 증명을 이용하면 정리 2를 증명할 수 있다. (끝)

참 고 문 헌

[1] J.-W. Jang, M. Nigam, V. K. Prasanna, and S. Sahni, Constant time algorithms for computational geometry on the reconfigureable Mesh, IEEE Trans. on Parallel and Distr. Systems, Vol. 8, No. 1, 1997, 1 - 12.

[2] R. Miller, V. K. Prasannar Kumar, D. Reisis, and Q. Stout, Meshes with Reconfigurable Buses, Proc. 5th MIT Conf. on Adv. Res. in VLSI, 1988, 163-178.

[3] S. Suri and J. O'Rourke, Worst-case optimal al gorithms for constructing visibility polygons with holes, Proc. 2nd ACM Symp. Comp. Geom., 1986, 14-23.