퍼지집합을 이용한 퍼지숫자의 비교결과 표현

이 지 형, 이 광 형
305-701 대전시 유성구 구성동 한국과학기술원 전산학과

Representation of comparison results between fuzzy numbers with fuzzy sets

Jee-Hyong Lee, Hyung Lee-Kwang
CS Dept. KAIST Kusong-dong Yusong-gu, Taejon, 305-701, Korea

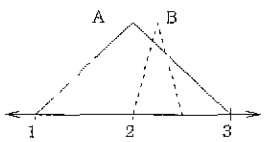
요 약

퍼지숫자는 불명확한 값을 표현하기 때문에, 두 퍼지숫자의 비교결과 역시 불명확한 성질을 갖고 있다. 본 논문에서는 이러한 퍼지숫자의 비교결과에 존재하는 불명확성을 표현하기 위해서, 퍼지 만족도 함수를 제안한다. 퍼지 만족도 함수는 두 퍼지숫자를 비교하여 그 비교결과로 0과 1사이의 퍼지집합을 출력한다. 즉, 어느 숫자가 다른 숫자보다 클(작을) 가능성을 단순히 0과 1사이의 값이 아닌, 퍼지집합으로 표현한다. 퍼지 만족도 함수는 이전에 제안된 만족도 함수로부터 확장되었다. 본 논문에서는 만족도 함수를 간략히 소개하고, 이를 이용하여 퍼지 만족도 함수를 제안하며, 이를 퍼지숫자 비교에 적용한 예를 게시한다

1. 서 론

퍼지숫자(fuzzy number)는 그 동안 많은 분야에 적용되어 왔다. 그 이유는 퍼지숫자가 명확하지 않은 값을 표현하기에 적당하며, 퍼지숫자에 대한 많은 연산이 정의되어 있기 때문이다. 이러한 연산 중에서 두 퍼지숫자의 비교는 매우 중요한데, 그 이유는 두 숫자의 비교는 의사결정에 있어서 가장 기초가 되는 논리연산이기 때문이다

그러나 퍼지숫자의 비교는, 실수의 비교와는 달리 애매모호한 성질을 갖고 있다. 퍼지숫자는 가능성분포로 표현되며, 서로 겹치는 부분이 생길 수 있어 어느 값이 어느 값보다 큰지, 그렇지 않은지 판단하기가 쉽지 않다 그 동안 퍼지숫자의 비교에 관한 많은 연구가 있었는데, 대부분의 제안된 방법은 비교결과로 0과 1사이의 실수를 준다[1][2][4]. 즉, 두 퍼지숫자의 비교에 존재하는 불명확성을 0과 1사이의 값으로 표현한 것이다 그러나 경우에 따라서, 0과 1사이의 숫자는 퍼지숫자 비교에 존재하는 불명확성을 표현하기에 적당하지 않다. 예를 들어 그림1과 같이 두 퍼지숫자 A와 B를 비교할 경우 B가



A=(1,2,3) B=(2.2 2,2,4)

그림 1. 두 퍼지숫자의 비교

A보다 클 가능성을 어느 정도로 해야 할 것인가에 대한 대답은 쉽지 않다. 즉, 두 퍼지숫자의 비교에 존재하는 불명확성으로 인하여 위 그림의 두 퍼지숫자의 비교 결과를 0과 1사이의 하나의 숫자로 표현하는 것은 적절하지 않음을 알 수 있다 따라서, 두 퍼지숫자의 비교결과의 불명확성을 표현할 수 있는 다른 방법이 필요하다.

본 논문에서는 퍼지숫자 비교의 불명확성을 표현하기 위해서, 두 퍼지숫자를 비교한 결과가 0과 1사이에 정의된 퍼지집합인 퍼지 만족도 함수(fuzzy satisfaction function)를 제안한다. 제안하는 퍼지 만족도 함수는 기존의 만족도 함수를 확장하여 정의하였다. 2절에서는 이전에 제인된 만족도 함수를 간략히 기술하며, 3절에서는 퍼지 만족도 함수를 제안한다. 4절에서는 퍼지 만족도 함수를 퍼지숫자 비교에 적용한 예를 제시하며, 끝으로 5절에서 본 논문의 결론을 맺는다.

