

인장과 굽힘을 받는 반 무한 평판내의 분기균열에 대한 강도계수

김유환*(전남대 대학원 기계공학과), 범현규(전남대 기계공학과),
박치용(한국전력 전력연구원)

Intensity Factors for a Branched Crack in a Semi-Infinite Plate Under Tension and Bending Moments

Y. H. Kim(Mech. Eng. Dept., CNU), H. G. Beom(Mech. Eng. Dept., CNU),
C. Y. Park(KEPRI)

ABSTRACT

A branched crack in a semi-infinite plate under tension and bending moment is considered. Intensity factors of the stress and moment for the branched crack are evaluated. The stress intensity factors are obtained by using the finite element method and the J-based mutual integral. The moment intensity factors are calculated by extrapolating the values of the moment near the crack tip. Approximate expressions are also obtained as functions of the branched crack length and branching angle.

Key Words : Finite element method(유한요소법), Stress intensity factor (응력강도계수), Moment intensity factor (모멘트강도계수), J-based mutual integral (J 기저 상호매개적분), Extrapolation (외삽법)

1. 서론

원전 설비는 고온, 고압 상태에서 충격 및 반복하중을 받으면서 운전된다. 이러한 영향으로 원전 설비의 균열이 성장, 진전하게 된다. 이러한 균열은 원전 설비의 강도를 급격하게 감소시키기 때문에, 고도의 안전성을 확보해야만 하는 원전에 치명적인 영향을 준다. 따라서 원전 설비의 신뢰성을 확보하기 위해서는 균열의 성장 시점 및 균열의 진전 속도를 정량적으로 측정하고, 이를 원전설비의 수명 및 강도평가에 활용하여야 한다. 이를 위해 균열의 거동을 규정하는 파괴매개변수에 관한 연구가 필수적이다. 본 연구에서 원전설비의 분기균열을 반 무한 평판의 분기균열로 이상화하고, 평판은 인장과 굽힘을 동시에 받는 것으로 가정한다. 중점의 원리에 의하여 인장과 굽힘 문제로 분리하여 유한요소해석을 수행한다. 응력강도계수는 유한요소해석에 의한 균열선단장과 J 기저 상호매개적분법을 이용하여 계산한다^[1,2]. 한편 모멘트강도계수는 유한요소해석에 의한 균열선단의 모멘트와 모멘트외삽법을 이용하여 구한다^[3].

2. 반 무한 평판내의 분기균열

원전 설비의 분기균열을 반 무한 평판내의 분기균열로 이상화하여, Fig. 1로 나타내었다. 평판은 선형탄성(linear elastic)재료로 가정하였다. 그림에서 e 는 주균열이고, d 는 분기균열이며, h 는 평판의 두께이다. 또한 θ 는 분기균열각을 나타내고, 그리고 σ_0 와 M_0 는 인장과 굽힘 하중을 나타낸다.

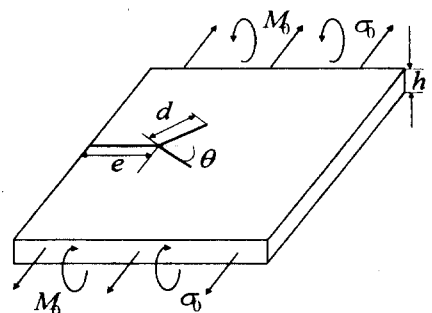


Fig. 1. A branched crack

3. 유한요소해석

인장과 굽힘을 받는 반 무한 평판내의 분기균열에 대하여 유한요소해석을 각각 수행한다. 요소는 인장과 굽힘 문제에 대하여 각각 8-node biquadratic element와 8-node shell element를 사용하였다. 요소 수는 모델에 따라 2000 ~ 3000개 정도이고, 절점 수는 대략 6400 ~ 7000개 정도이다. 분기균열의 Fig. 1과 같이 주균열에 대하여 완전히 대칭이므로 유한요소해석은 1/2 모델만 수행하였다. 유한요소해석은 ABAQUS를 사용하였다^[4]. 유한요소해석을 통하여 인장 문제의 경우, 균열선단의 응력과 변위를 구하였고 굽힘 문제에서는 균열선단의 모멘트를 계산하였다.

