Gaussian 곡률 오차 추정을 이용한 Mesh 간략화

임수일　김선정　김창헌
고려대학교 컴퓨터학과

Gaussian Curvature Error Estimation for Mesh Simplification

Sooil Lim　Sun-Jeong Kim　Chang-Hun Kim
Department of Computer Science & Engineering, Korea University

요약

본 논문은 mesh 간략화를 위한 새로운 Gaussian 곡률 오차 추정 방법을 제안한다 Gaussian 곡률은 임의의 형상을 갖는 삼각화 된 다면체 표면에 대하여 위상과 기하학적 정보를 angle 과 face 의 관계로 정형화하여, vertex 에 관한 곡률로 근사하여 표현한다. 간략화 방법은 지역적 형상으로부터 전체적인 형상을 추정한 후, 적절한 curvature criteria 로 간략화가 될 vertex 를 선택하고 제거한다. 제거된 vertex 에 의해 생성된 hole 은 곡률에 기반하여 삼각화하고 곡률이 변화되는 vertex 들의 Gaussian 곡률 오차를 계산한다. 각 간략화 level 마다 최대 Gaussian 곡률 오차를 계산하므로, 사용자는 Gaussian 곡률 오차 추정으로 원하는 간략화 level 을 지정할 수 있다. 또한 주어진 오차 안에서 vertex 뿐만 아니라 edge 나 face 의 제거로, 간략화 되는 영역을 확산시켜 필요한 위상과 기하학적 정보를 유지하는 간략화를 할 수 있다.

1 서론

Range scanner 를 이용한 기하학적 모델링에서는 range image 를 reconstruction 하여 삼각화 된 다면체 표면으로 임의의 형상을 가지는 물체를 표현한다. 다면체의 표면의 특징은 표면 곡률로 설명할 수 있으나, 정형화와 근사가 충분히 되지 않아 간략화에 사용되기 용이하지 않았고[5,15], 응용 분야에 따라서도 표면 곡률과 곡률 근사는 충분하게 적용되어 사용되지 못하고 있다[7,10]. 간략화의 대부분은 전체적인 형상의 정확성에 주안점을 두고 있으며 표면의 불연속적인 특징들의 표현이 부족하여 곡률 근사에 의한 feature edge 의 유지와 구조적 조직성이 설명되지 않았다[4,8,14]. 또한, 다른 간략화 방법 중에서는 range scanner 의 불가피한 부정확성으로 형상의 위상과 기하 정보는 정확한 수치해석적 model fitting 에 의존하기 어렵다[6]. Gaussian 곡률 근사와 boundary 및 feature edge 의 적절한 표현은 위상과 기하학적 정보를 충분히 사용하여 나타낼 수 있으며, 곡률에 의한 삼각화는 간략화 되는 삼각형에 대해 곡률을 최대로 유지할 수 있는 edge 들의 형태를 결정할 수 있다. 또한 Gaussian 곡률 오차 추정을 이용한 mesh 간략화는 parameterization 과[12] multitriangulation[14] 그리고 wavelet 과 subdivision 을 사용하는 multiresolution modeling 에[3] 쉽게 적용된다. 본 논문은 Gaussian 곡률을 정확하게 근사하고, 그 곡률에 기반하여 간략화 및 곡률 오차를 추정하여 간략화 과정에서 곡률을 최대로 유지하며, 곡률 오차를 이용하여 간략화 level 조정이 가능하다.

2 Gaussian 곡률 근사

임의의 형상을 나타내는 다면체의 표면의 3D mesh 는 piecewise linear 한 삼각형 mesh 의 표현이다. 이것은 simplicial complex 로서 그 위상과 기하학적 구체화로 vertex, edge, face 와 그들의 neighborhood 등으로 기술된다[10,12] 한 개의 face 로 연결된 edge 를 boundary edge, 두개의 face 로 연결된 edge 를 surface edge 라 하고, 각각 그 위에 있는 vertex 를 boundary vertex, surface vertex 라 부른다. 표면은 boundary edge 의 유무로 bordered 와 closed surface 로 구분한다.