2. 만족도함수

이 절에서는 기존에 제안된 만족도 함수(satisfaction function)에 대하여 기술한다. 퍼지숫자를 비교하여, 그 비교결과를 0과 1사이의 실수로 표현하는 만족도 함수는 논문 [1]에서 정의되었으며, 논문 [2]에서 확장되었다 두 퍼지숫자의 비교에 적용되는 만족도 함수는 아래와 같이 정의된다.

$$S(A<B)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}\mu_A(x)\odot\mu_B(y)\,dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mu_A(x)\odot\mu_B(y)\,dxdy}$$

$$S(A>B)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty}\mu_A(x)\odot\mu_B(y)\,dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mu_A(x)\odot\mu_B(y)\,dxdy}$$

연산자 $\odot$은 T-norm 연산자이다. $S(A<B)$는 퍼지숫자 A가 퍼지숫자 B보다 작을 가능성을 나타내며, 이와 마찬가지로 $S(A>B)$는 A가 B보다 클 가능성을 나타낸다. 이렇게 정의된 만족도 함수는 두 퍼지숫자를 비교함에 있어, 최소(minimum) 또는 최대(maximum) 연

산지를 사용하는 것보다, 퍼지숫자의 전체적인 가능성 분포를 고려하여 비교결과를 생성하므로, 비교적 만족스러운 결과를 내는 것으로 알려져 있다[2].

3. 퍼지만족도함수

3.1 정 의

이 절에서는 퍼지 만족도 함수에 대하여 정의한다.

정의 2. 두 퍼지숫자 A와 B를 비교하는 퍼지 만족도 함수, $\tilde{S}(A<B)$와 $\tilde{S}(A>B)$는 다음과 같이 정의된다
단,

$$\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x)=\begin{cases}\max\{\mathrm{Similarity}(A,t) \mid x=S(A_t<B)\} & \text{if } Selector(A,B)=A\\ \max\{\mathrm{Similarity}(B,t) \mid x=S(A<B_t)\} & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{S}(A>B)}(x)=\begin{cases}\max\{\mathrm{Similarity}(A,t) \mid x=S(A_t>B)\} & \text{if } Selector(A,B)=A\\ \max\{\mathrm{Similarity}(B,t) \mid x=S(A>B_t)\} & \text{otherwise}\end{cases}$$

- $\mu_{A_t}(x)=\mu_A(x-t)$
- $Selector(A,B)$는 A 와 B 중에서 어느 하나를 선택하는 함수로서 다음을 만족하여야 한다.
  ① $Selector(A,B)\in\{A,B\}$
  ② $Selector(A,B)=Selector(B,A)$
  ③ $Selector(A,B)=A$ 단 $Supp(A_t)\subseteq Supp(B)$인 t가 존재하는 경우, $Supp(A)=\{x|\mu_A(x)>0\}$
- $Similarity(A,t)$는 두 퍼지숫자 A와 A_t사이의 유사도(similarity degree)를 구하는 함수로서, 다음을 만족하여야 한다.
  ① $Similarity(A,0)=1$
  ②만약 $Supp(A)\cap Supp(A_t)=\phi$이면, $Similarity(A,t)=0$
  ③ $Similarity(A,t)$는 $t>0$에서 증가하지 않는다.
  ④ $Similarity(A,t)$는 $t<0$에서 감소하지 않는다.

$\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x)$는 $S(A<B)=x$일 가능성, 즉 A가 B보다 작을 가능성이 x일 가능성을 나타내며, 이와 유사하게, $\mu_{\tilde{S}(A>B)}(x)$는 $S(A>B)=x$일 가능성, A가 B보다 클 가능성이 x일 가능성을 나타낸다 이와 같이 정의된 퍼지 만족도 함수는 두 퍼지숫자를 비교하여, 그 애매모호한 비교결과를 퍼지집합으로 출력한다

3.2 퍼지 만족도 함수의 속성

정의된 퍼지 만족도 함수, $\tilde{S}(A<B)$과 $\tilde{S}(A>B)$는 다음과 같은 속성을 갖는다

속성 1. $\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x)=\mu_{\tilde{S}(A>B)}(x)$

속성 2. $\mu_{\tilde{S}(A<B)}(S(A<B))=1$, $\mu_{\tilde{S}(A>B)}(S(A>B))=1$

속성 3. $\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x)=\mu_{\tilde{S}(A>B)}(1-x)$

속성 4. $\tilde{S}(A<B)$과 $\tilde{S}(A>B)$는 볼록(convex) 퍼지집합이다.