4. 응력확대계수 해석

응력확대계수를 해석하기 위한 J 기저 상호매개적분적분은 폐경로에 대하여 보존법칙(conservation law)과 경로독립성(path independence)를 만족하고, 다음 식과 같이 정의된다.

$$I_j^{(A, B)} = \int_{\Gamma_o} (W^{(A, B)} n_1 - t_i^{(A)} u_{i,1}^{(B)} - t_i^{(B)} u_{i,1}^{(A)}) ds. \quad (1)$$

여기서 (A), (B)는 독립적인 평형상태(equilibrium state)의 응력장을 나타내고, (A,B)는 응력장 (A)와 (B)의 상호간섭을 나타내는 평형상태의 응력장을 나타낸다. 식(1)에서 t_i 와 u_i 는 각각 표면력(traction)과 변위의 성분을 나타낸다. 식(1)에서 $W^{(A, B)}$ 는 상호매개변형률에너지 밀도(mutual strain energy density)이고, 다음 식과 같이 정의된다.

$$W^{(A, B)} = \sigma_{ij}^{(A)} u_{i,j}^{(B)} = \sigma_{ij}^{(B)} u_{i,j}^{(A)}. \quad (2)$$

선형탄성 파괴(linear elastic fracture)의 경우, J 기저 상호매개적분은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$I_j^{(A, B)} = \frac{2}{E'} (K_I^{(A)} K_I^{(B)} + K_{II}^{(A)} K_{II}^{(B)}). \quad (3)$$

여기서 E' 은 평면응력(plane stress)상태일 때, 강성계수 E 를 나타내고, 평면변형률(plane strain)상태일 때, 강성계수와 Poisson의 비 ν 로 표현되는 $E/(1-\nu^2)$ 를 나타낸다. 식(3)에서 해석하고자 하는 응력장을 (A)라고 하고, 보조장(auxiliary field)을 (B)라고 하고, 보조장 (B)를 다음 식과 같이 선택한다.

$$K_I^{(B)} = 1, K_{II}^{(B)} = 0, K_I^{(A)} = 0, K_{II}^{(A)} = 1 \quad (4)$$

식(4)을 식(3)에 대입하면 J 기저 상호매개적분을 응력강도계수 식으로 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$I_j^{(A, B)} = \frac{2}{E'} K_I^{(A)}, I_j^{(A, B)} = \frac{2}{E'} K_{II}^{(A)} \quad (5)$$

식(5)에서 J 기저 상호매개적분 $I_j^{(A, B)}$ 와 $I_j^{(A, B)}$ 를 계산하면 해석하고자 하는 응력강도계수 $K_I^{(A)}$ 와 $K_{II}^{(A)}$ 를 구할 수 있다. J 기저 상호매개적분을 계산하기 위하여 식(1)의 선적분(line integral)이 다음 식과 같이 영역적분(domain integral)로 변환된다.

$$I_j^{(A, B)} = \int_{\Omega} \{ W^{(A, B)} \delta_{1k} - \sigma_{ik}^{(A)} u_{i,1}^{(B)} - \sigma_{ik}^{(B)} u_{i,1}^{(A)} \} q_{,k} dA. \quad (6)$$

여기서 Ω 는 균열선단을 둘러싸는 적분 영역이고, δ_{1k} 는 Kronecker delta이며, q 는 다음 조건을 만족하는 임의의 연속함수이다.

$$q = \begin{cases} 0, & \text{if } r = \Gamma_i \\ 1, & \text{if } r = \Gamma_o \end{cases} \quad (7)$$

식(6)의 영역적분 형태의 J 기저 상호매개적분은 Gauss 적분법을 이용하여 다음 식으로 수치적분이 수행된다.

$$I_j^{(A, B)} = \sum_{element} \sum_{n=1}^{N_k} \{ W^{(A, B)} \delta_{1k} - \sigma_{ik}^{(A)} u_{i,1}^{(B)} - \sigma_{ik}^{(B)} u_{i,1}^{(A)} \} n \times q_{,k} \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right|_n w_n. \quad (8)$$

여기서 하첨자 n 은 Gauss 적분점에서의 물리량이고, $\left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right|_n$ 은 Jacobian의 행렬식이며, w_n 은 무게인수(weight factor)이다. 식(8)의 영역적분에 대한 수치적분은 Fig. 2에 나타내었다. 식(8)을 계산하여 식(5)에 대입하면 응력강도계수를 구할 수 있다.

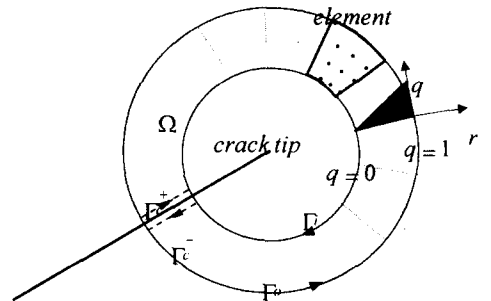


Fig. 2. Domain integral.

