큐를 활용한 선형고전논리 회로의 설계

신홍철 · 조혜원
중앙대학교 수학과

A Design of Linear Categorical Circuits with Queues

Shin Hong-Choll · Cho Hye-Won
Department of Mathematics,Chung-Ang University

요 약

선형논리는 Girard에 의해 소개되었으며, 고전논리의 확장이다. 최근에는 형할당 시스템으로 $\lambda\mu$-논리의 연구가 성행중이며 함수프로그래밍 언어가 발전할 수 있는 계기가 되었다.

$\lambda\mu$-논리에서의 계산은 형추론 연역과정이다. $\lambda\mu$-논리의 카테고리로의 해석 $\lambda\mu^{*}$-논리를 이용하여 분배카테고리를 일차적으로 구성하고 함수의 흐름을 구체적으로 나타내는 준함수로써 회로 카테고리Cir(CLL*)를 설계하였다.

특히 전산처리에서 흔히 사용하는 큐(queues)로써 선형고전논리의 기능을 온전히 발휘할수 있음을 지적한다.

1. $\lambda^{\rightarrow}$논리에 대한 선형고전논리

선형고전논리에 대하여 간단히 요약해보자. 고전논리에서의 논리곱($\wedge$)은 $\otimes$(times)와 &(with), 논리합($\vee$)은 $\oplus$(plus)와 ⓟ(par)로 나누어 생각한다. 이 두 경우는 선형부정($-^{\perp}$) (nil $^{\perp}$)에대하여 서로 쌍대관계를 이루고 있나. $\otimes$, &, $\oplus$, ⓟ 에 대한 항등원과 같은 역할로써 I, t, f, $\perp$들을 단위원(unit)으로 갖는다. 그리고 선형고전논리의 특징인 !(of course)에 대한 쌍대관계로써 양상기호 ?(why not)이 도입된다. 다음은 쌍대관계와 선형함의를 정의한 것이다.

$$
\begin{aligned}
(\alpha^{\perp})^{\perp} &\equiv \alpha \\
(\alpha \otimes \beta)^{\perp} &\equiv \alpha^{\perp} \textcircled{p}\, \beta^{\perp} \\
(\alpha\, \textcircled{p}\, \beta)^{\perp} &\equiv \alpha^{\perp} \otimes \beta^{\perp} \\
(\alpha \oplus \beta)^{\perp} &\equiv \alpha^{\perp} \,\&\, \beta^{\perp} \\
(\alpha \,\&\, \beta)^{\perp} &\equiv \alpha^{\perp} \oplus \beta^{\perp} \\
(!\alpha)^{\perp} &\equiv ?\alpha^{\perp} \\
(?\alpha)^{\perp} &\equiv !\alpha^{\perp} \\
I^{\perp} &\equiv \perp \\
f^{\perp} &\equiv t
\end{aligned}
$$

$$\alpha \multimap \beta \equiv \alpha^{\perp} \textcircled{p}\, \beta\,.$$

λ^{-}논리를 이용한 선형고전논리의 체계 즉, $\lambda\mu$-논리를 다음과 같은 추론법칙을 갖는다.

(Identity) $\dfrac{}{x:\alpha \blacktriangleright x:\alpha}$

$(\multimap\iota)$ $\dfrac{\Gamma, x:\alpha \blacktriangleright M:\beta, \Sigma}{\Gamma \blacktriangleright \lambda x.\alpha.M:\alpha\multimap\beta, \Sigma}$

$(\multimap\mathrm{x})$ $\dfrac{\Gamma \blacktriangleright M:\alpha\multimap\beta, \Sigma \quad \Delta \blacktriangleright N:\beta, \Sigma'}{\Gamma, \Delta \blacktriangleright MN:\alpha, \Sigma, \Sigma'}$