2.1 Gaussian 곡률

한 vertex 의 Gaussian 곡률은 그 vertex 를 연결하는 edge 에 있는 angle 과 face 와 관계가 있다[1]. 미분 기하[13]의 Guass-Bonnett theorem 에 의하면

$$\sum_{i=0}^{k}\int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g\,dt + \iint_X K\,dM + \sum_{i=0}^{k}\theta_i = 2\pi \tag{1}$$

여기서 k_g 는 geodesic 곡률이고 K 는 Guassian 곡률, $X\cdot R \rightarrow M$ 는 mapping function, θ_i 는 경계의 외각이다. 주어진 경계의 geodesic 곡률은 영이므로

$$\iint_X K\,dM = 2\pi - \sum_{i=0}^{k}\theta_i \tag{2}$$

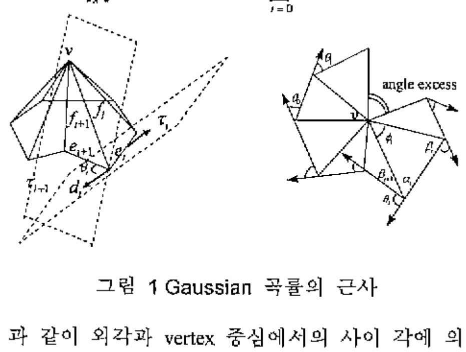


그림 1 Gaussian 곡률의 근사

그림 1 과 같이 외각과 vertex 중심에서의 사이 각에 의해

$$\iint_X K\,dM = 2\pi - \sum_{i=0}^{k}\phi_i \tag{3}$$

한편, 표면에 대한 적분을 vertex 를 이웃하는 face 들의 면적의 합으로 볼 수 있으므로

$$AK = 2\pi - \sum_{i=0}^{k}\phi_i \tag{4}$$

여기서 $A = \sum_{0}^{k} f_i$ 는 각 삼각형 면적들의 합이다.

2.2 Boundary Vertex 에서의 곡률 근사

한 vertex 의 모든 이웃의 face 가 둘러쌓고 있는지 확인하는 boundary edge 검사를 하면 bordered surface 를 찾을 수 있다. boundary vertex 의 곡률은 수평에 대한 boundary edge 가 이루는 각의 차이와 boundary 에서 표면쪽으로의 영역이 만들어내는 삼각형들의 합으로 Guassian 곡률 근사를 할 수 있고, 그 식은 다음과 같다.

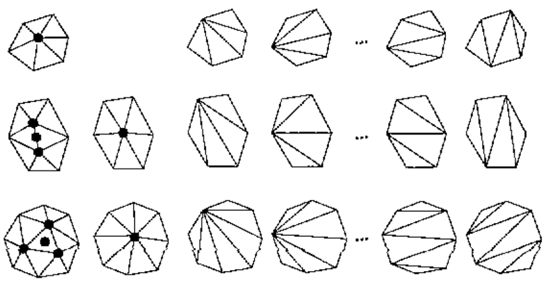
$$AK = \pi - \sum_{i=0}^{k} \phi_i \qquad (5)$$

2.3 High Curvature and Feature Edge

삼각화 된 다면체 표면은 매끄러운 표면들의 이산적 표현이다. 이러한 이산적인 자료로부터 원래의 표면의 특징을 구분하는 것은 쉽지 않다 High curvature 의 vertex 나 불연속선을 구분하는 것은 일정 값 이상의 Gaussian 곡률이나 평균 곡률과 이면각으로 나타낼 수 있다. 이것들은 curvature criteria 에 의하여 간략화 될 때 변화하게 된다. 그러므로 이 변화를 이용하여 오차로 적용하면 형상을 적절하게 추정하고 관리할 수 있다. 다면체의 표면을 표현하는 과도한 점들은 형상을 보존하면서 LOD(Level of Detail)를 나타낼 때까지의 점들로 간략화 할 수 있다. 임의로 결정하는 이면각 이상에서의 edge 들을 feature edge 라 하고, feature edge 는 Gaussian 곡률의 값을 감소시키므로 이면각을 이루는 각의 밀각을 계산하여 그 곡률에서 간략화 하여야 한다 한 vertex 에서 이면각이 많이 나타나면 날수록, 이면각의 밀각이 크면 클수록 Gaussian 곡률은 달라진다 그러므로 이면각의 결정은 반복하여 적절한 값을 취하고 feature edge 는 surface edge 에서 분리하여 boundary edge 와 같이 취급하여 간략화 한다.

2.4 Gaussian 곡률 오차와 간략화

간략화는 그 대상과 방법이 다양하며 많은 고려 사항들에 의하여 성능이 결정된다[14]. 과도한 vertex 들의 간략화는 곡률의 오차가 심하게 변화하기 전 단계까지 근사 곡률에 사용되는 삼각형 면적의 합을 일정 비율로 유지하고 그 후는 선형적으로 변경시킨다 본 논문에서는 먼저 boundary 와 feature edge 를 확인하고 Gaussian 근사 곡률을 정렬하여 vertex collapse 를[15] 하며 삼각화는 최소 근사 곡률을 이용하여 edge 를 연결하고 주어진 오차가 되면 종료한다. 한편, boundary 및 feature edge 내의 이웃 vertex 가 collapse 되면 boundary 및 feature edge 를 간략화 한다.