5. 모멘트강도계수 해석

모멘트강도계수를 계산하기 위하여, Reissner의 평판이론으로부터 얻어진 균열선단장은 다음 식과 같다.

$$\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \frac{K_1^M}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{pmatrix} + \frac{K_2^M}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \end{pmatrix} \quad (9)$$

여기서 K_1^M 와 K_2^M 은 각각 굽힘과 비틀림에 의한 모멘트강도계수이고, 다음 식과 같이 정의된다.

$$K_1^M = \lim_{r \rightarrow 0} M_{22} \sqrt{2\pi r}, \quad K_2^M = \lim_{r \rightarrow 0} M_{12} \sqrt{2\pi r}. \quad (10)$$

유한요소해석으로부터 얻어진 균열선단의 모멘트를 식(10)의 정의에 의하여 모멘트의삽을 수행하면 모멘트강도계수를 구할 수 있다. 식(10)에 의하여 구한 모멘트강도계수는 평판의 모멘트와 응력과의 관계식에 의하여 다음 식과 같이 응력강도계수로 변환할 수 있다.

$$K_m^M = \frac{12z}{h^3} K_n^M. \quad (11)$$

여기서 하첨자 $m(=I, II)$ 은 응력강도계수를 나타내고, 하첨자 $n(=1, 2)$ 은 모멘트강도계수를 나타낸다. z 는 평판의 두께방향의 좌표를 나타낸다.

일반적으로 평판의 모멘트확대계수는 평판의 두께에 변한다. 본 연구에서는 주균열의 길이에 대한 평판의 두께의 비 h/e 가 각각 0.1과 10인 경우에 대하여 해석하였다. 주균열의 길이가 평판의 두께보다 상당히 큰 경우는 균열이 상당히 진전한 평면응력이라고 할 수 있고, 주균열의 길이가 평판의 두께보다 작은 경우는 물리적으로 초기 균열이 발생하는 평면변형을 상태로 가정할 수 있다.

6. 결과 및 고찰

위의 4장과 5장에서 구한 응력강도계수와 모멘트강도계수를 특성길이 $c(=d+e/\cos\theta)$ 를 이용하여 다음 식과 같이 무차원화 한다.

$$F_m(\theta, d/e) = \frac{K_m}{\sigma_0 \sqrt{\pi c}}, \quad F_n^M(\theta, d/e) = \frac{K_n^M}{M_0 \sqrt{\pi c}}. \quad (12)$$

식(12)의 응력 및 모멘트강도계수를 분기균열 각 θ 에 대하여 Figs. 3, 4, 5에 각각 나타내었다. Figs. 3, 5에서 응력강도계수와 $h/e=10$ 인 경우의 모멘트강도계수는 $\theta=10^\circ \sim 20^\circ$ 에서 모드 I(1)의 강도계수가 최대값에 도달한다. 또한 Fig. 4에서 $h/e=0.1$ 인 경우의 모멘트강도계수는 $\theta=0^\circ \sim 10^\circ$ 에서 모드 1의 강도계수가 최대값을 갖는다. Figs. 3, 4, 5에서 알 수 있듯이 강도계수는 특정 분기균열 각에서 최대값을 갖는다. 또한 주균열에 대한 분기균열의 길이의 비 d/e 에 대하여 강도계수의 변화는 거의 선형적이었다. 따라서 강도계수 계산식을 삼각함수와 선형함수가 곱의 형태로 다음 식과 같이 나타내었다.

1. 응력확대계수 계산식

$$\begin{aligned} F_I(\theta, d/e) &= \left\{0.808 + 0.006\left(\frac{d}{e}\right)\right\} \sin\left(\frac{9}{8}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right), \\ F_{II}(\theta, d/e) &= \left\{-0.267 - 0.0095\left(\frac{d}{e}\right)\right\} \\ &\quad \times \sin\left(\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4} - 3\theta\right)\right) \end{aligned} \quad (13)$$

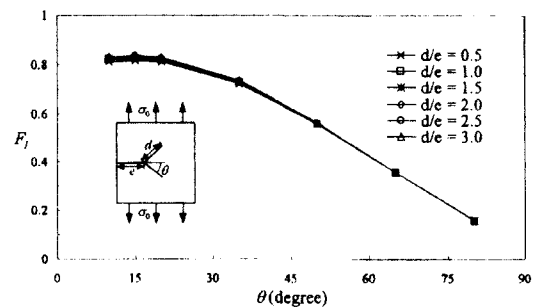
2. 모멘트확대계수 계산식

$h/e=0.1$ 일 때,

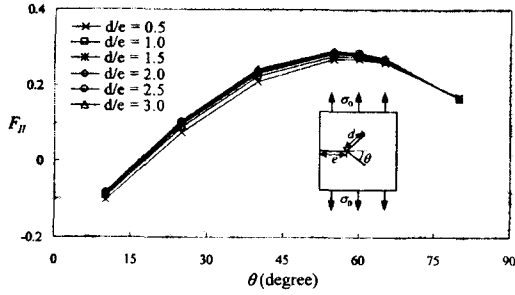
$$\begin{aligned} F_I^M(\theta, d/e) &= \left\{0.422 + 0.023\left(\frac{d}{e}\right)\right\} \cos\left(\frac{18}{17}\theta\right), \\ F_{II}^M(\theta, d/e) &= \left\{0.243 + 0.016\left(\frac{d}{e}\right)\right\} \\ &\quad \times \sin\left(\frac{18}{11}\theta\right) \end{aligned} \quad (14)$$