$(\mathrm{I}\iota)$ $\dfrac{}{\blacktriangleright *:I}$

$(\mathrm{I}\varepsilon)$ $\dfrac{\Gamma \blacktriangleright M.I, \Sigma \quad \Delta \blacktriangleright N:\beta, \Sigma'}{\Gamma, \Delta \blacktriangleright \textit{ let } M \textit{ be } * \textit{ in } N:\beta, \Sigma, \Sigma'}$

$(\otimes\iota)$ $\dfrac{\Gamma \blacktriangleright M:\alpha, \Sigma \quad \Delta \blacktriangleright N:\beta, \Sigma'}{\Gamma, \Delta \blacktriangleright M \otimes N:\alpha \otimes \beta, \Sigma, \Sigma}$

$(\otimes\varepsilon)$ $\dfrac{\Gamma \blacktriangleright M:\alpha \otimes \beta, \Sigma \quad \Delta, x:\alpha, y:\beta \blacktriangleright N:\gamma, \Sigma'}{\Gamma, \Delta \blacktriangleright \textit{let } M \textit{ be } x \otimes y \textit{ in } N:\gamma, \Sigma, \Sigma}$

$(\&\iota)$ $\dfrac{\Gamma \blacktriangleright M:\alpha, \Sigma \quad \Delta \blacktriangleright N:\beta, \Sigma}{\Gamma \blacktriangleright \langle M, N\rangle:\alpha\&\beta, \Sigma}$

$(\&\varepsilon\text{-}1)$ $\dfrac{\Gamma \blacktriangleright M:\alpha\&\beta, \Sigma}{\Gamma \blacktriangleright fst(M):\alpha, \Sigma}$ $\quad$ $(\&\varepsilon\text{-}2)$ $\dfrac{\Gamma \blacktriangleright M:\alpha\&\beta, \Sigma}{\Gamma \blacktriangleright snd(M):\beta, \Sigma}$

$(\oplus\iota\text{-}1)$ $\dfrac{\Gamma \blacktriangleright M:\alpha, \Sigma}{\Gamma \blacktriangleright inl(M):\alpha \oplus \beta, \Sigma}$ $\quad$ $(\oplus\iota\text{-}2)$ $\dfrac{\Gamma \blacktriangleright M:\beta, \Sigma}{\Gamma \blacktriangleright inr(M):\alpha \oplus \beta, \Sigma}$

$(\oplus\varepsilon)$

$$\frac{\Gamma \blacktriangleright M{:}\alpha \oplus \beta, \Sigma \quad \Delta, x{:}M \blacktriangleright N{:}\beta, \Sigma' \quad \Delta, y{:}N \blacktriangleright P{:}\gamma, \Sigma'}{\Gamma, \Delta \blacktriangleright case\ M\ of\ inl(x) \rightarrow N \,\|\, inr(y) \rightarrow P{:}\gamma, \Sigma, \Sigma'}$$

(Promotion)

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \blacktriangleright M_1{:}!\alpha_1, \Sigma_1 \quad \Delta_1 \blacktriangleright N_1{:}!(!\beta_1 \multimap \bot), \Pi_1 \\ \Gamma_\beta \blacktriangleright M_\beta{:}!\alpha_\beta, \Sigma_\beta \quad \Delta_\alpha \blacktriangleright N_\alpha{:}!(!\beta_\alpha \multimap \bot), \Pi_\alpha \\ x_1{:}!\alpha_1, \cdots, x_\beta{:}!\alpha_1 \blacktriangleright P{:}\gamma, a_1{:}!\beta_1 \multimap \bot, \cdots, a_\alpha{:}!\beta_\alpha \multimap \bot\end{array}}{\vec{\Gamma}, \vec{\Delta} \blacktriangleright promote\ \vec{\alpha} \mid \vec{\beta}\ for\ \vec{x} \mid \vec{a}\ in\ !P{:}\gamma, \vec{\Gamma}, \vec{\Delta}}$$

(Derelict) $$\frac{\Gamma \blacktriangleright M{:}!\alpha, \Sigma}{\Gamma \blacktriangleright derelict(M){:}\alpha, \Sigma}$$