정리 1. $\mu_{\tilde{S}(A<A)}(x)=\mu_{\tilde{S}(A<A)}(1-x)$

정리 2. $\tilde{S}(A<B)$과 $\tilde{S}(A>B)$는 0과 1사이에 정의된 볼록하고 (convex) 정규화된(normalized) 퍼지집합이다

속성1로부터 퍼지 만족도 함수의 정의와 그 의미가 서로 일치하고 있음을 알 수 있다 속성2는 $\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x)$을 A가 B보다 작을 가능성이 x일 확신도라 했을 때, 작을 가능성이 $S(A<B)$일 확신도가 가장 높다는 것을 의미한다. 속성3으로부터 $\neg\tilde{S}(A<B)$은 $\tilde{S}(A<B)$로, $\neg\tilde{S}(A>B)$을 $\tilde{S}(A>B)$으로 정의될 수 있다. 정리2는 퍼지 만족도 함수의 결과가 0과 1사이, 즉 참(True), 거짓(False)을 나타내는 퍼지집합임을 말한다.

다음은 속성4의 증명을 보인다. 본 논문에서는 속성4를 제외한 나머지 속성과 정리에 관한 증명은 생략한다.

속성4의 증명

① $Selector(A,B)=A$인 경우

다음을 만족하는 x와 Δx에 대하여, $x>S(A<B)=S(A_0<B)$, $\Delta x>0$,

$T_x=\{t \mid x=S(A_t<B)\}$
$T_{x+\Delta x}=\{t \mid x+\Delta x=S(A_t<B)\}$

이라 하면,

$\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x)=\max\{Similarity(A,t)\mid t\in T_x\}$

$\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x+\Delta x)=\max\{Similarity(A,t)\mid t\in T_{x+\Delta x}\}$

이 된다 그리고, $S(A_t<B)$은 감소하지 않는 함수이기 때문에[2]

$0<\min\{T_x\}$ 이고 $\max\{T_x\}<\min\{T_{x+\Delta x}\}$

가 되고, 따라서

$\max\{Similarity(A_t)|t\in T_x\}\geq\min\{Similarity(A_t)|t\in T_{x+\Delta x}\}$

이다 그 이유는 T_x와 $T_{x+\Delta x}$에 속하는 모든 원소는 모두 0보다 크고, $Similarity(\cdot)$는 $t>0$에서 증가하지 않기 때문이다. 따라서 $x>S(A<B)$과 $\Delta x>0$에 대하여

$$\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x)\geq\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x+\Delta x)$$

이다. 비슷한 방법으로, $x<S(A<B)=S(A_0<B)$과 $\Delta x>0$에 대하여

$$\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x-\Delta x)\leq\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x)$$

임을 알 수 있다. 즉, $\mu_{\tilde{S}(A<B)}(x)$는 $x<S(A<B)$에서 감소하지 않으며, $x>S(A<B)$에서 증가하지 않는 함수이다. 따라서 $\tilde{S}(A<B)$의 모든 α-수준집합은 볼록집합이 되므로, $\tilde{S}(A<B)$은 볼록 퍼지집합이다[3].

② $Selector(A,B)=B$인 경우

첫 번째 경우 ①의 증명과 유사하다.

4. 예 제

이 절에서는 몇 가지 예를 제시하여, 제안하는 퍼지 만족도 함수가 두 퍼지숫자 비교시에 어떠한 결과를 내는가 살펴보도록 한다. 먼저 사용되는 퍼지숫자로는 삼각퍼지숫자만 사용된다고 가정하며, $Selector(A,B)$와 $Similarity(A,t)$를 다음과 같이 정의한다

```
Selector(A=(a1,a2,a3),B=(b1,b2,b3))
{
    if( a3-a1 > b3-b1 )
        select B
    else if( a3-a1 < b3-b1 )
        select A
    else if( |(a3-a2)-(a2-a1)| > |(b3-b2)-(b2-b1)| )
        select B
    else if( |(a3-a2)-(a2-a1)| < |(b3-b2)-(b2-b1)| )
        select A
    else if( a1 > b1 )
        select B
    else if( a1 < b1 )
        select A
    else
        select A or B
}


Similarity(A=(a1,a2,a3),t)
{
    if( a3-a1 = 0 )
    {
        if( t = 0 )
            return 1
        else
            return 0
    }
    else
        return  max {0, 1 - |t| / (a3 - a1) }
}
```

위에서 정의된 $Selector(A, B)$는 입력으로 주어진 두 퍼지숫자 중에서 지지집합(support)이 다른 퍼지숫자의 지지집합에 포함되는 것을 고른다. 만약 두 지지집합이 같다면, 꼭지점이 지지집합의 중심에 가까운 것을 고르며, 그 값도 같으면, 왼쪽에 위치한 퍼지숫자를 고르게 된다. 이와 같이 정의된 $Selector(A, B)$가 앞에서 제시된 조건을 만족함은 쉽게 확인할 수 있다. $Similarity(A, t)$은 주어진 값이 실수일 때, t가 0이면 1을, 그 외 값이면 0을 주며, 주어진 값이 퍼지숫자일 때는 밑변의 길이와 t의 비에 따라서 유사도를 계산한다.