$h/e=10$ 일 때,

$$\begin{aligned} F_I^M(\theta, d/e) &= \left\{0.657 - 0.033\left(\frac{d}{e}\right)\right\} \sin\left(\frac{9}{8}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right), \\ F_{II}^M(\theta, d/e) &= \left\{-0.232 - 0.0165\left(\frac{d}{e}\right)\right\} \\ &\quad \times \sin\left(\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4} - 3\theta\right)\right) \end{aligned} \quad (15)$$

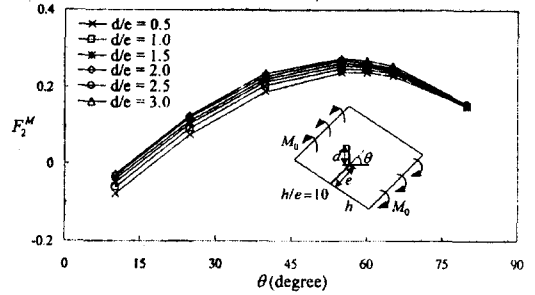


(a) Mode I



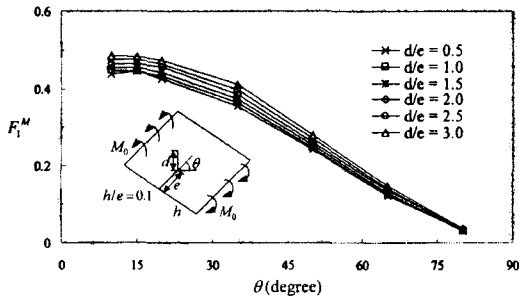
(b) Mode II

Fig. 3. Normalized stress intensity factors as a function of θ

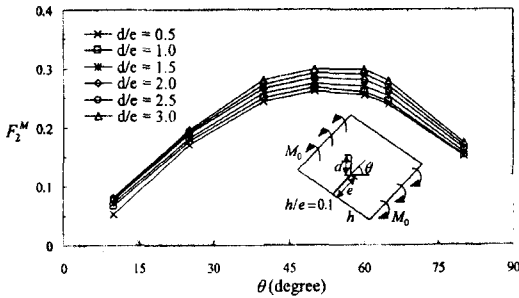


(b) Mode 2

Fig. 5. Normalized moment intensity factors as a function of θ

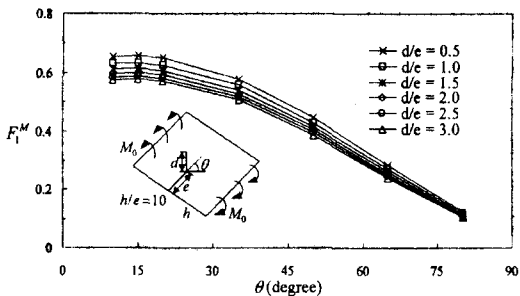


(a) Mode 1



(b) Mode 2

Fig. 4. Normalized moment intensity factors as a function of θ



(a) Mode 1

7. 결론

본 연구에서는 인장과 굽힘을 받는 반 무한 평판 내의 분기균열에 대하여 해석하였다. 중첩의 원리에 의하여 인장과 굽힘문제에 분리한 다음 유한요소법을 이용하여 각각 해석하였다. 응력확대계수는 유한요소법으로 구한 균열선단장과 J 기저 상호매개적분법을 이용하여 계산하였고, 모멘트확대계수는 모멘트외삽법을 이용하여 구하였다.

후기

본 연구는 한국전력공사의 전력기술기초연구(99-지정-08)의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- [1] J. F. Yau, S. S. Wang and H. T. Corten, "A Mixed Mode Crack Analysis of Isotropic Solid Using Conservation Laws of Elasticity," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 335-356, 1980
- [2] Y. J. Cho, H. G. Beom and Y. Y. Earmme, "Application of a Conservation Integral to an Interface Crack Interacting with Singularities", *International Journal of Fracture*, Vol. 65, pp. 63-73, 1994
- [3] J. L. Wearing and S. Y. Ahmadi-Broghani, "The evaluation of stress intensity factors in plate bending problems using the dual boundary element method," *Engineering Analysis with Boundary Element*, Vol. 23, pp. 3-19, 1999
- [4] H. D. Hibbit, B. Karlsson, E. P. Sorensen, *ABAQUS User's Manual*, HKS Inc., 1984