(Contraction) $$\frac{\Gamma \blacktriangleright M{:}!\alpha, \Sigma \quad \Delta, x{:}!\alpha, y{:}!\alpha \blacktriangleright N{:}\beta, \Sigma'}{\Gamma, \Delta \blacktriangleright copy\ M\ as\ x, y\ in\ N{:}\beta, \Sigma, \Sigma'}$$

$(\bot\iota)$ $$\frac{\Gamma \blacktriangleright M{:}\alpha, \Sigma}{\Gamma \blacktriangleright unit_a^{\phi}(M){:}\bot, a\,\alpha, \Sigma}$$

$(\bot\varepsilon)$ $$\frac{\Gamma \blacktriangleright M{:}\bot, a{:}\alpha, \Sigma}{\Gamma \blacktriangleright deunit_a^{\phi}(M){:}\alpha, \Sigma}$$

2. 선형 $\lambda\mu$-논리를 위한 준함수(Pseudo function 또는 functional process)

분배카테고리는 곱(Products)과 합(Sums)을 기초로하여 다음의 기본적인 애로우들을 만족한다.

Identity	$I_X : X \rightarrow X$
	$!_X : O \rightarrow X$
	$¡_X : X \rightarrow I$
Projection	$X \xleftarrow{proj_1} X \times Y \xrightarrow{proj_2} Y$
Injection	$X \xrightarrow{inj_1} X + Y \xleftarrow{inj_2} Y$
Diagonal function	$\triangle : X \rightarrow X \times X$
Codiagonal function	$\triangledown : X + X \rightarrow X$.

위의 애로우들로 다시 다음의 합성애로우들을 얻게되며 분배카테고리에서 활용 된다.

$$\phi \times \phi : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$$
$$\phi + \phi : X_1 + X_2 \rightarrow Y_1 + Y_2$$
$$twist_{X \cdot Y} : X \times Y \rightarrow Y \times X$$
$$twist_{X+Y} : X + Y \rightarrow Y + X$$

[정의 2.1] 분배카테고리란, 합과 곱의 성질을 가지며 다음의 두 동형사상을 만족하는 카테고리이다 즉,

$$\delta : X \times Y + X \times Z \rightarrow X \times (Y + Z)$$
$$\alpha : O \rightarrow X \times O$$

분배카테고리에서, 집합의 큐(queue) Q 는

$$\begin{array}{ccccc} I + X \cdot Q \rightarrow Q & \Longrightarrow & Q & \Longrightarrow & Q \rightarrow I + X \times Q \\ \Downarrow & & & & \Uparrow \\ \end{array}$$
$$I - X \times (I + X \times Q) \Rightarrow I + X + X \times Q \times X \Rightarrow I + (I + X \times Q) \times X$$

를 만족하는 연산

$$puch : I + X \times Q \rightarrow Q \text{ 와 } pop : Q \rightarrow I + X \times Q$$

으로 정의된다. 본 논문에서는 큐를 도입과 소거 법칙 즉,

$(\bot\iota)$ $$\frac{\Gamma \blacktriangleright M{:}\alpha, \Sigma}{\Gamma \blacktriangleright unit_a^{\phi}(M){:}\bot, a{:}\alpha, \Sigma}$$

$(\bot\varepsilon)$ $$\frac{\Gamma \blacktriangleright M{:}\bot, a{:}\alpha, \Sigma}{\Gamma \blacktriangleright deunit_a^{\phi}(M)\,\alpha, \Sigma}$$

에 이용한다.

큐에서 $M{:}\alpha$ 를 대기할 때 큐는 리스트 $a = (\alpha, \phi, M)$을 입력하고, $a{:}\alpha$ 를 작동할 때 pop와 $puch$에 의해 필요한 내용을 찾아 원하는 실행을 작동한다. 그래서 $\bot$는 대기(passification)법칙과 작동(activation)법칙에 대하여 큐의 함수를 갖는다.