(점 : 대표 vertex, edge 에서는 중점, face 에서는 무게 중심)
그림 2 간략화 속도의 향상을 위한 곡률 오차의 활용

간략화의 속도를 향상시키기 위해서는 vertex, edge, face 의 이웃을 곡률 오차로 확인하고 이를 대표하는 vertex 에 대해 vertex 의 곡률을 계산한다. 작은 곡률과 오차를 갖는 vertex 나, edge, face 는 제거되고, hole 은 곡률을 고려하여 삼각화 한다. 그림 2 와 같이 edge 의 경우는 중점을, face 는 무게 중심의 vertex 가 대표 vertex 가 될 수 있고 이 vertex 에 대해 곡률을 계산하여 edge 나 face 를 제거하므로 보다 많은 face 들을 간략화 할 수 있다.

3 곡률에 기반한 삼각화

vertex collapse 하여 그 vertex 가 없는 다각형의 영역을 만들면 그 이웃의 vertex 들로서 연결되는 edge 로서 그 vertex 의 곡률이 표현되었다고 볼 수 있다 edge flip[2]이나 다른 간략화에 비해서 새로이 연결되는 edge 를, 간략화 되는 vertex 를 경유하는 최소의 곡률을 가지는 vertex 할당한다. 그리하여 각과 면적으로 나타나는 수정된 곡률들을 정렬하여, 간략화 되었을 때 최대한으로 곡률이 유지되도록 최소 곡률을 확인하는 연결을 한다. 반복해서 모든 edge 들을 연결하고 다음 간략화 level 을 준비한다. 재삼각화 하려는 다각형의 영역이 concave 할 때의 삼각화를 하는 방법과[16] convex 로 나누는 local greedy algorithm[9]을 복합 수정하여 사용하고 최소의 convex 의 다각형이 되도록 나누고, 그 convex 다각형들에서 최소 곡률 근사에 의한 edge 의 연결 방법을 반복한다.

3.1 다각형 영역의 구별과 edge 의 연결

① 간략화 기준에 의하여 한 vertex 를 제거하고 다각형의 영역을 만든다.
② convex 다각형 검사를 하여 convex 이면 최소 곡률 근사에 의한 edge 의 연결을 한다.
③ convex 가 아닌 concave 일 때에는 concave 를 삼각화 한 것과 수정된 local greedy algorithm 을 사용하여 이웃하는 face 를 하나씩 추가하면서 convex 다각형화를 한다.
④ 만들어진 각각의 convex 다각형에서 최소 곡률 근사에 의한 edge 의 연결을 한다

3.2 최소 곡률 근사에 의한 edge 의 연결

① 제거되는 1 개의 vertex 와 이웃의 2 개의 vertex 를 수정된 곡률 근사를 사용하여 정렬하고 최소 곡률을 가지는 edge 부터 그림 3 와 같이 연결한다
② 같은 곡률을 가지는 edge 는 vertex 번호순으로 한다.
③ 남은 다각형에서 1 을 다시 하고 삼각형인지 확인하고 끝낸다

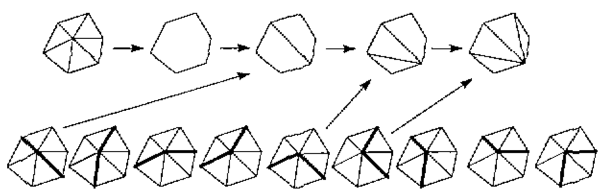
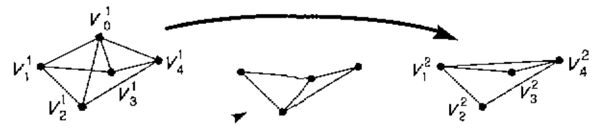


그림 3 최소 곡률 근사에 의한 edge 의 연결

4. Gaussian 곡률 오차 추정

곡률의 측정이 정확하면 할수록 오차의 정도로 직접 사용할 수 있다 간략화 후의 곡률 변화는 각과 그 면적의 개별적 차이로 간략화 제어에 중요한 척도로 사용될 수 있다.