그림1에 $\tilde{S}(A \langle B)$를 적용해 보자. $Selector(A, B)$를 그림1에 적용하면 B가 선택되므로

$$\mu_{\tilde{S}(A \langle B)}(x) = \max\{\text{Similariy}(B, t) \mid x = S(A \langle B_t)\}$$

이다. 비교결과는 그림2에 나타나 있다. 이것은 A가 B보다 작을 가능성과 그것들의 소속도를 나타내는데, 소속도는 해당 가능성의 확신도(certainty degree)로 간주될 수 있다. 예를 들면 그림2에서

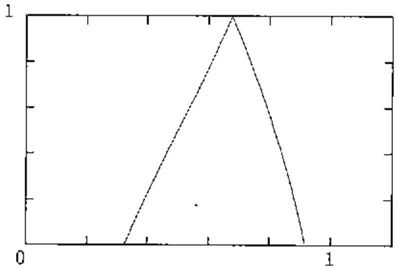


그림 2. 그림1의 비교결과

$\mu_{\tilde{S}(A \langle B)}(0.6) = 0.755$이고, $\mu_{\tilde{S}(A \langle B)}(0.7) = 0.925$인데, 이것은 다음과 같이 해석될 수 있다 : 확신도 0.755로 A가 B보다 작을 가능성은 0.6이며, 확신도 0.925로 A가 B보다 작을 가능성은 0.7이다.

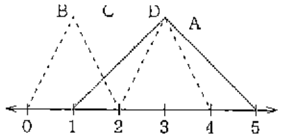


그림 3 퍼지숫자를 이동시키는 경우

그림3은 하나의 퍼지숫자(A)는 고정시키고, 다른 퍼지숫자(B)를 이동시키는 경우이다. 그림에서 C와 D는 B를 우측으로 이동시켜서 얻은 퍼지숫자이다. 이때 $\tilde{S}(A \langle B)$와 $\tilde{S}(A \langle C)$와 $\tilde{S}(A \langle D)$를 구해보면 그림4와 같은 결과를 얻을 수 있다. 즉 퍼지숫자 B가 왼쪽에서 오른쪽으로 이동하면 그 비교결과의 퍼지집합도 왼쪽에서 오른쪽으로 이동함을 알 수 있다. 또한 B가 이동하므로써 A와의 겹침이 증가하므로, 비교결과의 퍼지집합들의 폭 역시 증가하고 있음을 알 수 있다.

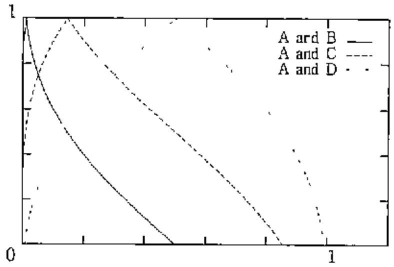


그림 4. 그림3의 결과

5. 결 론

본 논문에서는, 퍼지 만족도 함수를 제안하고, 그것이 갖는 여러가지 성질에 대하여 기술하였다. 퍼지 만족도 함수는 기존의 만족도 함수로부터 확장되었으며, 비교결과로 0과 1사이에서 정의되는 퍼지집합을 출력한다. 퍼지 만족도 함수가 어떠한 비교결과를 출력하는지 확인하기 위하여, 두가지 적용예를 제시하였다. 향후과제로, 퍼지숫자의 비교값인 퍼지집합을 비퍼지화하는 방법등, 퍼지 만족도 함수를 응용분야에 적용하기 위한 연구가 필요하다.

참고문헌

[1] K. M. Lee, C. H. Cho, H. Lee-Kwang, "Ranking fuzzy values with satisfaction function", *Fuzzy Sets and Systems*, vol.64, pp.295-309, 1994.

[2] J. H. Lee, H. Lee-Kwang, "Comparison of fuzzy values on a continuous domain", *Fuzzy Sets and Systems*, 1998(revised).

[3] H.-J. Zimmermann, "Fuzzy set theory and its applications", second edition, Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1991.

[4] G. Bortolan, R. Degani, "A review of some methods for ranking fuzzy subsets", *Fuzzy Sets and System*, vol.15, pp.1-19, 1985