[정의 2.2] 애로우 $\phi: X + U + Y \rightarrow X + U + Y$ 가 인제션 $j: Y \rightarrow X + U + Y$ 에 대하여 $\phi \circ j = j$ 이면 Y 에서 아이들(Idle)이라 한다. 즉, $y \in Y$ 이면 $\phi(y) = y$ 이다.

[정의 2.3] X 에서 Y 로의 준함수 ϕ 는 $\phi: X \nrightarrow Y$ 라 쓰기로하며, 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $\phi^{n_x}(x) \in Y$ 를 만족하는 자연수 n 이 존재하고, Y 에서 아이들인 애로우

$$\phi: X + U + Y \rightarrow X + U + Y$$

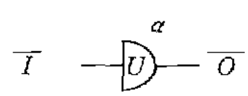
이다. 여기서 U 는 국소상태(Local state)라 한다. 그리고 $\overline{\phi}(x) = \phi^{n_x}(x)$에 의해 정의되는 애로우 $\overline{\phi}: X \rightarrow Y$ 가 존재한다.

3. 회로 카테고리

회로표현 C는 독립적인 입력자원과 출력자원의 나열사이 삽입하여 표시한다. 즉,

$$\overline{I} : \langle \overline{x} C \overline{y} \rangle : \overline{O}.$$

여기서 $C = (U, \alpha)$와 $x_i \in X_i$, $y_i \in Y_i$ 이다.



[정의 3.1] (회로, circuit)

(1) C-회로표현은 다음에 의해 생성된다.

① 영회로, 0 는 형(Type) T 상에서 항등사상인 회로표현이다

② c_1과 c_2이 회로표현일 때 $c_1; c_2$도 회로표현이다.

③ $f \in C$에 대하여 $sig(f) = (\alpha, \beta)$이고 V, W는 각각 형 α, β의 독립적인 자원의 나열이라면 VfW는 회로표현이다.

④ F에 대하여 $sig(F) = (\alpha, \beta)$이고 V, W는 각각 형 α, β의 독립적인 자원의 나열이라면 VFW는 회로표현이다.

(2) 선형논리연산자들은 T 에서 합성형으로 구성된다 (α, β는 T 의 형들이다).

① $\alpha \otimes \beta$는 동일한 두 형의 입력과 출력을 의미한다.

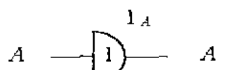
② $\alpha \& \beta$는 두 형의 구성된 배열을 의미한다.

③ $\alpha \oplus \beta$는 서로 다른 두 형의 선택적 배열을 의미한다.

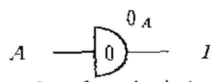
[정의 3.2] (기본회로, primitive circuit)

회로표현이 다음과 같이 분배그래프에 의해 구성될 때 기본회로라고 한다.

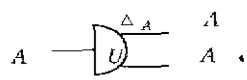
(1) $I(A)$ (Keeping resources), $(1, 1_A): A \rightarrow A$



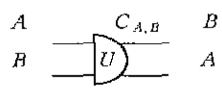
(2) $R(A)$ (Retaining resources), $(0, 0_A): A \rightarrow I$



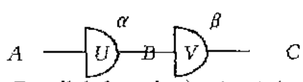
(3) $\Delta(A)$ (Copying function), $(U, \Delta_A): A \rightarrow A \otimes A$



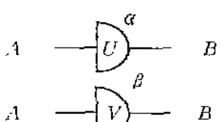
(4) $C(A, B)$ (Exchanging function), $(U, C_{A,B}): A \otimes B \rightarrow B \otimes A$



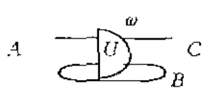
(5) $\alpha;\beta$ (Serial composition), $(S, \gamma)\ (U, \alpha) \cdot (V, \beta)$



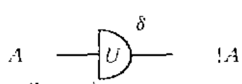
(6) $||(A)$ (Parallel function), $(P, \delta): (U, \alpha) \otimes (V, \beta)$