(실선 : 제안 방법, 점선 : 기존 방법)
그림 4 곡률을 사용한 곡률 오차

곡률 근사에 의한 vertex 에서의 각과 면적의 변화를 나타내면. 한 vertex 의 간략화는 그 vertex 의 곡률이 이웃하는 다른 vertex 로서 대변할 수 있으므로 이웃하는 vertex 의 곡률로 나누어진다. 그림 4 의 예에서 보는 것처럼 이때의 곡률 오차는

$$Kv_0^1 = \frac{2\pi - (\angle v_1v_0v_2 + \angle v_1v_0v_3 + \angle v_2v_0v_4 + \angle v_3v_0v_4)}{\Delta v_1v_0v_2 + \Delta v_1v_0v_3 + \Delta v_2v_0v_4 + \Delta v_3v_0v_4}$$

$$Kv_1^1 = \frac{2\pi - \angle v_{p1} - (\angle v_0v_1v_2 + \angle v_0v_1v_3)}{\Delta v_{p1} + \Delta v_0v_1v_2 + \Delta v_0v_1v_3}$$

$$Kv_2^1 = \frac{2\pi - \angle v_{p2} - (\angle v_0v_2v_1 + \angle v_0v_2v_4)}{\Delta v_{p2} + \Delta v_0v_2v_1 + \Delta v_0v_2v_4}$$

$$Kv_3^1 = \frac{2\pi - \angle v_{p3} - (\angle v_0v_3v_1 + \angle v_0v_3v_4)}{\Delta v_{p3} + \Delta v_0v_3v_1 + \Delta v_0v_3v_4}$$

$$Kv_4^1 = \frac{2\pi - \angle v_{p4} - (\angle v_0v_4v_2 + \angle v_0v_4v_3)}{\Delta v_{p4} + \Delta v_0v_4v_2 + \Delta v_0v_4v_3} \qquad (6)$$

$$Kv_1^2 = \frac{2\pi - \angle v_{p1} - (\angle v_2v_1v_4 + \angle v_3v_1v_4)}{\Delta v_{p1} + \Delta v_2v_1v_4 + \Delta v_3v_1v_4}$$

$$Kv_2^2 = \frac{2\pi - \angle v_{p2} - (\angle v_1v_2v_4)}{\Delta v_{p2} + \Delta v_1v_2v_4}$$

$$Kv_3^2 = \frac{2\pi - \angle v_{p3} - (\angle v_1v_3v_4)}{\Delta v_{p3} + \Delta v_1v_3v_4}$$

$$Kv_4^2 = \frac{2\pi - \angle v_{p4} - (\angle v_1v_4v_2 + \angle v_1v_4v_3)}{\Delta v_{p4} + \Delta v_1v_4v_2 + \Delta v_1v_4v_3}$$

Kv_i^j 는 vertex i 와 level j 에서의 근사 곡률, Kv_0^1 는 vertex 0, level 1 에서의 근사 곡률이고 제거되는 vertex 이다. $\angle v_{pi}, \Delta v_{pi}$ 는 vertex i 에서 그 이전의 각과 면적이다. level 1 과 level 2 사이의 곡률 오차를 $\varepsilon_{12} = \max \mathbf{A}$ 라고 하면 여기서

$$\mathbf{A} = \{|Kv_1^1 - Kv_1^2|, |Kv_2^1 - Kv_2^2|, |Kv_3^1 - Kv_3^2|, |Kv_4^1 - Kv_4^2|\} \qquad (7)$$

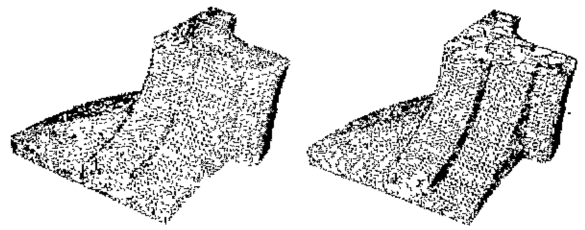
그러므로 전체의 곡률 오차는 다음과 같이 된다.

$$\varepsilon_l = \varepsilon_{1l} = \frac{\max|Kv_i^1 - Kv_i^n|}{\max(Kv_i^1, Kv_i^n)} \qquad (8)$$

간략화 정도를 확인하는 척도로서 그 기하학적 모양과 유사한 정도를 표시하는 Hausdorff distance error metric 을 사용하면 전체적으로 간략화 되는 vertex 들을 확인해야 하며 지역적으로는 관련 있는 vertex 의 half angle plan[11]을 찾아야 한다. 그러나 Gaussian 곡률 오차 추정을 사용하면 간략화에서 영향을 받는 vertex 들과 간략화 정도를 동시에 알 수 있다.