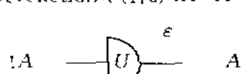
(7) $FB(A, B, C)$ (Feedback operation), $Fbk^{B}_{A,C}(U, \omega) = Fbk^{B}_{A,C}(U, \xi \cdot \tau): A \rightarrow C$



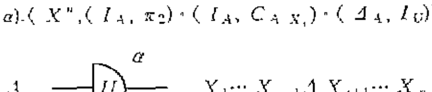
(8) $\delta(A)$ (Promotion), $(1, \delta)\ A \rightarrow !A$



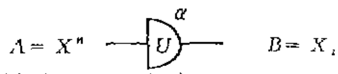
(9) $\varepsilon(A)$ (Dereliction), $(1, \varepsilon)\ !A \rightarrow A$



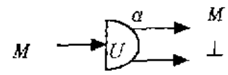
(10) $S(i, A)$ (Store function), $(U, \alpha).(X^n, (I_A, \pi_2) \cdot (I_A, C_{A,X_i}) \cdot (\Delta_A, I_U))\ A \rightarrow B$



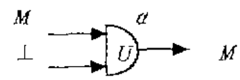
(11) $R(i, A)$ (Read function), $(U, \alpha): (U, (I_A, \pi_2) \cdot (I_A, C_{U,X_i}) \cdot (\Delta_{X_i}, I_U))\ A \rightarrow B$



(12)* $P(\alpha, M)$ (Passification), $(U, \alpha): M \rightarrow M \& \perp$



(13)* $A(\alpha, M)$ (Activation), $(U, \alpha)\ \perp \& M \rightarrow M$



지금까지의 결과로써 다음 정리를 얻을 수 있다.

[정리 3.1] 회로 표현들의 집합은 선형 $\lambda\mu$-논리의 형 할당들이 표현가능함으로써 분배카테고리 Cir(CLL*)의 형태를 이룬다.

자세한 증명과정은 생략하고 결론만 서술해보자. 준함수는 기본회로표현에 의해 표현할 수 있기 때문에 추상(abstraction)은 회로표현의 성분 f 이다. 적용(application)은 입력자원의 적용에 의해 $\langle X{:}\alpha\ f \rangle$형태의 회로표현이다. 항들은 다음과 같이 표현된다.

First projection $fst(X)$: $\alpha = R(1, X)$
Second projection $snd(X)$: $\alpha = R(2, X)$
Left injection $inl(X)$: $\alpha = S(1, X)$
Right injection $inr(X)$: $\alpha = S(2, X)$
Conditional $fst(X)$: $\alpha = R(1, X) \oplus R(2, X)$
Promotion $\delta(A)$
Dereliction $\varepsilon(A)$
Discarding $R(A)$
Duplication $\Delta(A)$
Passification $P(\alpha, M)$
Activation $A(\alpha, M)$

CLL*에서 가정과 결론에 대한 회로표현의 문제점이 제기 될 수 있다 다중가정(multiple assumption)은 곱에 의해 표현되어 각각의 역할을 하지만, 다중결론은 합으로써 표현되며 필요하다면 하나의 식으로 다루어질 수 있다.시킨스들의 추론법칙

$$\frac{A_1, A_2, \cdots, A_n \rightarrow B_1, B_2, \cdots, B_m}{C_1, C_2, \cdots, C_l \rightarrow D_1, D_2, \cdots, D_k}$$

는 $f = (U, \alpha)$, $g = (V, \beta)$ 그리고 $F = (UV, \gamma)$에 대하여 $(\overline{A}f\ \overline{B})F(\overline{C}f\ \overline{D})$형태에 의해

$$\frac{A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n \rightarrow B_1 \& B_2 \& \cdots \& B_m}{C_1 \otimes C_2 \otimes \cdots \otimes C_l \rightarrow D_1 \& D_2 \& \cdots \& D_m}$$

와 같이 표현된다.