5 결론 및 향후 연구

Mesh 표면을 Gaussian 곡률로 근사 시키고, 곡률에 따라 간략화 될 vertex 를 선택한 다음. 제거된 vertex 에 생성된 hole 은 곡률을 최대로 유지할 수 있도록 edge 를 선택하여 삼각화 하면 최대로 곡률을 유지하며 간략화가 가능하다. 또한 그림 5 에서 보는 것처럼 곡률이 작은 vertex 가 먼저 제거되므로 간략화 level 에서 발생되는 곡률 오차를 추정하여 간략화 정도를 제어할 수 있다 그 결과 곡률 오차에 기반하여 남아있는 vertex 에 대한 적절한 edge 의 연결이 간략화 지역을 간단하게 확대시킬 수 있어서 원래 형상의 위상과 기하학적 정보를 간략화 각 level 에서도 충실히 보존하며 간략화 속도 향상 및 제어될 수 있다. 향후 연구는 한 vertex 의 이면각과 edge 를 사용한 평균 곡률 및 보존 곡률의 근사, 곡률 정렬의 재조정 최소화를 통하여 정밀도를 증가 시키고 LOD 의 시작점을 자동으로 확인하여 간략화의 선형적 제어를 한다. 또한, Hausdorff distance 와 비교하여 곡률 오차 추정만으로도 우수한 다면체의 표면 간략화임을 보인다.



(a) (b)

(a) original(12946 faces), (b) simplification 10%(11664 faces)
그림 5 간략화의 결과

6 참고 문헌

[1] V. Borrelli. Courbures Discretes. Master's thesis, Universite Claude Bernard-Lyon I, 1993

[2] A. Ciampalini, P Cignoni, C. Montani, and R Scopigno. Multiresolution decimation based on global error Technical Report C96-021, CNUCE-C.N.R., Pisa, Italy, July 1996

[3] M. Eck, T DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuetzle. Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes. Computer Graphics(SIGGRPH '95 Proceedings), 173-182, August 1995.

[4] C. Erikson. Polygonal Simplification: An Overview. Technical Report TR-96-016, University of North Carolina - Chapel Hill, 1996

[5] B. Falcidieno and M Spagnuolo. Geometric Reasoning for the Extraction of Surface Shape Properties. In D. Thalmann and N. M. Thalmann, editors, Communication with Virtual Worlds(Proc CGI'93), pages 166-178. Springer-Verlag, 1993

[6] R. E. Fayek. 3D Surface Modeling Using Hierarchical Topographic Triangular Meshes. Ph. D. Thesis, University of Waterloo, 1996.

[7] B. Hamann, A Data Reduction Scheme for Triangulated Surfaces. Computer Aided Geometric Design, 11(2):197-214, April 1994.

[8] P S. Heckbert and M. Garland. Survey of Polygonal Surface Simplification Algorithms. Technical Report, Carnegie Mellon University, 1997.

[9] P, Hinker and C. Hansen. Geometric Optimization In Proc. Visualization '93, pages 189-195, San Jose, CA, October 1993.

[10] H. Hoppe Surface Reconstruction from Unorganized Points, Ph. D. Thesis, University of Washington, 1994.

[11] R Klein, G. Liebich, and W. Strasser Mesh Reduction with Error Control. In R. Yagel, editor, Visualization 96. ACM, November 1996.

[12] A W. F. Lee, W Sweldens, P Schroeder, L. Cowsar, and D. Dobkin MAPS: Multiresolution Adaptive Parameterization of Surfaces, SIGGRAPH '98, 1998

[13] B. O'Neill. Elementary Differential Geometry Second Edition, Academic Press, USA, 1997

[14] E Puppo and R. Scopigno. Simplification, LOD and Multiresolution - Principles and Applications. In EUROGRAPHICS'97 Tutorial Notes(ISSN 1017-4656). Eurographics Association, Aire-la-Ville(CH). 1997 (PS97 TN4).

[15] W. J Schroeder, J. A. Zarge, and W E. Lorensen. Decimation of Triangle Meshes Computer Graphics (SIGGRAPH '92 Proceedings). 26(2):65-70, July 1992.

[16] P. Veron and J. C. Leon. Static polyhedron simplification using error measurements Computer-Aided Design, Vol. 29. No. 4, pp. 287-298, Elsevier Science Ltd., 1997.